ANTIDERIVACIÓN

Definición de antiderivada

Una función F se denomina antiderivada de la función f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo valor de F x en I.

Problema ejemplo

Si *F* es la función definida por

$F(x) = 4x^3 + x^2 + 5$

Entonces $F'(x) = 12x^2 + 2x$. De modo que si *f* es la función definida por

$f(x) = 12x^2 + 2x$

Entonces *f* es la derivada de *F*, y *F* es la antiderivada de *f*. Si *G* es la función definida por

$G(x) = 4x^3 + x^2 + C$

Donde C es una constante, es una antiderivada de *f*.

Teorema

Si *f* y *g* son dos funciones definidas en el intervalo *I*, tales que

$f'(x) = g'(x)$ para toda *x* en *I*

Entonces existe una constante *K* tal que

$f(x) = g(x) + K$ para toda *x* en *I*

Teorema

Si *F* es una antiderivada particular de *f* en un intervalo *I*, entonces cada antiderivada de *f* en *I* está dada por

$F(x) + C$

Donde C es una constante arbitraria; y todas las antiderivadas de *f* en *I* pueden obtenerse a partir de (1) asignando valores particulares a *C*.

$$\int \boldsymbol{d}\big(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\big) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}$$

Teorema

$$\int \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}$$

Teorema

$$\int af(x)dx = a\int f(x)\,dx$$

Donde *a* es una constante

Teorema

Si *f* y *g* están definidas en el mismo intervalo, entonces

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Teorema

Si f_1, f_2, …,f_n están definidas en el mismo intervalo, entonces

$$\int [c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + C_nf_n(x)]dx$$

$$= c_1\int f_1(x)dx + c_2\int f_2(x)dx + \cdots + c_n\int f_n(x)dx$$

Donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes.

Teorema

Si *n* es un numero racional, entonces

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

Problemas ejemplos

Valores particulares de *n* se tiene:

a)

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c \qquad \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx$$

$$= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + C$$

$$= -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{1/3} dx$$

$$= \frac{x^{1/3+1}}{\frac{1}{3}+1} + C$$

$$= \frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{4} x^{4/3} + C$$

b)

$$\int (3x+5) dx = \int 3x\, dx + \int 5\, dx$$

$$= 3\int x\, dx + 5\int dx$$

$$= 3\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) + 5(x + C_2)$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + 5x + (3C_1 + 5C_2)$$

c)

$$\int \frac{5t^2+7}{t^{4/3}} dt = 5\int \frac{t^2}{t^{4/3}} dt + 7\int \frac{1}{t^{4/3}} dt$$

$$= 5\int t^{2/3} dt + 7\int t^{-4/3} dt$$

$$= 5\left(\frac{t^{5/3}}{\frac{5}{3}}\right) + 7\left(\frac{t^{-1/3}}{-\frac{1}{3}}\right) + C$$

$$= 5\left(\frac{3}{5}t^{5/3}\right) + 7\left(-3t^{-1/3}\right) + C$$

$$= 3t^{5/3} - \frac{21}{t^{1/3}} + C$$

Teorema

$$\int sen\ x\ dx = -cos\ x + C$$

Teorema

$$\int cos\ x\ dx = sen\ x + C$$

Teorema

$$\int sec^2 x\ dx = \tan x + C$$

Teorema

$$\int csc^2 x\ dx = -cot\ x + C$$

Teorema

$$\int \mathbf{\sec x \tan x\, dx = \sec x + C}$$

Teorema

$$\int csc\ x\ cot\ x\ dx = -csc\ x + C$$

Problemas ejemplo

a)

$$\int (3 \sec x \tan x - 5\, csc^2\ x) dx = 3 \int \sec x\ tanx\ dx - 5 \int csc^2 x dx$$

$$= 3 \sec x - 5(-\cot x) + C$$

$$= 3 \sec x + 5 \cot x + C$$

b)

$$\int \frac{2\cot x - 3sen^2 x}{sen\ x} dx$$

$$= 2\int \frac{1}{sen\ x} * \cot x\ dx - 3\int \frac{sen^2 x}{sen\ x} dx$$

$$= 2\int \csc x \cot x\ dx - 3\int sen\ x\ dx$$

$$= 2(-\csc x) - 3(-\cos x) + C$$

$$= -2\csc x + 3\cos x + C$$

Practica en clase

1) $\int 3x^4\,dx$
2) $\int \frac{3}{t^5}dt$
3) $\int 5u^{3/2}du$
4) $\int 6t^2\sqrt[3]{t}\,dt$
5) $\int y^3(2y^2-3)dy$
6) $\int \frac{y^4+2y^2-1}{\sqrt{y}}dy$
7) $\int \frac{27t^3-1}{\sqrt[3]{t}}dt$
8) $\int (3sen\,t-2cos\,t)dt$
9) $\int (2cot^2\theta-3tan^2\theta)d\theta$
10) $\int \frac{3tan\theta-4cos^2\theta}{cos\theta}d\theta$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Solucionario de la practica en clase

1) $\int 3x^4\,dx = 3 \cdot \frac{x^5}{5} = \frac{3}{5}x^5 + C$
2) $\int \frac{3}{t^5}dt = 3\int t^{-5}dt = 3\frac{t^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{-3}{4t^4} + C$
3) $\int 5u^{3/2}du = 5 \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = 5 \cdot \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = 5 \cdot \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} = 2u^{\frac{5}{2}} + C$
4) $\int 6t^2\sqrt[3]{t}\,dt = \int 6t^{7/3}dt = 6 \cdot \frac{3}{10}t^{\frac{10}{3}} + C = \frac{9}{5}t^{\frac{10}{3}} + C$
5) $\int y^3(2y^2 - 3)dy = \int (2y^5 - 3y^3)dy = \frac{1}{3}y^6 - \frac{3}{4}y^4 + C$
6) $\int \frac{y^4+2y^2-1}{\sqrt{y}}dy = \int \frac{y^4+2y^2-1}{y^{1/2}}dy = \int (y^{7/2} + 2y^{3/2} - y^{-1/2})\,dy = \frac{2}{9}y^{9/2} + \frac{4}{5}y^{5/2} - 2y^{\frac{1}{2}} + C$
7) $\int \frac{27t^3-1}{\sqrt[3]{t}}dt = \int (27t^3 - 1)\,t^{-1/3}dt = \int (27t^{8/3} - t^{-1/3})dt = \frac{11}{3} \cdot 27t^{\frac{11}{3}} - \frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}} + C = \frac{81}{11}t^{\frac{11}{3}} - \frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}} + C$
8) $\int (3sen\,t - 2cos\,t)dt = -3cos\,t - 2sen\,t + C$
9) $\int (2cot^2\theta - 3tan^2\theta)d\theta = [2(csc^2\theta - 1) - 3(sec^2\theta - 1)]d\theta \;= \int (2\,csc^2\theta - 3sec^2\theta + 1)d\theta = -2\cot\theta - 3tan\theta + \theta + C$
10) $\int \frac{3tan\theta - 4cos^2\theta}{cos\theta}d\theta = 3\int \frac{tan\theta}{cos\theta}d\theta - 4\int \frac{cos^2\theta}{cos\theta}d\theta \;= 3\int tan\theta\,sec\theta\,d\theta - 4\int cos\theta\,d\theta = 3sec\theta\,d\theta - 4sen\theta\,d\theta + C$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Tarea

1) $\int 2x^7 dx$
2) $\int \frac{1}{x^3} dx$
3) $\int 10\sqrt[3]{x^2} dx$
4) $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx$
5) $\int x^4(5 - x^2) dx$
6) $\int (2 + 3x^2 - 8x^3) dx$
7) $\int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 5\right) dx$
8) $\int \frac{x^2+4x++4}{\sqrt{x}} dx$
9) $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$
10) $\int (5\cos x - 4\sin x) dx$
11) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$
12) $\int (4\csc x \cot x + 2\sec^2 x) dx$
13) $\int (3\csc^2 t - 5\sec t \tan t) dt$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Solucionario de la tarea

1) $\int 2x^7 dx = 2 \cdot \frac{1}{8}x^8 + C$
2) $\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = -\frac{1}{2}x^{-2} + C = \frac{1}{2x^2} + C$
3) $\int 10\sqrt[3]{x^2} dx = 10 \int x^{\frac{2}{3}} dx = 10 \cdot \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C = 6x^{\frac{5}{3}} + C$
4) $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx = \int 2x^{-\frac{1}{3}} dx = 2 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C = 3x^{\frac{2}{3}} + C$
5) $\int x^4(5 - x^2) dx = \int (5x^4 - x^6) dx = 5 \cdot \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + C = x^5 - \frac{1}{7}x^7 + C$
6) $\int (2 + 3x^2 - 8x^3) dx = 2x + 3 \cdot \frac{1}{3}x^3 - 8 \cdot \frac{1}{4}x^4 + C = 2x + x^3 - 2x^4 + C$
7) $\int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 5\right) dx = \int (2x^{-3} + 3x^2 + 5) dx = -x^{-2} - 3x^{-1} + 5x + C$
$= -\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 5x + C$
8) $\int \frac{x^2+4x++4}{\sqrt{x}} dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} - 4x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 4 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 4 \cdot 2x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} - 8x^{\frac{1}{2}} + C$
9) $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx = \int \left(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}\right) dx = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$
10) $\int (5\cos x - 4\sin x) dx = 5\int \cos x\, dx - 4\int \sin x\, dx = 5\sin x + 4\cos x + C$
11) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} dx = \int \tan x \sec x\, dx = \sec x + C$
12) $\int (4\csc x \cot x + 2\sec^2 x) dx = -4\csc x + 2\tan x + C$
13) $\int (3\csc^2 t - 5\sec t \tan t) dt = 3\int \csc^2 t\, dt - 5\int \sec t \tan t\, dt = -3\cot t - 5\sec t + C$

ALGUNAS TÉCNICAS DE ANTIDERIVACIÓN

Teorema, Regla de la cadena para antiderivación

Sea $g(x)$ una función diferenciable, y supongamos que los valores que toma $g(x)$ están dentro de un intervalo I. En ese intervalo, tenemos una función $f(u)$ y una antiderivada $F(u)$ de f, es decir, $F'(u) = f(u)$.Entonces

$$\int f\big(g(x)\big)[g'(x)dx] = F(g(x)) + C$$

Teorema

Si $g(x)$ es una función diferenciable y n es un número racional, entonces

$$\int [g(x)]^n[g'(x)dx] = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$

$n \neq -1$

Problemas ejemplo

a)

Calcular

$$\int x^2(5+2x^3)^8 dx$$

Observar que si

$g(x) = 5 + 2x^3$ entonces $g'(x)dx = 6x^2 dx$

Como

$$\int x^2(5+2x^3)^8 dx = \int (5+2x^3)^8(x^2 dx)$$

se necesita un factor 6 junto a x^2dx para obtener $g'(x)dx$. Por tanto, se escribe

$$\int x^2(5+2x^3)^8 dx = \frac{1}{6}\int (5+2x^3)^8(6x^2 dx)$$

$$\frac{1}{6}\int (5+2x^3)^8(6x^2 dx) = \frac{1}{6}\cdot\frac{(5+2x^3)^9}{9} + C$$

$$= \frac{1}{54}(5+2x^3)^9 + C$$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Practica en clase

1) $\int \sqrt{1-4y}dy$
2) $\int x^3\sqrt{x^2-9}dx$
3) $\int \frac{y^3}{(1-2y^4)^5}dy$
4) $\int 6x^2 \sin x^3\, dx$
5) $\int y \csc 3y^2 \cot 3y^2\, dy$
6) $\int \sqrt{\frac{1}{t}-1}\frac{dt}{t^2}$
7) $\int \sin 2x \sqrt{2-2\cos x}\, dx$
8) $\int \sin^3\theta \cos\theta\, d\theta$
9) $\int \frac{\sec^2 3\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$
10) $\int x(x^2+1)\sqrt{4-2x^2-x^4}dx$
11) $\int \frac{y+3}{(3-y)^{\frac{2}{3}}}dy$
12) $\int \left(t+\frac{1}{t}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right)dt$
13) $\int \sec x \tan x \cos(\sec x)\, dx$

Solucionario de la tarea

1) $\int \sqrt{1-4y}dy$

$u = 1-4y\ ; du = -4dy$

$$= -\frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}}\,du = -\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{2}{3}} + C$$

$$= -\frac{1}{6}(1-4y)^{\frac{2}{3}} + C$$

2) $\int x\sqrt[3]{x^2-9}dx$

$u = x^2-9\ ; du = 2xdx$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt[3]{u}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{8}(x^2-9)^{\frac{4}{3}} + C$$

3) $\int \frac{y^3}{(1-2y^4)^5}dy$

$u = 1-2y^4\ ; du = -8y^3dy$

$$= -\frac{1}{8}\int u^{-5}du = -\frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{1}{4}u^{-4}\right) + C$$

$$= \frac{1}{32}(1-2y^4)^{-4} + C$$

4) $\int 6x^2 \sin x^3\, dx$

$u = x^3\ ; du = 3x^2dx$

$$= 2\int \sin u\, du = -2\cos u + C$$

$$= -2\cos x^3 + C$$

5) $\int y \csc 3y^2 \cot 3y^2\, dy$

$u = 3y^2\ ; du = 6ydy$

$$= \frac{1}{6}\int \csc u \cot u\, du = -\frac{1}{6}\csc u + C$$

$$= -\frac{1}{6}\csc 3y^2 + C$$

6) $\int \sqrt{\frac{1}{t}-1}\,\frac{dt}{t^2}$

$u=\frac{1}{t}-1\,;du=-\frac{1}{t^2}dt$

$=-\int \sqrt{u}du=-\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$

$=-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{\frac{3}{2}}+C$

7) $\int \sin 2x\sqrt{2-\cos 2x}\,dx$

$u=2-\cos 2x\ ;du=2\sin 2x\,dx$

$=\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$

$=\frac{1}{3}(2-\cos 2x)^{\frac{3}{2}}+C$

8) $\int \sin^3\theta\cos\theta\,d\theta$

$u=\sin\theta\ ;du=\cos\theta\,d\theta$

$=\int u^3du=\frac{1}{4}u^4+C$

$=\frac{1}{4}\sin\theta^4+C$

9) $\int \frac{\sec^2 3\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$

$u=3\sqrt{t}\,;du=\frac{3}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$

$=\frac{2}{3}\int \sec^2 u\,du=\frac{2}{3}\tan u+C$

$=\frac{2}{3}\tan 3\sqrt{t}+C$

10) $\int x(x^2+1)\sqrt{4-2x^2-x^4}dx$

$u=4-2x^2-x^4\,;du=(-4x-4x^3)dx=-4x(1+x^2)dx$

$=-\frac{1}{4}\int \mathrm{u}^{\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\mathrm{u}^{\frac{3}{2}}+C$

$$= -\frac{1}{6}(4 - 2x^2 - x^4)^{\frac{3}{2}} + C$$

11) $\int \frac{y+3}{(3-y)^{\frac{2}{3}}} dy$

$$u = 3 - y => y = 3 - u \,; du = -dy$$

$$= \int \frac{6-u}{u^{\frac{2}{3}}}\, du = \int \left(u^{\frac{1}{3}} - 6u^{-\frac{2}{3}}\right) du$$

$$= \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} - 13u^{\frac{1}{3}} + C = \frac{3}{4}(3-y)^{\frac{4}{3}} - 13(3-y)^{\frac{1}{3}} + C$$

12) $\int \left(t + \frac{1}{t}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{t^2-1}{t^2}\right) dt$

$$u = t + \frac{1}{t} \,; du = \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt = \frac{t^2-1}{t^2} dt$$

$$= \int u^{\frac{3}{2}} du = \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{5}\left(t + \frac{1}{t}\right)^{\frac{5}{2}} + C$$

13) $\int \sec x \tan x \cos(\sec x)\, dx$

$$u = \sec x \;; du = \sec x \tan x\, dx$$

$$= \int \cos u\, du = \sin u + C$$

$$= \sin(\sec x) + C$$

Tarea

1) $\int \sqrt[3]{3x-4}\ dx$
2) $\int x(2x^2+1)^6$
3) $\int \frac{s}{\sqrt{3s^2+1}} ds$
4) $\int x^5(x^3+3)^{1/4} dx$
5) $\int sen\left(\frac{1}{3}x\right) dx$
6) $\int \frac{1}{2} t\cos(4t^2)\, dt$
7) $\int \csc^2 2\theta\ d\theta$
8) $\int r^2 \sec^2 r^3 dr$
9) $\int cosx(2+senx)^5 dx$
10) $\int \frac{4senx}{(1+cosx)^2}$
11) $\int \sqrt{1+\frac{1}{3x}}\left(\frac{dx}{x^2}\right)$
12) $\int sex2x\sqrt{2-cos2x}\ dx$
13) $\int \cos^2 t\ sen\ t\ dt$
14) $\int (tan2x+cot2x)^2\, dx$
15) $\int \frac{(x^2+2x)}{\sqrt{x^3+3x+1}} dx$
16) $\int \sqrt{3+s}\,(s+1)^2 ds$
17) $\frac{\int (r^{\frac{1}{3}}+2)^4}{r^{\frac{2}{3}}} dr$
18) $\int \frac{x^3}{(x+4)^{\frac{3}{2}}} dx$
19) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-2x^2}}$
20) $\int senx\ sen(cosx)dx$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Solucionario de la tarea

1) $\int \sqrt[3]{3x-4}\ dx$

$u = 3x - 4\, ; du = 3dx$

$= \frac{1}{3}\int \sqrt[3]{u}\ du$

$= \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{3}}\, du$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{3u^{\frac{4}{3}}}{4}\right) + C$

$= \frac{1}{4}(3x-4)^{4/3} + C$

2) $\int (2x^2+1)^6$

$u = 2x^2 + 1\ \ ; du = 4xdx$

$= \frac{1}{4}\int u^6 du$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{u^7}{7}\right) + C$

$= \frac{1}{28}(2x^2+1) + C$

3) $\int \frac{s}{\sqrt{3s^2+1}} ds$

$u = 3s^2 + 1\ \ ; du = 6sds$

$= \frac{1}{6}\int \frac{du}{\sqrt{u}}$

$= \frac{1}{6}\int \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{1}{6}\int u^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{6}\left(2u^{\frac{1}{2}}\right) + \mathrm{C}$

$= \frac{1}{3}\sqrt{3s^2+1} + C$

4) $\int x^5(x^3+3)^{1/4} dx$

$u = x^3 + 3\ \ ; du = 3x^2 dx$

$= \frac{1}{3}\int u^{\frac{5}{4}} - 3u^{\frac{1}{4}}\ du$

$= \frac{1}{3}\int u^{\frac{5}{4}}\,du - \frac{3}{3}\int u^{\frac{1}{4}}\,du$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{4u^{\frac{9}{4}}}{9}\right) - \frac{4}{5}u^{\frac{5}{4}} + C$

$= \frac{1}{27}(x^3+3)^{\frac{9}{4}} - \frac{4}{5}(x^3+3)^{\frac{5}{4}} + C$

5) $\int sen\left(\frac{1}{3}x\right)dx$

$u = \frac{1}{3}x \,;\, du = \frac{1}{3}dx$

$= 3\int sen\, u\, du$

$= -3\cos\left(\frac{1}{3}x\right) + C$

6) $\int \frac{1}{2}t\cos(4t^2)\,dt$

$u = 4t^2 \,;\, du = 8t\,dt$

$= \frac{1}{2}\int \cos u \frac{du}{8}$

$= \frac{1}{16}\int \cos u\, du$

$= \frac{1}{16} sen\, 4t^2 + C$

7) $\int \csc^2 2\theta\, d\theta$

$u = 2\theta \,;\, du = 2d\theta$

$= \frac{1}{2}\int \csc^2 u\, du$

$= -\frac{1}{2}\cot 2\theta + C$

8) $\int r^2 \sec^2 r^3 dr$

$u = r^3 \,;\, du = 3r^2 dr$

$= \frac{1}{3}\int \sec^2 u\, du$

$= -\frac{1}{3}\cot r^3 + C$

9) $\int cosx(2+senx)^5 dx$

$u = 2 + senx \,;\, du = cosxdx$

$= \int u^5 du$

$=\frac{1}{6}u^6+C$

$=\frac{1}{6}(2+senx)^6+C$

10) $\int \frac{4senx}{(1+cosx)^2}$

$u=2+cosx\,;du=-senxdx$

$=\int -\frac{4du}{u^2}$

$=-4\int \frac{du}{u^2}$

$=-4\int u^{-2}\,du$

$=4u^{-1}+C$

$=\frac{4}{1+cosx}+C$

11) $\int \sqrt{1+\frac{1}{3x}}\left(\frac{dx}{x^2}\right)$

$u=1+\frac{1}{3x}\,;du=-\frac{dx}{3x^2}$

$=-3\int \sqrt{u}\;du$

$=-3\int u^{\frac{1}{2}}\,du$

$=-3\left(\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\right)+C$

$=2\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{\frac{3}{2}}+C$

12) $\int sex2x\sqrt{2-cos2x}\;dx$

$u=2-cos2x\,;du=2sen2x\,dx$

$=\frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\right)+C$

$=\frac{1}{3}(2-cos2x)^{\frac{3}{2}}+C$

13) $\int \cos^2 t\;sen\;t\;dt$

$u = \cos t$; $du = -sent$

$= -\int u^2 du$

$= -\frac{1}{3}u^3 + C$

$= -\frac{1}{3}(cost)^3 + C$

14) $\int (tan2x + cot2x)^2\, dx$

$= \int \tan^2 2x + 2\tan 2x\, cot2x\ + \cot^2 2x\, dx$

$= \int \tan^2 2x + 2 + \cot^2 2x\, dx$

$= \int \sec^2 2x - 1 + 2 + \csc^2 2x - 1\, dx$

$= \int \sec^2 2x + \csc^2 2x\, dx$

$u = 2x$; $du = 2dx$

$= \frac{1}{2}\int \sec^2 u\, du + \frac{1}{2}\int \csc^2 u\, du$

$= \frac{1}{2}tan2x - \frac{1}{2}cot2x + C$

15) $\int \frac{(x^2 + 2x)}{\sqrt{x^3 + 3x + 1}}\, dx$

$u = x^3 + 3x^2 + 1$; $du = 3x^2 + 6x\, dx$

$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u}}$

$= \frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}} du$

$= \frac{1}{3}\left(2u^{\frac{1}{2}}\right) + C$

$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3 + 3x^2 + 1} + C$

16) $\int \sqrt{3+s}\,(s+1)^2 ds$

$u = 3 + s$; $du = ds$

$= \int u^{\frac{1}{2}}(u-2)^2 du$

$= \int u^{\frac{5}{2}} - 4u^{\frac{3}{2}} + 4u^{\frac{1}{2}}\, du$

$= \int u^{\frac{5}{2}}\, du\ - 4\int u^{\frac{3}{2}}\, du\ + 4\int u^{\frac{1}{2}}\, du$

$=\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}}-\frac{8}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{8}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$

$=\frac{2}{7}(3+s)^{\frac{7}{2}}-\frac{8}{5}(3+s)^{\frac{5}{2}}+\frac{8}{3}(3+s)^{\frac{3}{2}}+C$

17) $\frac{\int (r^{\frac{1}{3}}+2)^{4}}{r^{\frac{2}{3}}}dr$

$u=r^{\frac{1}{3}}\,;\ r=u^3\,;dr=3u^2du$

$=\int\frac{(u+2)^4}{u^2(3u^2)}du$

$=3\int(u+2)^4du$

$=\frac{3}{5}(u+2)^5+C$

$=\frac{3}{5}\left(r^{\frac{1}{3}}+2\right)^5+C$

18) $\int\frac{x^3}{(x+4)^{\frac{3}{2}}}dx$

$u=x^2+4\,;du=2x\,dx$

$=\frac{1}{2}\int\frac{(u-4)}{u^{\frac{3}{2}}}du$

$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{u}}-\frac{4}{u^{\frac{3}{2}}}\ du$

$=\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du-\frac{4}{2}\int u^{-\frac{3}{2}}\,du$

$=\frac{2}{2}u^{\frac{1}{2}}-4u^{-\frac{1}{2}}+C$

$=\sqrt{x^2+4}-\frac{4}{\sqrt{x^2+4}}+C$

19) $\int\frac{x^3}{\sqrt{1-2x^2}}$

$u=1-2x\,;du=-4x\,dx$

$=\frac{1}{8}\int\frac{(u-1)}{\sqrt{u}}\ du$

$=\frac{1}{8}\int\sqrt{u}-\frac{1}{\sqrt{u}}\ du$

$=\frac{1}{8}\int u^{\frac{1}{2}}\ du-\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}du$

$=\frac{1}{8}\left(\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\right)-\frac{1}{8}2u^{\frac{1}{2}}+C$

$=\frac{1}{12}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}\sqrt{1-2x^2}+C$

20) $\int senx\ sen(cosx)dx$

$u=\cos x\,;du=-sen\ x\ dx$

$=-\int senu\ du$

$=\cos u+C$

$=\cos(cosx)+C$