



CALCULO II MODULO 4

FORMA INDETERMINADA 0/0

Definición de la forma indeterminada 0/0

Si f y g son dos funciones tales que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

entonces $f(x)/g(x)$ tiene la forma indeterminada 0/0 en a .

Teorema Regla de L'Hôpital

Sean f y g dos funciones diferenciables en un intervalo abierto I , excepto posiblemente en el número a de I . Suponga que para toda x de I , $x \neq a$ y que $g'(x) \neq 0$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0, \text{ y}$$

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

El teorema también es válido si todos los límites son límites laterales por la derecha o límites laterales por la izquierda.

EJEMPLO 1 Sea

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

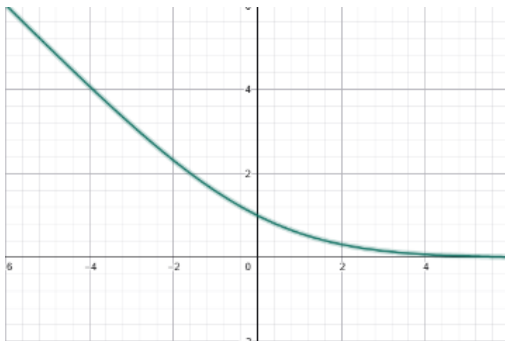
- (a) Trace la gráfica de f . ¿A qué valor parece que se aproxima $f(x)$ cuando x tiende a 0?
- (b) Confirme analíticamente la respuesta del inciso (a) calculando el $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Solución

- (a) La figura 3 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-3,3]$ por $[-1,3]$. Como $f(0)$ no existe, la gráfica tiene un agujero (cubierto por el eje y) en $x = 0$. De la gráfica, parece que $f(x)$ se aproxima a 1 conforme x tiende a 0.
- (b) Como el $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0$, se puede aplicar la regla de L'Hôpital, obteniéndose

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} = 1$$

lo cual confirma la respuesta del inciso (a).



$[-3,3]$ por $[-1,3]$

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

FIGURA 3



EJEMPLO 2 Sea

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{1 - x + \ln x}$$

Evalúe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, si existe, y apoye gráficamente la respuesta.

Solución Primero se revisará si es posible aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 3x + 2) &= 1 - 3 + 2 & \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x + \ln x) &= 1 - 1 + 0 \\ &= 0 & &= 0 \end{aligned}$$

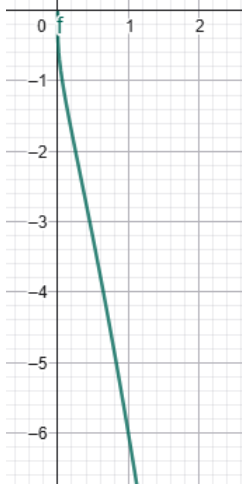
Por tanto, se aplica la regla:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{1 - x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{-1 + \frac{1}{x}}$$

Ahora, como $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 3) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 1} (-1 + 1/x) = 0$, se aplica otra vez la regla de L'Hôpital, obteniéndose

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{-1 + \frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{6}{-1} \\ &= -6 \end{aligned}$$

La figura 4 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[0,4.7]$ por $[-10,1]$. La gráfica tiene un agujero en $(1, -6)$, lo cual apoya la respuesta.



[0,4.7] por [-10,1]

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{1 - x + \ln x}$$

FIGURA 4



Teorema Regla de L'Hôpital

Sean f y g dos funciones diferenciables para toda $x > N$, donde N es una constante positiva, y suponga que para toda $x > N$; $g'(x) \neq 0$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, y

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

El teorema también es válido si $x \rightarrow +\infty$ se sustituye por $x \rightarrow -\infty$.

EJEMPLO 3 Evalúe el límite si existe.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\tan \frac{2}{x}}$$

Solución $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$. De modo que por la regla de L'Hôpital se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\tan \frac{2}{x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\left(\sec^2 \frac{2}{x}\right) \left(-\frac{2}{x^2}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sec^2 \frac{2}{x}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Demuestre que, si se elimina la discontinuidad en 0 del ejemplo 1, la función que resulta será diferenciable en 0.

Solución La función del ejemplo I está definida por

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

y ahí se mostró que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Se elimina la discontinuidad definiendo la función de modo que sea 1 en 0. Si F es esta nueva función,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

A fin de demostrar que F es diferenciable en 0, se calcula $F'(0)$.

$$\begin{aligned} F'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{e^x - 1} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - e^x + 1}{xe^x - 1} \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} (x - e^x + 1) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} (xe^x - 1) = 0$, se aplica la regla de L'Hôpital y se tiene

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{e^x + xe^x - 1}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + xe^x - 1) = 0$, se aplica otra vez la regla de L'Hôpital y se obtiene

$$\begin{aligned} F'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{e^x + e^x + xe^x} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, se ha demostrado que F es diferenciable en 0.



Problemas

En los ejercicios 1 a 10, haga lo siguiente: (a) trace la gráfica de f en la graficadora y determine a qué valor parece que se aproxima $f(x)$ cuando x tiene a ; (b) confirme analíticamente la respuesta del inciso (a) calculando $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

$$1. f(x) = \frac{x}{\tan x} \quad a = 0$$

$$2. f(x) = \frac{\tan x - x}{x - \operatorname{sen} x} \quad a = 0$$

$$3. f(x) = \frac{\operatorname{sen} \pi x}{2 - x} \quad a = 2$$

$$4. f(x) = \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x} \quad a = 0$$

$$5. f(x) = \frac{2^x - 3^x}{x} \quad a = 0$$

$$6. f(x) = \frac{\tanh 2x}{\tanh x} \quad a = 0$$

$$7. f(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x^2} \quad a = 0$$

$$8. f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 3x - 4} \quad a = 1$$

$$9. f(x) = \frac{x^3 + 8}{x^3 + x^2 + 4} \quad a = -2$$

$$10. f(x) = \frac{3 \cos x}{2x - \pi} \quad a = \pi/2$$

En los ejercicios 11 a 16, calcule el límite, si existe, y apoye gráficamente la respuesta.

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\tan 2x}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{1}}{x}$$

$$14. \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta - \operatorname{sen} \theta}{\tan^3 \theta}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{(\pi - 2x)^2}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x \operatorname{sen} x}$$



En los ejercicios 17 a 28, evalúe el límite si existe.

$$17. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-2\sqrt{x-1}-1}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2-1}}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$19. \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1-e^{1/z}}{-\frac{3}{z}}$$

$$20. \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{1-\cosh y}$$

$$21. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sent}}{\ln(2e^t-1)}$$

$$22. \lim_{z \rightarrow 0} \frac{5z}{5^z - e^z}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/5} - (1-x)^{1/5}}{(1+x)^{1/3} - (1-x)^{1/3}}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 2 \tan^{-1} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 2x}{1 - \operatorname{sen} x}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 10^x}{x}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cosh x}{x^2}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} hx - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$$

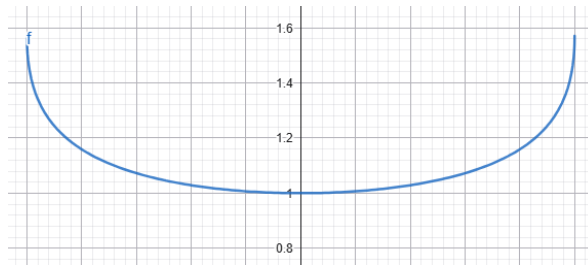
Solucionario

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sec^2 x} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\cos^3 x} = 2$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{2-x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \cos \pi x}{-1} = -\pi \approx -3.142$$

$$4. f(x) = \frac{\sin^{-1} x}{x}; a = 0$$



(a) From the plot at the right, the limit appears to be 1.

(b) Because $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^{-1} x = 0$ and $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, L'Hopital's rule applies.

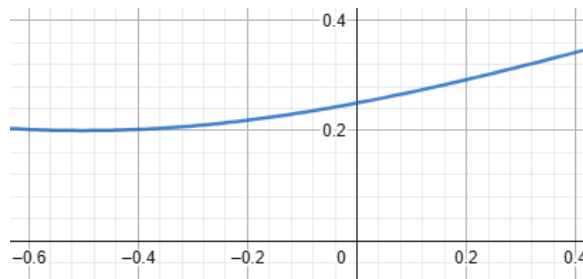
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/\sqrt{1-x^2}}{1} = 1$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \ln 2 - 3^x \ln 3}{1} = \ln 2 - \ln 3 = \ln \frac{2}{3} \approx -0.405$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh 2x}{\tanh x} \stackrel{0/0}{=} \frac{2\operatorname{sech}^2 2x}{\operatorname{sech}^2 x} = 2$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{x^2}{\sin x^2} = 1^2 \cdot 1 = 1$$

$$8. f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 3x - 4}; a = 1$$



- (a) From the plot of $f(x)$ at the right, the limit appears to be 0.5.
 (b) Because $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 1) = 0$ and $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 3x - 4) = 0$, L'Hôpital's rule applies.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 3x - 4} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{3x^2 + 3} = \frac{1}{2}$$

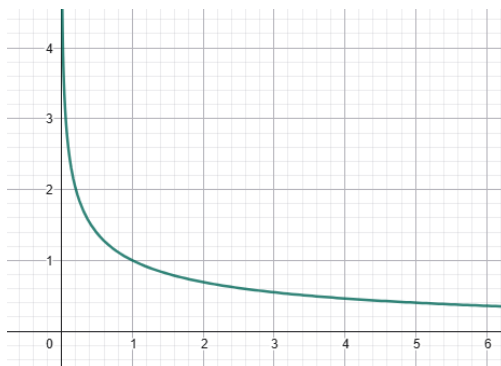
$$9. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^3 + x^2 + 4} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2}{3x^2 + 2x} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \cos x}{2x - \pi} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-3 \sin x}{2} = -\frac{3}{2}$$

In Exercises 11-16, find the limit if it exists, and support your answer graphically

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\tan 2x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sec^2 3x}{2 \sec^2 2x} = \frac{3}{2}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$$



Because $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$ and $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$, L'Hopital's rule applies.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{1} = 1$$

The plot at the right of $\ln x/(x-1)$ supports this limit.

13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{2}{x} = 0$ and $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. By L'Hôpital's rule

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{2}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos \frac{2}{x} \left(\frac{2}{x^2} \right)}{\frac{1}{x^2}} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{2}{x} = 2$$

14. $\lim_{\theta \rightarrow 0} (\theta - \sin \theta) = 0$ and $\lim_{\theta \rightarrow 0} \tan^3 \theta = 0$. By L'Hôpital's rule

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta - \sin \theta}{\tan^3 \theta} &\stackrel{0/0}{=} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{3 \tan^2 \theta \sec^2 \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\sec^2 \theta} \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{3 \tan^2 \theta} \stackrel{0/0}{=} 1 \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{6 \tan \theta \sec^2 \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos^3 \theta}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

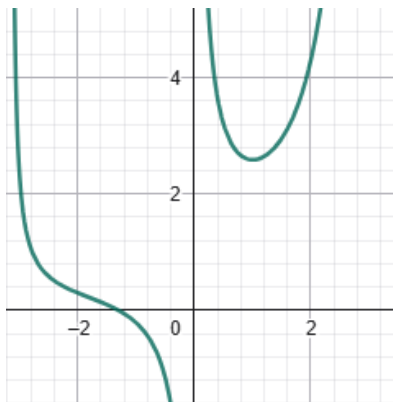
Because $\lim_{\theta \rightarrow 0} (1 - \cos \theta) = 0$ and $\lim_{\theta \rightarrow 0} (3 \tan^2 \theta) = 0$, we applied L'Hôpital's rule again.

15. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \ln (\sin x) = 0$ and $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi - 2x)^2 = 0$. By L'Hôpital's rule

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln (\sin x)}{(\pi - 2x)^2} &\stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-4(\pi - 2x)} \\ &= -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cot x}{\pi - 2x} \stackrel{0/0}{=} -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-\csc^2 x}{-2} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

Because $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cot x = 0$ and $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi - 2x) = 0$, we applied L'Hôpital's rule again.

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x \sin x}$$



Because $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - \cos x) = 0$ and $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin x = 0$, we apply L'Hopital's rule. Thus,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{x \cos x + \sin x}$$

We have $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + \sin x) = 1$ and $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cos x + \sin x) = 0$. Because $x \cos x + \sin x$ approaches zero through positive values as $x \rightarrow 0^+$, we have

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - \cos x}{x \sin x} = +\infty$$

Because $x \cos x + \sin x$ approaches zero through negative values as $x \rightarrow 0^-$, then

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - \cos x}{x \sin x} = -\infty$$

Therefore, the given limit does not exist. This is supported by the plot. In Exercises 17-28, evaluate the limit if it exists.

$$17. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1-2\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}-2} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2} - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4xe^{2x^2}}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2}}{\cos x} = 2 \cdot 1 = 2$$



19. $\lim_{z \rightarrow +\infty} (1 - e^{1/z}) = 0$ and $\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{-3}{z} = 0$. By L'Hôpital's rule

$$L = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{1/z}}{-\frac{3}{z}} \stackrel{0/0}{=} \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{-e^{1/z} \left(\frac{-1}{z^2}\right)}{\frac{3}{z^2}} = \frac{1}{3} \lim_{z \rightarrow 0} e^{1/z} = \frac{1}{3}$$

Alternatively, let $x = \frac{1}{z}$. Then $L = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^x}{-3x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{-e^x}{-3} = \frac{1}{3}$.

$$20. \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{1 - \cosh y}$$

The hypothesis of L'Hôpital's rule is satisfied. Thus, two applications of the rule yield

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{1 - \cosh y} \stackrel{0/0}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y}{-\sinh y} \stackrel{0/0}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{-\cosh y} = -2$$

21. $\lim_{t \rightarrow 0} \sin t = 0$ and $\lim_{t \rightarrow 0} \ln(2e^t - 1) = 0$. By L'Hôpital's rule $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\ln(2e^t - 1)} =$
 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{\frac{2e^t}{2e^t - 1}} = \frac{1}{2}$.

$$22. \lim_{z \rightarrow 0} \frac{5z}{5^z - e^z} \stackrel{0/0}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{5}{5^z \ln 5 - e^z} = \frac{5}{\ln 5 - 1}$$

23. $\lim_{x \rightarrow 0} [(1+x)^{1/5} - (1-x)^{1/5}] = 0$ and $\lim_{x \rightarrow 0} [(1+x)^{1/3} - (1-x)^{1/3}] =$
0. By L'Hôpital's rule

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/5} - (1-x)^{1/5}}{(1+x)^{1/3} - (1-x)^{1/3}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{5}(1+x)^{-4/5} + \frac{1}{5}(1-x)^{-4/5}}{\frac{1}{3}(1+x)^{-2/3} + \frac{1}{3}(1-x)^{-2/3}} = \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$



$$24. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 2 \tan^{-1} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

We simplify by substituting $u = \frac{1}{x}$ before applying L'Hopital's rule. Thus,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 2 \tan^{-1} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{u^2 - 2 \tan^{-1} u}{u} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2u - \frac{2}{1+u^2}}{1} = -2$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 2x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \cos 2\pi}{1 - \sin \pi} = \frac{1+1}{1-0} = 2$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 10^x}{x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 10^x \ln 10}{1} = 1 - \ln 10$$

27. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - \cosh x) = 0$ and $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$. By L'Hôpital's rule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cosh x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - \sinh x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x - \cosh x}{2} = -1$$

Because $\lim_{x \rightarrow 0} (-\sin x - \sinh z) = 0$ and $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$, we applied L'Hôpital's rule again.

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - \sin x}{\sin^3 x}$$

Before applying L'Hôpital's rule the second and third time, we remove $\cos x$, which has a nonzero limit.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - \sin x}{\sin^3 x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{3 \sin^2 x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{3 \sin^2 x}$$

$$\stackrel{0/0}{=} 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x + \sin x}{6 \sin x \cos x} \stackrel{0}{=} 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x + \cos x}{6 \cos x} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



OTRAS FORMAS INDETERMINADAS

Teorema Regla de L'Hopital

Sean f y g funciones diferenciables en el intervalo abierto I , excepto posiblemente en el número a de I , y suponga que para toda $x \neq a$

En I , $g'(x) \neq 0$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ es igual a $a + \infty$ o $-\infty$, y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ es igual a $a + \infty$ o $-\infty$,

y

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

El teorema también es válido si todos los límites son límites por la derecha o límites por la izquierda.

EJEMPLO 1

$$\text{Sea: } f(x) = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

(a) Trace la gráfica de f . ¿A qué valor parece que se aproxima $f(x)$ cuando x tiende a 0 por la derecha? (b) Confirme analíticamente la respuesta del inciso (a) calculando el $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

Solución

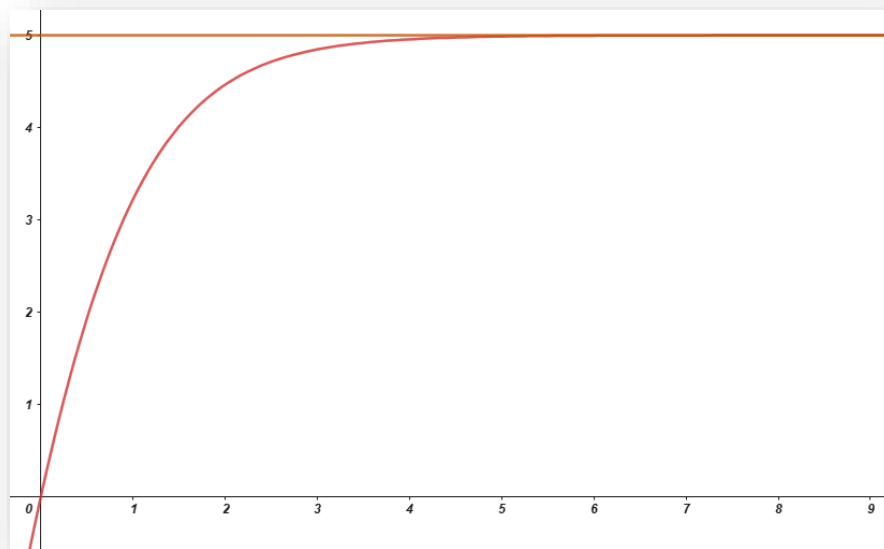
(a) La figura 3 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[0,3]$ por $[-1,1]$. En la gráfica, parece que $f(x)$ se aproxima a 0 cuando x tiende a 0 por la derecha.

(b) Como el $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/x) = +\infty$, se puede aplicar la regla de L'Hôpital, obteniéndose

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \text{ lo cual confirma la respuesta del inciso (a).}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{\ln(2+e^x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{\frac{1}{2+e^x}(e^x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (10 + 5e^x)e^{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (10e^{-x} + 5) \\ &= 5 \end{aligned}$$

La figura 2 muestra las gráficas de la recta $y = 5$ y de la función $f(x) = 5x/\ln(2 + e^x)$ trazada en el rectángulo de inspección de $[0,9]$ por $[0,6]$. Se ha apoyado la respuesta ya que la recta parece ser una asíntota horizontal de la gráfica de f .



$$f(x) = \frac{5x}{\ln(2+e^x)} \text{ y } y = 5$$

FIGURA 2

EJEMPLO

Evalúe, si existe, $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\sec x}{\sec 3x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\cos 3x}{\cos x}$

Solución

Como $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \sec x = +\infty$, y $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \sec 3x = -\infty$, de la regla de L'Hôpital se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\sec x}{\sec 3x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\sec x \tan x}{3 \sec 3x \tan 3x}$$

Observe que $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \sec x \tan x = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} 3 \sec 3x \tan 3x = -\infty$, y que aplicar otra vez la regla de L'Hôpital no será útil. Sin embargo, el cociente original puede escribirse como

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\sec x}{\sec 3x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\cos 3x}{\cos x}$$

Ahora, como $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \cos 3x = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \cos x = 0$, se puede aplicar la regla de L'Hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\cos 3x}{\cos x} &= \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{-3 \operatorname{sen} 3x}{-\operatorname{sen} x} \\ &= -3. \end{aligned}$$

EJEMPLO

4

Evalúe, si existe, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen}^{-1} x \operatorname{csc} x$

Solución

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen}^{-1} x = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{csc} x$ la función definida por $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x \operatorname{csc} x$ tiene la forma indeterminada $0 \cdot (+\infty)$ en 0.

Antes de aplicar la regla de L'Hôpital se expresa $\operatorname{sen}^{-1} x \operatorname{csc} x$ como $\frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\operatorname{sen} x}$, y se considera

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\operatorname{sen} x}$. Ahora $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen}^{-1} x = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-3 \operatorname{sen} 3x}{-3 \operatorname{sen} x}$; de modo que se tiene la forma indeterminada 0/0. Por tanto, de la regla de L'Hôpital se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\operatorname{sen} x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{1}{\cos x}} \\ &= 1/1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

EJEMPLO 5

$$\text{Sea, } f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x}$$

- (a) Trace la gráfica de f . ¿A qué valor parece que se aproxima $f(x)$ cuando x tiende a 0?
(b) Confirme analíticamente la respuesta del inciso (a) calculando el $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Solución

(a) La figura 3 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-3, 3]$ por $[1, 3]$. La gráfica tiene un agujero (cubierto por el eje y) en $x = 0$ debido a que $f(0)$ no existe. En la gráfica, parece que $f(x)$ se aproxima a **0.5** cuando x tiende a 0.

(b) Como

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 \sec x} = +\infty$$

se tiene la forma indeterminada $+\infty - (+\infty)$. Al reescribir la expresión se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \end{aligned}$$

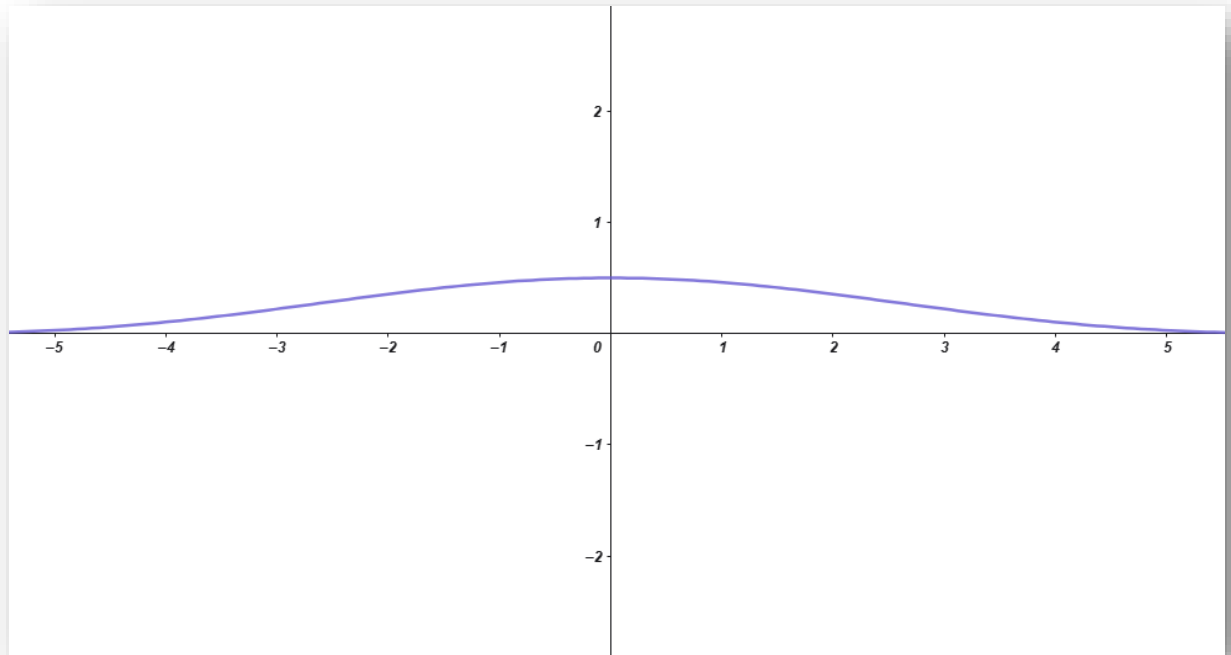
Como $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \cos x = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, se aplica la regla de L'Hôpital y se

$$\text{obtiene } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$$

Si se aplica la regla de L'Hôpital una vez más, ya que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} \\ &= 1/2. \end{aligned}$$

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x} \right) = 1/2$, lo cual confirma la respuesta del inciso (a).



$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x}$$

FIGURA 3

EJEMPLO

Evalúe, si existe,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1)^{\cot x} \quad 6$$

Apoye gráficamente la respuesta.

Solución

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x = +\infty$, se tiene la forma indeterminada $1^{+\infty}$. Sea

$$y = (x + 1)^{\cot x}$$

Entonces

$$\ln y = \cot x \ln(x + 1) = \frac{\ln(x + 1)}{\tan x}$$

De modo que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x + 1)}{\tan x}$$



Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x+1) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x = 0$, puede aplicarse la regla de L'Hôpital al miembro derecho de (2), obteniéndose

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{\sec^2 x} = 1$$

Por tanto, al sustituir 1 en el miembro derecho de (2) se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = 1$$

Debido a que la función exponencial es continua en todo su dominio, el cual es el conjunto de los números reales, se puede aplicar el teorema 1.9.1; de modo que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp(\ln y) = \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y\right)$$

Entonces, se deduce de (3) y de esta ecuación que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^1$$

Pero de (1), $y = (x+1)^{\cot x}$, y en consecuencia,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)^{\cot x} = e$$

La figura 4, que muestra la gráfica de $f(x) = (x+1)^{\cot x}$ trazada en el rectángulo de inspección de $[0, 3]$ por $[0, 5]$, apoya la respuesta.



PROBLEMAS

En los ejercicios 1 a 8, haga lo siguiente:

(a) estime el límite, si existe, trazando la gráfica de la función en un rectángulo de inspección adecuado;

(b) confirme analíticamente la respuesta del inciso (a) calculando el límite.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^3}{x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \ln x$

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan^{-1} x \cot x$

5. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln x}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$

8. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{5}{x^2+x-6} - \frac{1}{x-2} \right)$

En los ejercicios 9 a 16, calcule el límite, si existe, y apoye gráficamente la respuesta.

9. $\lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{\ln x}{x}$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{\ln(x+100)}{\ln x}$

11. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \csc x$

12. $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} (2x-1) \tan(\pi x)$

13. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 2})$

14. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$



15. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{1/x}$

16. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/\ln x}$

En los ejercicios 17 a 34, calcule el límite si existe.

17. $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{\ln(1-2x)}{\tan(\pi x)}$

18. $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(\tan x)}$

19. $\lim_{x \rightarrow \infty^+} (e^x + x)^{2/x}$

20. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sinh x)^{\tan x}$

21. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{x^2}$

22. $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^{2x})^{1/x}$

23. $\lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{x^2 + 2x}{e^{3x} - 1}$

24. $\lim_{x \rightarrow \infty^+} (1 + \frac{1}{2x})^{x^2}$

25. $\lim_{x \rightarrow \infty^+} (1 + \sinh x)^{2/x}$

26. $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) \tan(\frac{\pi x}{4})$

27. $\lim_{x \rightarrow 0} [(\cos x) e^{-x^2/2}]^{4/x^4}$

28. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$

29. $\lim_{x \rightarrow \infty} [(x^6 + 3x^5 + 4)^{1/6} - x]$

30. $\lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{\ln(x + e^x)}{3x}$

31. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$

32. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^2}$

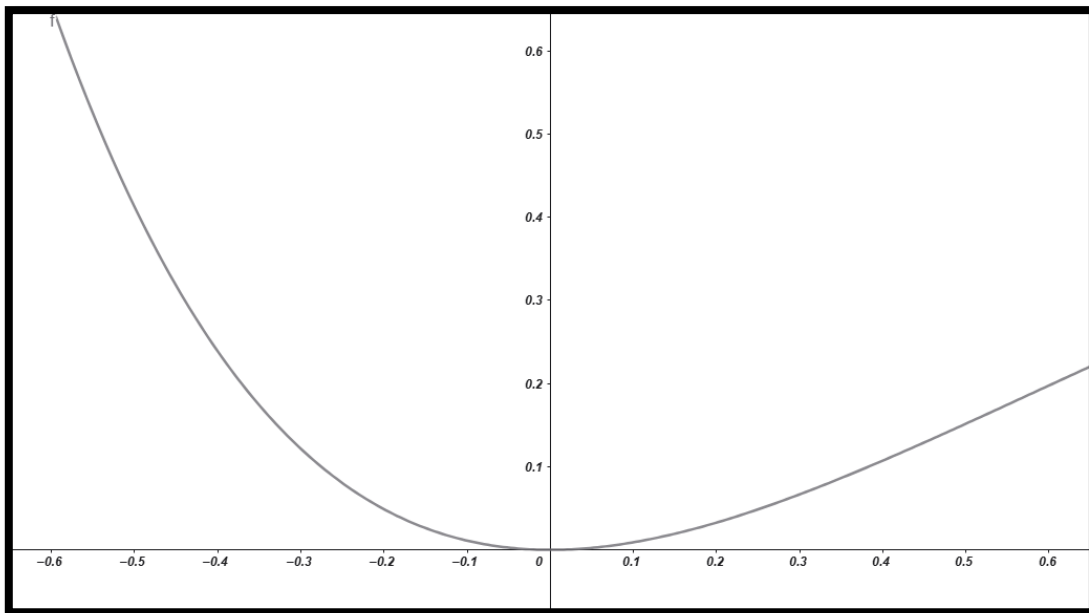


33. $\lim_{x \rightarrow \infty+} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

34. $\lim_{x \rightarrow \infty+} (x - \sqrt{x^2 - x})$

SOLUCIONARIO

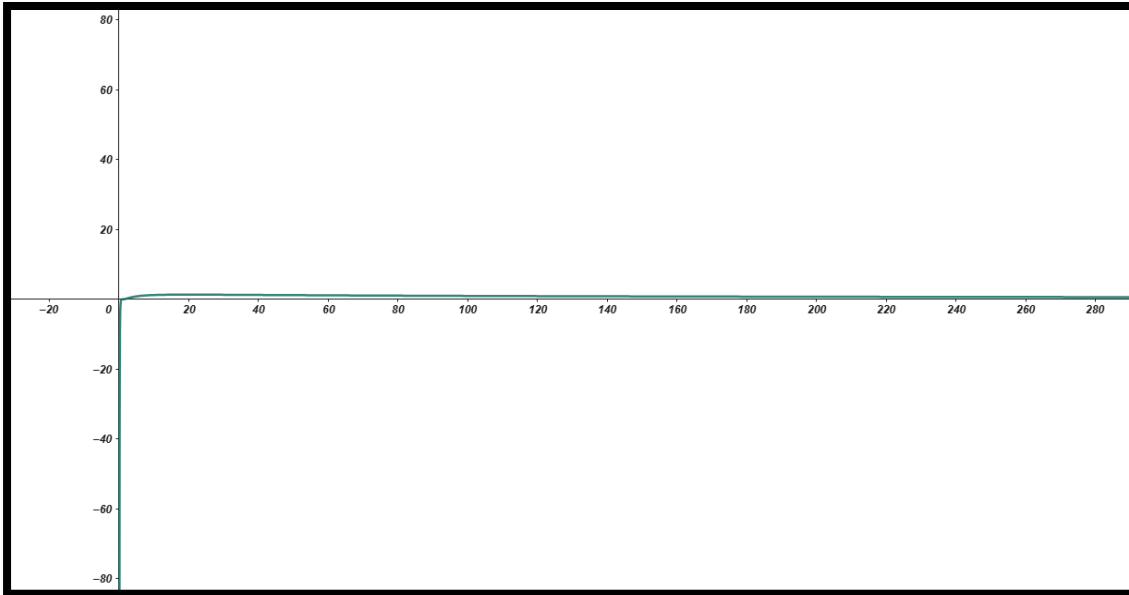
1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$



$\frac{x^2}{e^x} = \text{aplicamos L'Hôpital} \dots \frac{2x}{e^x} = \text{aplicamos L'Hôpital} \dots$

$\frac{2}{e^x} \rightarrow 0$

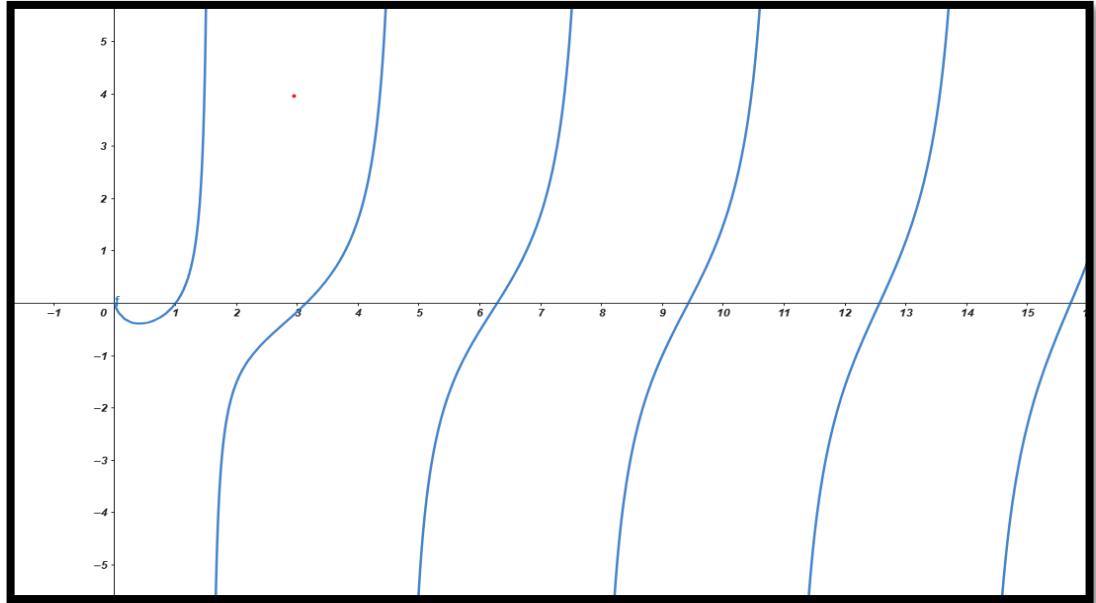
$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^3}{x}$$



$$\frac{(\ln x)^3}{x} = 3 \frac{(\ln x)^2}{x} = L'Hôpital \dots 6 \frac{\ln x}{x} = L'Hôpital \dots$$

$$6 \frac{1/x}{1} = \frac{6}{x} \rightarrow 0$$

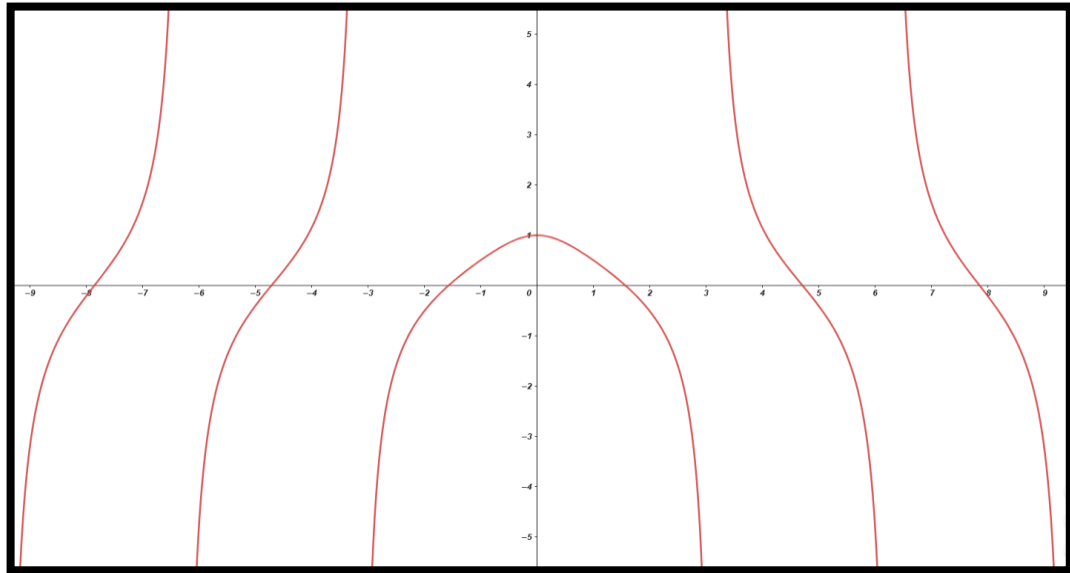
3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \ln x$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} = \text{aplicamos L'Hôpital} \dots \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\sin^2 x}{x} \right) = 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan^{-1} x \cot x$$

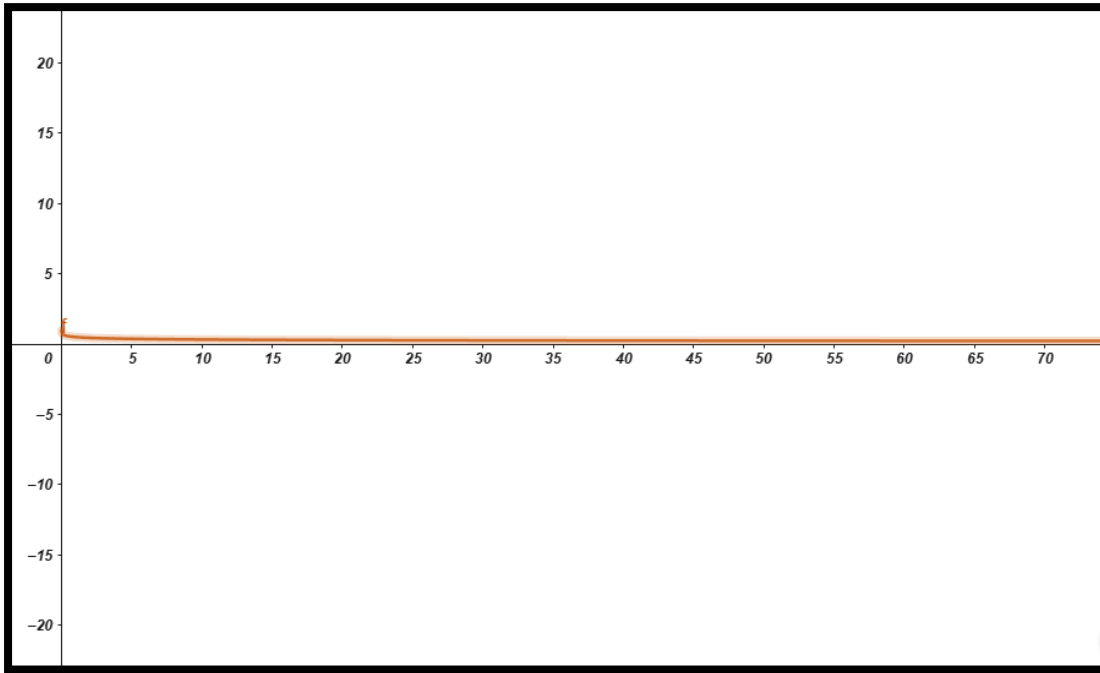


$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x}{\tan x} =$$

aplicamos L'Hôpital ...

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^2 x}{1 + x^2} = 1$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$$



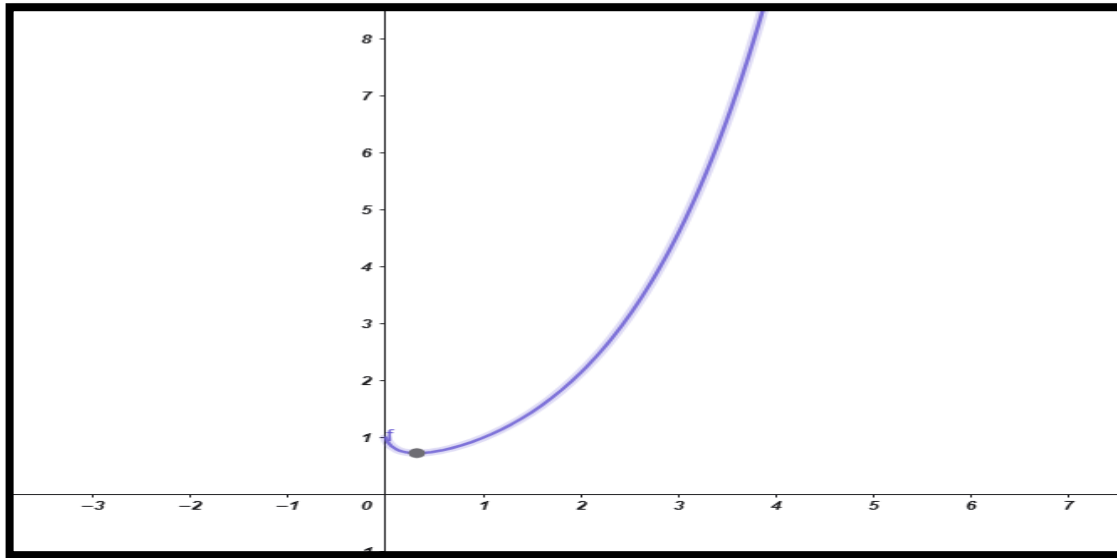
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) - \ln x}{(x-1) \ln x} =$$

aplicamos L'Hôpital ... $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} =$

aplicamos L'Hôpital....

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

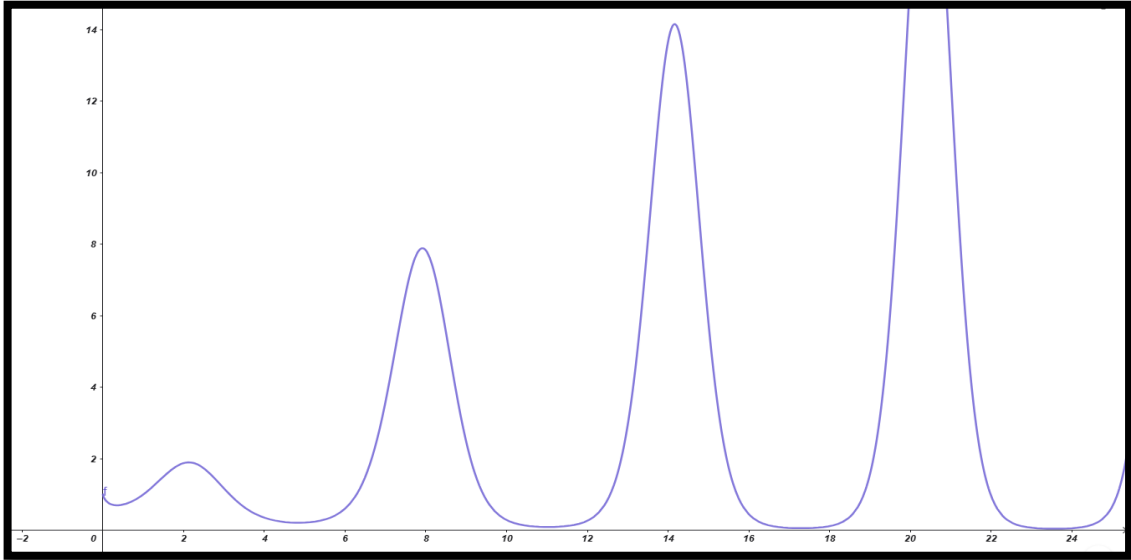
$$6) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln x}$$



$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln x}, \ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \ln(1+x)$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x \right) = 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow L = e^0 = 1$$

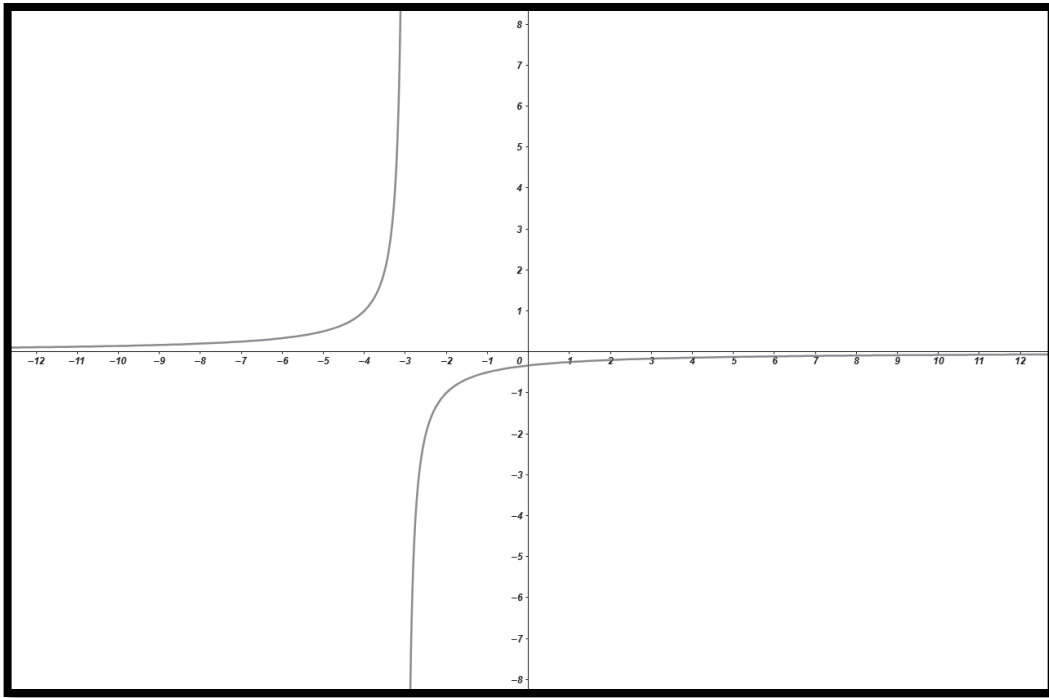
7) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$



$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}, \ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln x = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x \right) = 1 \cdot 0$$

$$= 0 \Rightarrow L = e^0 = \mathbf{1}$$

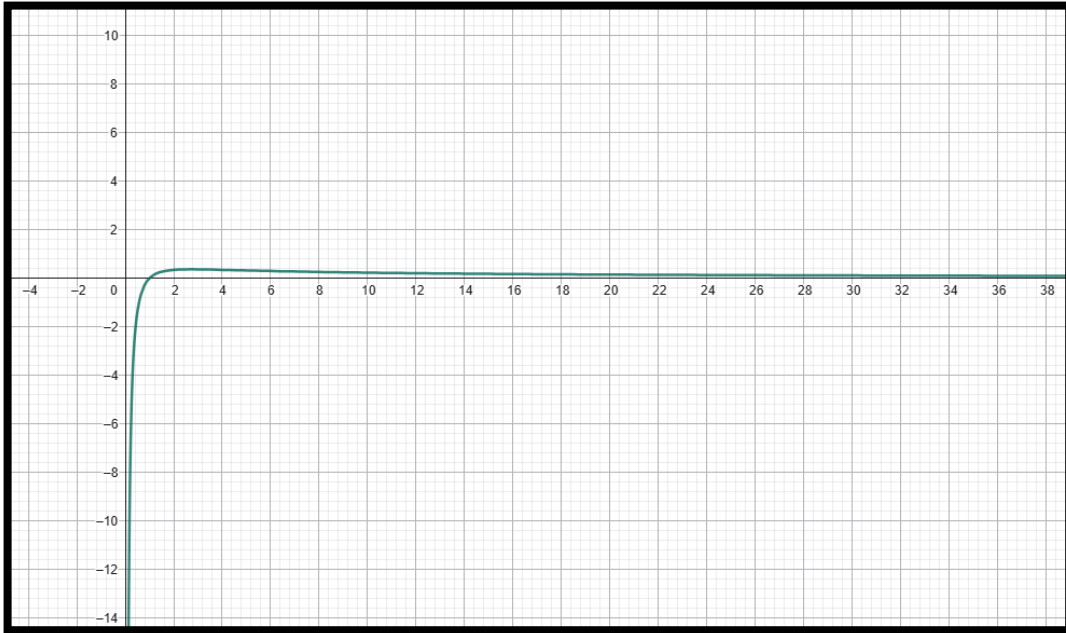
$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{5}{x^2+x-6} - \frac{1}{x-2} \right)$$



$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3), \quad \frac{5}{(x - 2)(x + 3)} - \frac{1}{x - 2} = \frac{5 - (x + 3)}{(x - 2)(x + 3)}$$

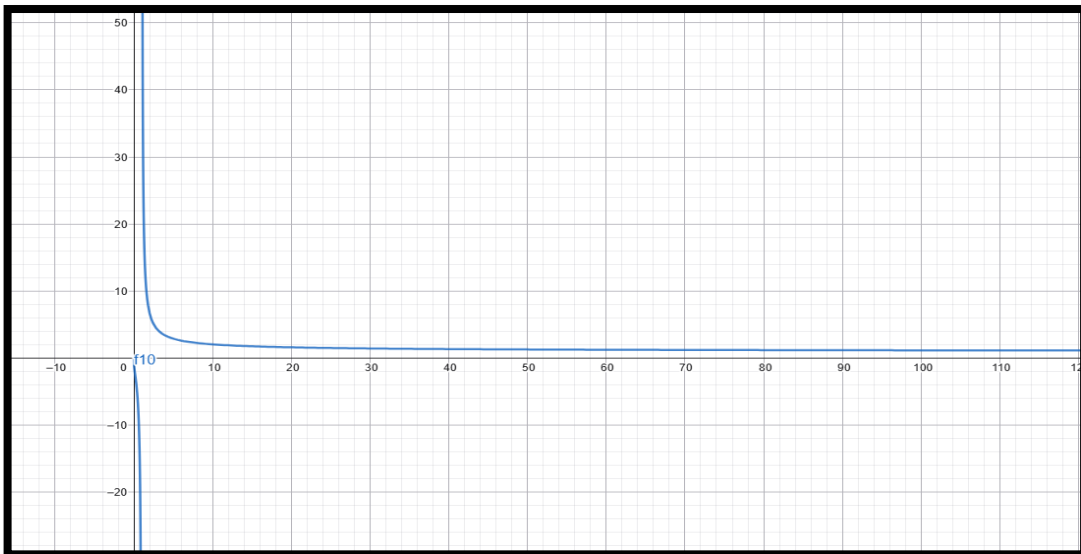
$$= -\frac{1}{x + 3} \Rightarrow -\frac{1}{5}$$

9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \text{aplicamos L'Hôpital} \dots \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

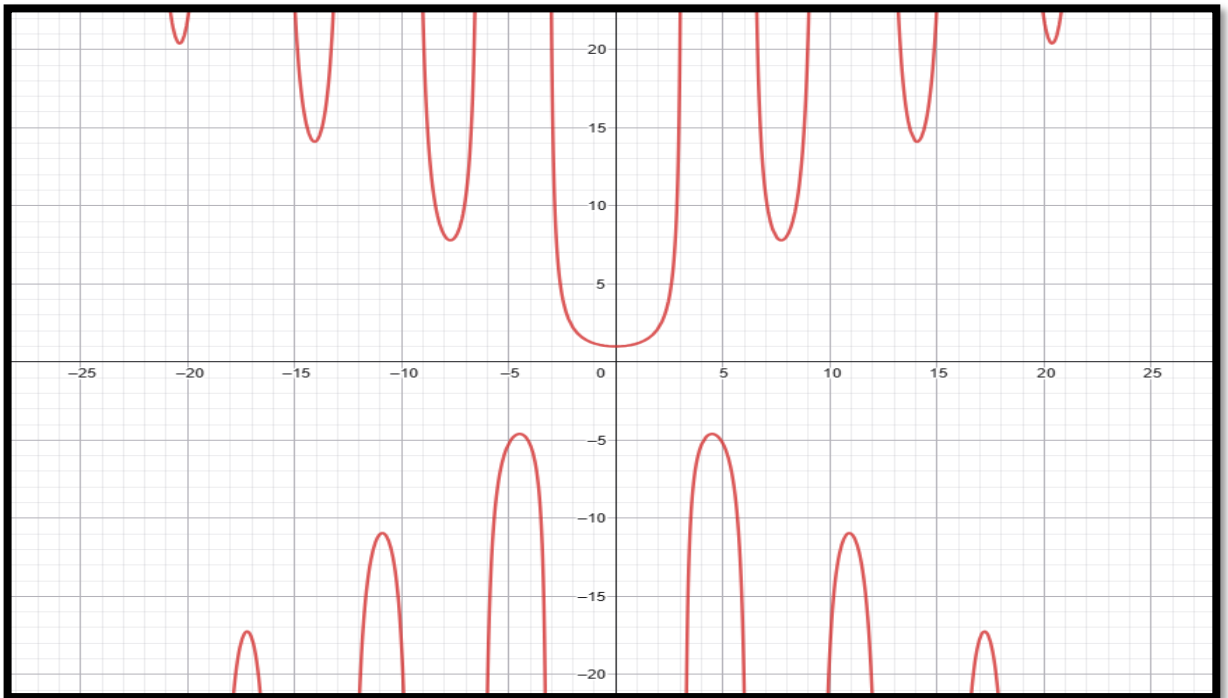
10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+100)}{\ln x}$



$$\frac{\ln(x+100)}{\ln x} = \frac{\ln x + \ln\left(1 + \frac{100}{x}\right)}{\ln x} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{100}{x}\right)}{\ln x} \rightarrow 1 + 0$$

=1

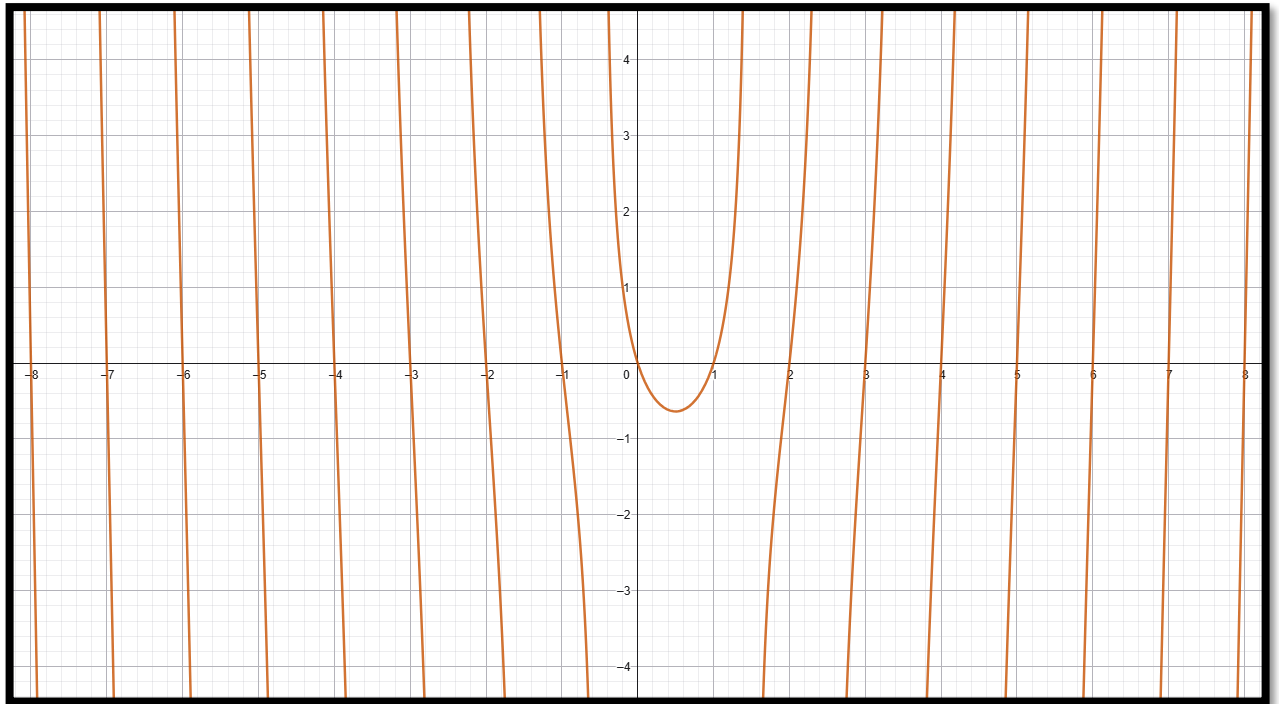
11) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \csc x$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}} = \text{aplicamos L'Hôpital} \dots \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{1}} = \frac{1}{1}$$

=1

$$12) \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} (2x - 1) \tan(\pi x)$$



$$(2x - 1) \tan(\pi x) = \frac{\tan(\pi x)}{\frac{1}{2x - 1}}$$

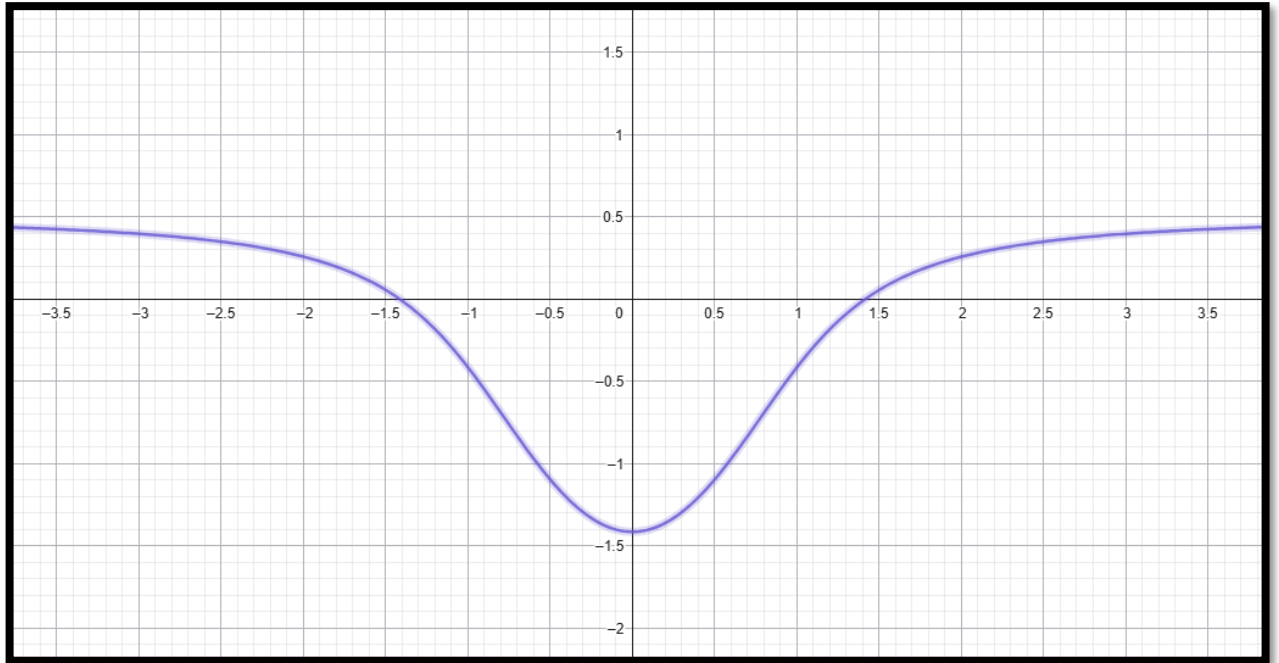
$$= \text{aplicamos L'Hôpital} \dots \lim_{x \rightarrow (1/2)^+} \frac{\pi \sec^2(\pi x)}{-\frac{2}{(2x-1)^2}}$$

$$= -\frac{\pi}{2} (2x - 1)^2 \sec^2(\pi x)$$

Cerca de $x = \frac{1}{2}$: $\cos(\pi x) \approx -\sin(\pi(x - \frac{1}{2})) \approx -\pi(x - \frac{1}{2})$.

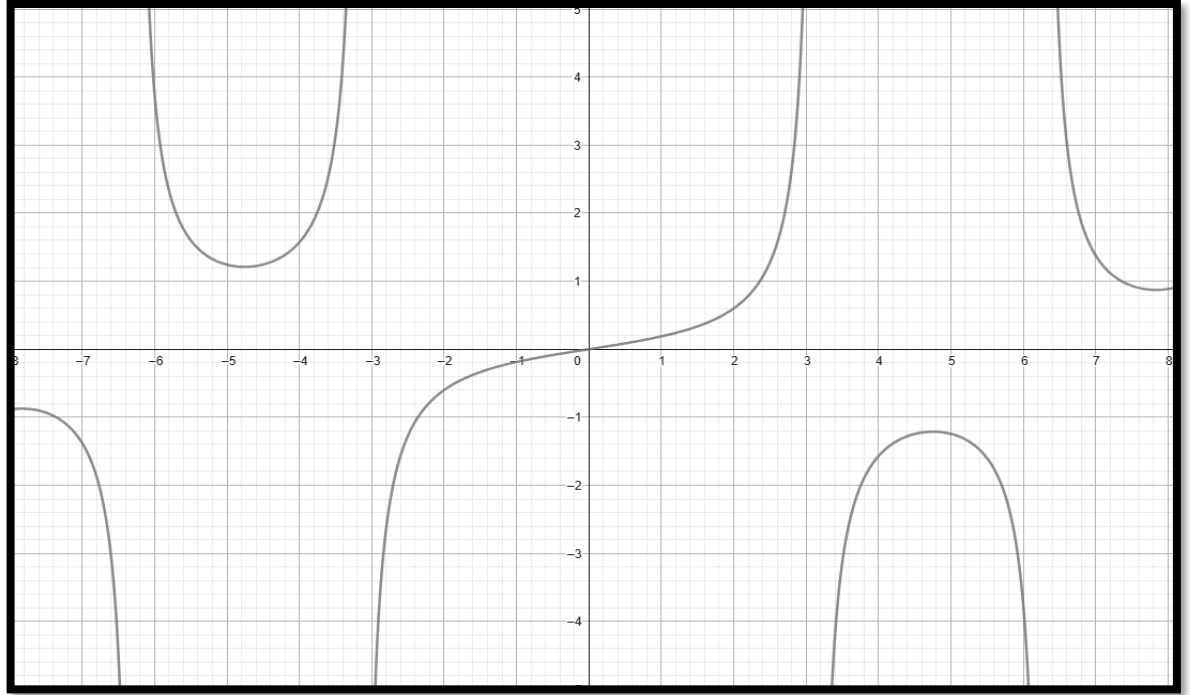
Entonces $(2x - 1)^2 \sec^2(\pi x) \rightarrow \frac{4}{\pi^2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{\pi^2} = -\frac{2}{\pi}$

$$13) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 2})$$



$$\begin{aligned} x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 2} &= \frac{(x^2 - \sqrt{\cdot})(x^2 + \sqrt{\cdot})}{x^2 + \sqrt{\cdot}} = \frac{x^4 - (x^4 - x^2 + 2)}{x^2 + \sqrt{x^4 - x^2 + 2}} \\ &= \frac{x^2 - 2}{x^2 + \sqrt{x^4 - x^2 + 2}} \rightarrow \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

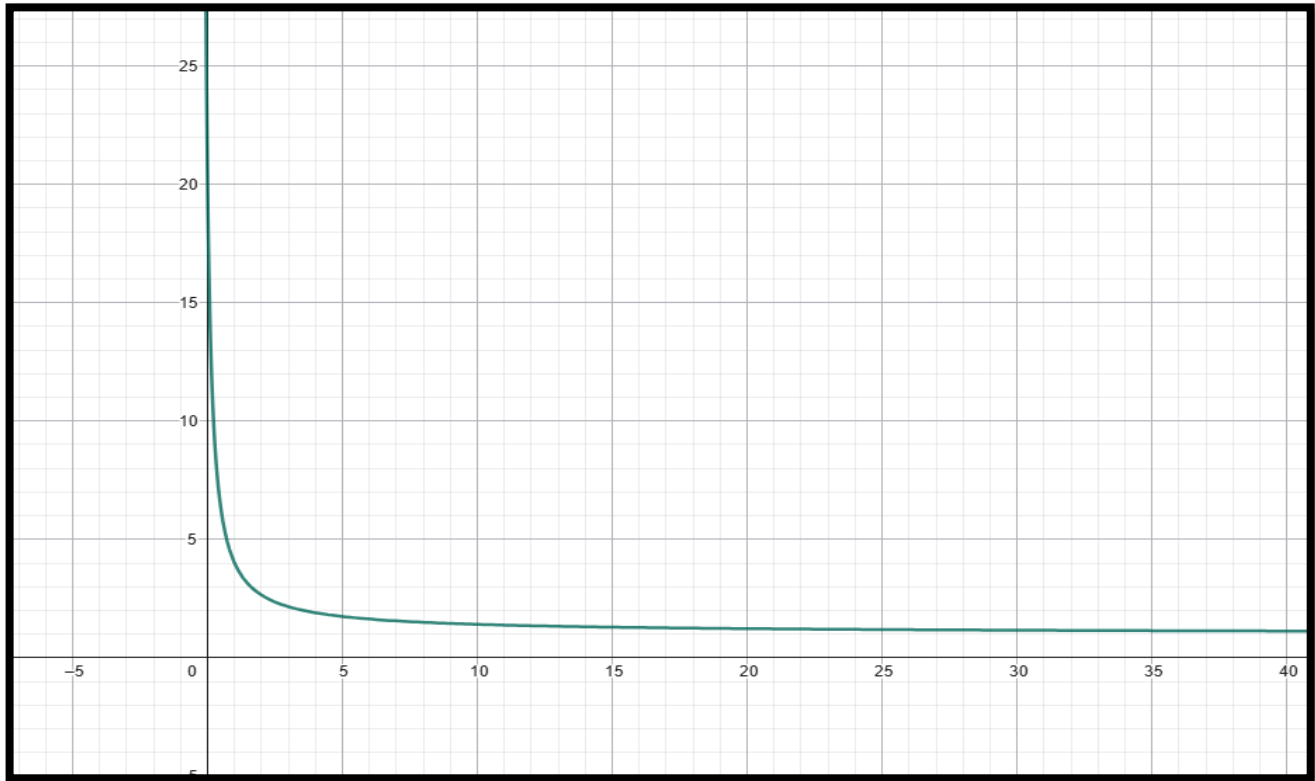


$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \text{aplicamos L'Hôpital ...}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \text{aplicamos L'Hôpital ...}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0$$

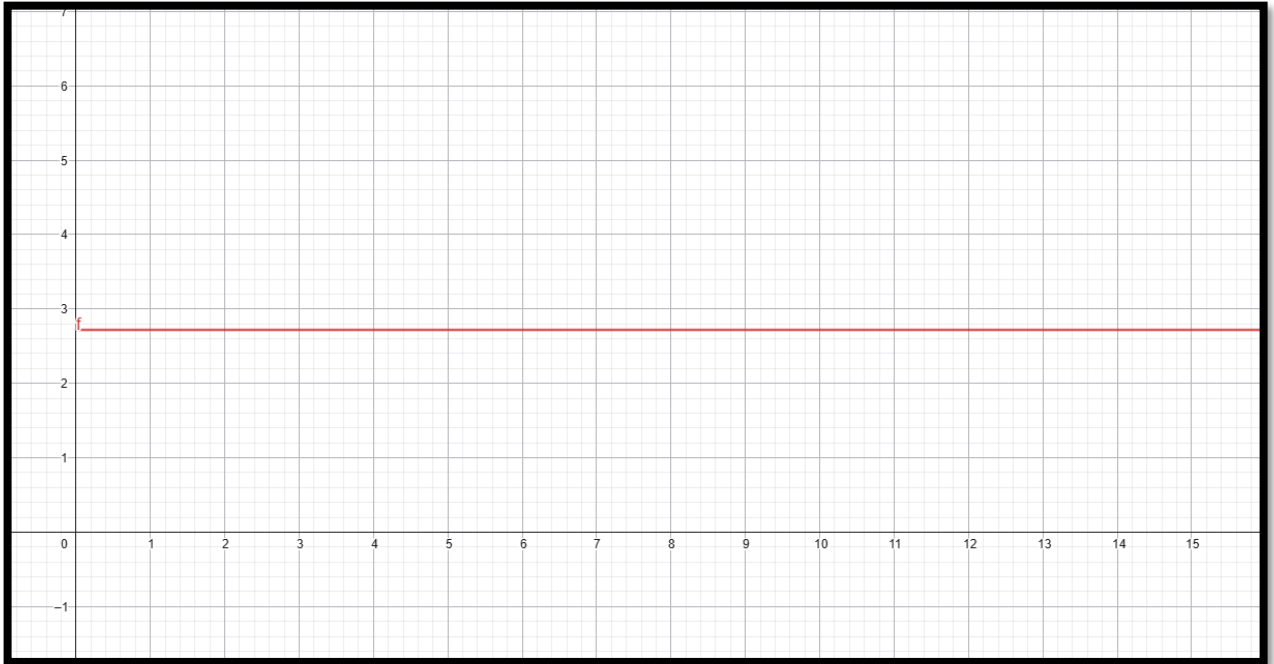
$$15) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{1/x}$$



$$L = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}}, \ln L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{x} = \text{aplicamos L'Hôpital ...}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3/(1 + 3x)}{1} = 3 \Rightarrow L = e^3$$

16) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/\ln x}$



$$\ln \left(x^{\frac{1}{\ln x}} \right) = \frac{1}{\ln x} \ln x = 1 \Rightarrow x^{\frac{1}{\ln x}} = e \quad (x > 0, x \neq 1)$$

17) $\lim_{x \rightarrow (1/2)^-} \frac{\ln(1-2x)}{\tan(\pi x)}$

Sea $t = \frac{1}{2} - x \rightarrow 0^+$. Entonces

$$\frac{\ln(1-2x)}{\tan(\pi x)} = \frac{\ln(2t)}{\cot(\pi t)} = \frac{t \ln(2t)}{t \cot(\pi t)}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t \cot(\pi t) = \frac{1}{\pi}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(2t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(2t)}{\frac{1}{t}} = \text{aplicamos L'Hôpital} \dots \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = 0.$$

$$18) \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(\tan x)}$$

Con $u = \frac{\pi}{2} - x \rightarrow 0^+$: $\cos x = \sin u$, $\tan x = \cot u$.

$$\frac{\ln(\cos x)}{\ln(\tan x)} = \frac{\ln(\sin u)}{\ln(\cot u)} = \frac{\ln u + \ln\left(\frac{\sin u}{u}\right)}{-\ln u + \ln(u \cot u)} \rightarrow \frac{\ln u + 0}{-\ln u + 0} = -1.$$

19)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x)^{2/x}$$

Sea L .

$$\text{Entonces } \ln L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} \ln(e^x + x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} (x + \ln(1 + xe^{-x})) = 2.$$

$$L = e^2.$$

20)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sinh x)^{\tan x}$$

Sea L .

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \ln(\sinh x).$$

$$\ln L = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\sinh x) \right),$$

$$\frac{\tan x}{x} \rightarrow 1$$

$$x \ln(\sinh x) = x(\ln x + \ln\left(\frac{\sinh x}{x}\right)) \rightarrow 0.$$

$$\ln L = 0 \Rightarrow L = 1.$$

21)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{x^2}$$

Sea L .

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(\sin x) = x^2(\ln x + \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)) \rightarrow 0.$$

$$L = 1.$$

22)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^{2x})^{1/x}$$

Sea $L = \ln L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + e^{2x})}{x}$ es $0/0$;

$$\ln L = \text{aplicamos L'Hôpital} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2e^{2x}}{x + e^{2x}} = 3.$$

$$L = e^3.$$

23) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{e^{3x} - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{e^{3x} - 1} = \text{aplicamos L'Hôpital} \dots \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 2}{3e^{3x}}$$

$$= \text{aplicamos L'Hôpital} \dots \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{9e^{3x}} = 0$$

24) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{x^2}$

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{2x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{2x}\right)}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \text{aplicamos L'Hôpital} \dots \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{2x^2 + x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{4 + \frac{2}{x}} = \infty$$

25)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \sinh x)^{\frac{2}{x}}$$

Sea L ; $\ln L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} \ln(1 + \sinh x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \sinh x)}{\frac{x}{2}} =$

$$\text{aplicamos L'Hôpital} \dots \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \frac{\cosh x}{1 + \sinh x} = 2$$

$$\Rightarrow L = e^2.$$

26) $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) \tan \left(\frac{\pi x}{4} \right)$

Sea $h = x - 2$.

$$(x - 2) \tan \left(\frac{\pi x}{4} \right) = h \tan \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi h}{4} \right) = -h \cot \left(\frac{\pi h}{4} \right) = -\frac{h}{\frac{\pi h}{4}} \rightarrow -\frac{4}{\pi}$$

27)

$$\lim_{x \rightarrow 0} [(\cos x) e^{-x^2/2}]^{1/x^4}$$

Sea L ; $\ln L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x^4} (\ln \cos x - \frac{x^2}{2})$

Usando $\ln \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + (x^6)$:

$$\ln \cos x - \frac{x^2}{2} = -x^2 - \frac{x^4}{12} + (x^6)$$

$$\Rightarrow \ln L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{4}{x^2} - \frac{1}{3} + (x^2) \right) = -\infty$$

$$\Rightarrow L = \mathbf{0.}$$

28)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$$

Sea L ; $\ln L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} =$

aplicamos L'Hôpital ... $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan x}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow L = \mathbf{e^{-1/2}.}$

29) $\lim_{x \rightarrow \infty} [(x^6 + 3x^5 + 4)^{1/6} - x]$

$$(x^6 + 3x^5 + 4)^{1/6} - x = x \left[\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^6} \right)^{1/6} - 1 \right]$$

Sea $u = \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^6} \right)^{1/6}$. Entonces

$$x(u-1) = \frac{3 + \frac{4}{x^5}}{u^5 + u^4 + u^3 + u^2 + u + 1} \rightarrow \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$30) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+e^x)}{3x}$$

$$\frac{\ln(x+e^x)}{3x} = \frac{x + \ln(1+xe^{-x})}{3x} \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$31) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$$

$$t = \frac{1}{x} \rightarrow \infty: \frac{e^{-1/x}}{x} = t e^{-t} =$$

$$\text{aplicamos L'Hôpital} \dots \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} = 0.$$

$$32) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^2}$$

$$L = \lim x^{x^2}, \ln L = \lim x^2 \ln x = 0 \Rightarrow L = e^0.$$

$$33) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \rightarrow 1.$$

$$34) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - x})$$

$$x - \sqrt{x^2 - x} = \frac{x^2 - (x^2 - x)}{x + \sqrt{x^2 - x}} = \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - x}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \rightarrow \frac{1}{2}.$$



INTEGRALES IMPROPIAS CON LÍMITES DE INTEGRACIÓN INFINITOS

Definición de integral impropia con límite superior infinito

Si f es continua para toda $x \geq a$, entonces

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

si este límite existe.

Definición de integral impropia con límite inferior infinito

Si f es continua para toda $x \leq b$, entonces

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

si este límite existe.

Ejemplo 1 Evalúe la integral, si es convergente:

$$\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{(4-x)^2}$$

Apoye gráficamente la respuesta

Solución

$$\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^2 \frac{dx}{(4-x)^2} dx$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{4-x} \right]_a^2$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4-a} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - 0$$

$$= \frac{1}{2}$$

Definición de integral impropia con límite superior e inferior infinitos

Si f es continua para todos los valores x y c es cualquier número real, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x)dx$$

si los dos límites existen.

Ejemplo 2 Evalúe, si existen.

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} xdx \qquad (b) \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r xdx$$

Solución

$$\begin{aligned} (a) \int_{-\infty}^{+\infty} xdx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 xdx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b xdx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^b \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}a^2 \right) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}b^2 \right) \end{aligned}$$

Como ninguno de estos dos límites existe, entonces la integral impropia diverge.

$$\begin{aligned} (b) \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r xdx &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_{-r}^r \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}r^2 \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 3 Evalúe la integral, si es convergente.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$$

Apoye gráficamente la respuesta

Solución

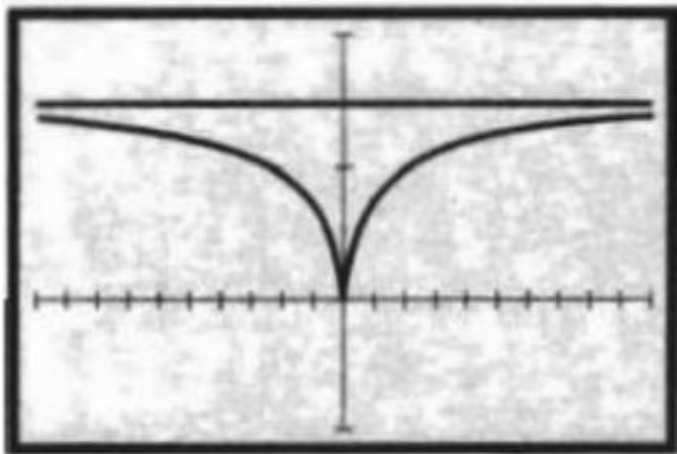
$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{x^2 + 1} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2 + 1} \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} [\tan^{-1}x]_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} [\tan^{-1}x]_0^b \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (\tan^{-1}0 - \tan^{-1}a) + \lim_{b \rightarrow +\infty} (\tan^{-1}b - \tan^{-1}0) \\
 &= 0 - \lim_{a \rightarrow -\infty} (\tan^{-1}0 - a) + \lim_{b \rightarrow +\infty} (\tan^{-1}b) - 0 \\
 &= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

A fin de apoyar la respuesta se trazan las gráficas de

$$y_1 = NINT(1/(t^2 + 1), x, 0) \quad (x < 0)$$

$$y_2 = NINT(1/(t^2 + 1), 0, x) \quad (x > 0)$$

Y la recta $y = \pi/2$ en el rectángulo de inspección de $[-10,10]$ por $[-1,2]$, como se muestra en la figura 4. El hecho de que la recta $y = \pi/2$ parece ser la asíntota de las gráficas de y_1 y y_2 apoya la respuesta.



$[-10,10]$ por $[-1,2]$

$$y_1 = NINT(1/(t^2 + 1), x, 0) \quad (x < 0)$$

$$y_2 = NINT(1/(t^2 + 1), 0, x) \quad (x > 0)$$

$$y = \pi/2$$

Ejemplo 5 ¿Es posible asignar un número finito para representar la medida del área de la región ubicada a la derecha de la recta $x = 1$, debajo de la gráfica de $y = 1/x$ y por arriba del eje x ?

Solución La región se muestra en la figura 5. Sea L el número que se desea asignar a la medida del área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones $y = 1/x$, $x = 1$ y $x = b$, donde $b > 1$. Entonces

$$A = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i} \Delta_i x$$

$$= \int_1^b \frac{1}{x} dx$$

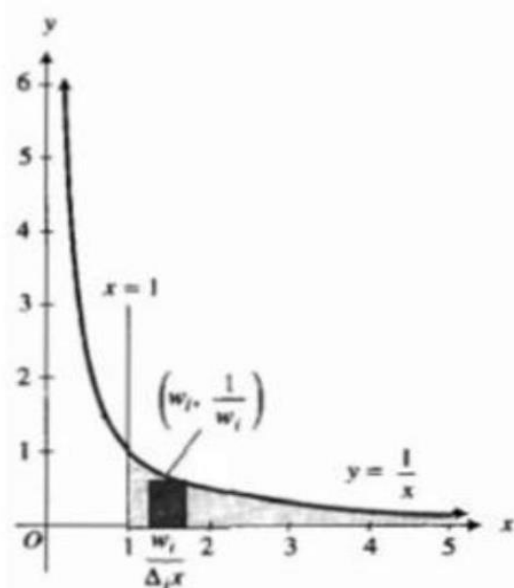
Así, sea $L = \lim_{b \rightarrow +\infty} A$, si este límite existe. Pero

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} A = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln b - \ln 1]$$

$$= +\infty$$

Por tanto, no es posible asignar un número finito para representar la medida del área de la región.



Ejemplo 6 ¿Es posible asignar un número finito para presentar la medida del volumen del sólido generado al girar la región del ejemplo 5 del eje x ?

Solución El elemento del volumen es un disco circular que tiene un espesor $\Delta_i x$ y un radio de $\frac{1}{w_i}$ en la base. Sea L el número que se desea asignar a la medida del volumen, y sea V la medida del volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x la región limitada por las gráficas de $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = b$, donde $b > 1$. Entonces

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{w_i}\right)^2 \Delta_i x \\ &= \pi \int_1^b \frac{1}{x^2} dx \end{aligned}$$

Sea $L = \lim_{b \rightarrow +\infty} V$, si este límite existe.

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow +\infty} V &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \pi \int_1^b \frac{1}{x^2} dx \\ &= \pi \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b \\ &= \pi \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, se asigna π para representar la medida del volumen del sólido.



Ejemplo 7

Determine si $\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x \, dx$ es convergente o divergente.

Solución

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x \, dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [-\cos x]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (-\cos b + 1).\end{aligned}$$

Para cualquier número entero n , conforme b toma todos los valores de $n\pi$ a $2n\pi$, $\cos b$ toma todos los valores de -1 a 1 . En consecuencia, $\lim_{b \rightarrow \infty} \cos b$ no existe. Por tanto, la integral es divergente.

Problemas

1. $\int_{-\infty}^1 e^x dx$

2. $\int_1^{\infty} 2^{-x} dx$

3. $\int_5^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

4. $\int_{-\infty}^0 x^2 e^x dx$

5. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$

6. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{16+x^2}$

7. $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos x dx$

8. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x}{(3x^2+2)^3} dx$

9. $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$

10. $\int_0^{\infty} x 2^{-x} dx$

11. $\int_5^{\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{9-x^2}} dx$

12. $\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{3}{x^2+9} dx$

13. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

14. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx$

15. $\int_1^{\infty} \ln x dx$

16. $\int_{-\infty}^{\infty} x \cosh x dx$

17. $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx, \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \sin x dx$

18. $\int_b^a f(-x) dx$

19. A. $\int_{-\infty}^{\infty} x(1+x^2)^{-2} dx$ B. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$

$$20. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$$

Solucionario

$$1. \int_{-\infty}^1 e^x dx$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^1 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^x]_a^1 = e^1 - \lim_{a \rightarrow -\infty} e^a = e - 0 = e \text{ (converge)}$$

$$2. \int_1^{\infty} 2^{-x} dx$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b e^{-x \ln 2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\ln 2} e^{-x \ln 2} \right]_1^b = \frac{1}{\ln 2} e^{-\ln 2} = \frac{1}{2 \ln 2} \text{ (converge)}$$

$$3. \int_5^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$\int_4^{\infty} u^{-\frac{1}{2}} du = \left[\lim_{b \rightarrow \infty} 2u^{-\frac{1}{2}} \right]_4^b = \lim_{b \rightarrow \infty} 2(\sqrt{b} - 2) = \infty \text{ (diverge)}$$

$$4. \int_{-\infty}^0 x^2 e^x dx$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} [e^x(x^2 - 2x + 2)]_a^0 = (2) - \lim_{a \rightarrow -\infty} e^a(a^2 - 2a + 2) = 2 \text{ (converge)}$$

$$5. \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln t \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty \text{ (diverge)}$$

$$6. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{16+x^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{u} [\tan^{-1}(x/4)]_{-b}^b = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\infty} e^{-x} \cos x dx \end{aligned}$$

$$[-e^{-x} \cos x]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-x}(-\operatorname{sen} x) dx \text{ primera integración} = I = 1 - J$$

$$[-e^{-x} \cos x]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x dx$$

$$[-e^{-x} \sin x]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-x}) \cos x dx \text{ segunda integración} = J$$

$$2I = 1$$

$$I = \frac{1}{2} \text{ Converge}$$

$$7. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x}{(3x^2+2)^3} dx = 3 \cdot \frac{x dx}{u^3} = 3 \frac{1}{6} u^{-3} du = \frac{1}{2} u^{-3} du$$

$$\int \frac{1}{2} u^{-3} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-2}}{-2} = -\frac{1}{4} u^{-2} + C = -\frac{1}{4(3x^2+2)^2} + C$$

$$\int_{-A}^A \frac{3x}{(3x^2+2)^3} dx = \left[\frac{1}{4(3x^2+2)^2} \right]_{-A}^A$$

$$-\frac{1}{4(3A^2+2)^2} - \left(-\frac{1}{4(3A^2+2)^2} \right) = 0 \text{ (converge)}$$

$$8. \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c$$

$$\int_{-A}^A x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_{-A}^A = -\frac{1}{2} e^{A^2} - \left(-\frac{1}{2} e^{A^2} \right) = 0 \text{ (converge)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{-\infty} e^{-u} du = 1$$

$$9. \int_0^{\infty} x 2^{-x} dx = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{(\ln 2)^2} \text{ (converge)}$$

$$10. \int_5^{\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{9-x^2}} dx = \sqrt[3]{9-x^2} \approx \sqrt[3]{-x^2} = -x^{2/3} = -\frac{x}{x^{2/3}} = -x^{1/3} = \int_5^{\infty} x^{1/3} dx$$

$$= -\infty \text{ (diverge)}$$

$$11. \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{3}{x^2+9} = \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} = 3 \cdot \frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\arctan \left(\frac{x}{3} \right) \right]_{\sqrt{3}}^b =$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left(\arctan \left(\frac{k}{3} \right) \arctan \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \right] \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ (converge)}$$



$$12. \int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{\infty} = 1 \text{ (converge)}$$

$$13. \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 2 \cdot 1 = 2 \text{ (converge)}$$

$$14. \int_1^{\infty} \ln x dx = [x \ln x - x]_1^{\infty} = \infty \text{ (diverge)}$$

$$15. \int_{-\infty}^{\infty} x \cosh x dx = \frac{xe^x + xe^{-x}}{2} = \frac{1}{2} [\int_{-\infty}^{\infty} xe^x dx + \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x} dx]$$

Evaluando el resultado va a ser $= \infty$ (diverge)

$$16. \int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx, \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \sin x dx$$

$$a. \int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx = |-\cos x|_{-\infty}^{\infty} = -\cos \infty + \cos \infty = \infty \text{ (diverge)}$$

$$b. \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \sin x dx = [-\cos x]_{-r}^r = \cos r + \cos(-r) = 0 \text{ (converge)}$$

$$17. \int_b^a f(-x) dx = \int_A^b f[x] dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f(x) dx$$

$$\lim_{A \rightarrow -\infty} \int_{-b}^{-A} (-u) du = \int_{-b}^{\infty} f(-u) du$$

Por tanto, ambas integrales convergen o divergen juntas, y cuando convergen, tienen el mismo valor.

$$18. A. \int_{-\infty}^{\infty} x(1+x^2)^{-2} dx = \int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int u^{-2} du = \frac{1}{z} \left(\frac{u^{-1}}{-1}\right) = -\frac{1}{2u} +$$

$$c = -\frac{1}{2(1+x^2)} + c = \left[-\frac{1}{2(1+x^2)}\right]_{-A}^{-A} = 0 \text{ (converge)}$$

$$B. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C = \frac{1}{2} [\ln(1+A^2) - \ln(1+A^2)] =$$

0

$$\frac{1}{2} \ln(1+x^2)|_0^{\infty} = \infty \text{ (diverge)}$$

$$19. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_1^A x^{-p} dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^A = \frac{A^{1-p}-1}{1-p}.$$

ahora analizamos el limite cuando $A = \infty$:



si $p > 1$, entonces $1 - p < 0$ y $A^{1-p} \rightarrow 0$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$$

si $p = 1$

$$\int_1^A \frac{dx}{x^p} = \ln A \rightarrow \infty$$

La integral impropia converge si y solo si $p > 1$

INTEGRALES IMPROPIAS CON DISCONTINUIDADES INFINITAS

Definición de integral impropia con una discontinuidad infinita en su límite inferior

Si f es continua en toda x del intervalo semiabierto por la izquierda $(a, b]$, y si $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = +\infty$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

Si este límite existe

Definición de integral impropia con una discontinuidad infinita en su límite superior

Si f es continua en toda x del intervalo semiabierto por la derecha $[a, b)$, y si $\lim_{x \rightarrow b} |f(x)| = +\infty$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx +$$

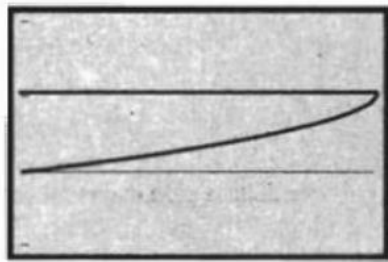
Si este límite existe

Ejemplo 1

Evalúe la integral, si es convergente:

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

Solución. El integrando tiene una discontinuidad infinita en su límite superior.



[1, 1.99999] por [-1, 2]

$$g(t) = \text{NINT}(1/\sqrt{4-x^2}, 1, t) \quad (1 \leq t \leq 2)$$

$$y = \pi/3$$

FIGURA 3

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \int_1^t \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \left[\sin^{-1} \frac{x}{2} \right]_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \sin^{-1} \frac{t}{2} - \lim_{t \rightarrow 2^-} \sin^{-1} \frac{1}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Definición de integral impropia con una discontinuidad infinita en un número interior

Si f es continua en toda x del intervalo $[a, b]$ excepto en c , donde $a < c < b$, si $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = +\infty$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x) dx + \lim_{s \rightarrow c^+} \int_s^b f(x) dx$$

Si los dos límites existen

Ejemplo 2

Evalué la integral, si es convergente:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

Solución. El integrando tiene una discontinuidad en 1. Al aplicar la definición 7.10.3 se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^2 \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[-\frac{1}{x-1} \right]_0^t + \lim_{s \rightarrow 1^+} \left[-\frac{1}{x-1} \right]_s^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[-\frac{1}{t-1} - 1 \right] + \lim_{s \rightarrow 1^+} \left[-1 + \frac{1}{s-1} \right] \end{aligned}$$

Como ninguno de estos límites existen, la integral impropia es divergente.

Ejemplo 3

Evalué la integral, si es convergente:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \ln x dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 x \ln x dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 \right]_t^1 \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2} \ln t - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} t^2 \ln t + \frac{1}{4} t^2 \right] \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\int_0^1 x \ln x dx = 0 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 \ln t + 0$$

A fin de evaluar el límite

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 \ln t = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t^2}}$$

Se aplica la regla de L'Hopital, en vista de que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = -\infty$ y $\lim_{t \rightarrow 0^+} 1/t^2 = +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t^2}} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{2}{t^3}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[-\frac{t^2}{2} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_0^1 x \ln x \, dx = -\frac{1}{4}$$

Ejemplo 4

Evalué la integral, si es convergente:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Solución esta integral tiene el límite superior infinito y una discontinuidad infinita del integrando en el límite inferior. Se procede como sigue:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^+} [\sec^{-1}x]_t^2 + \lim_{b \rightarrow +\infty} [\sec^{-1}x]_2^b \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^+} (\sec^{-1}2 - \sec^{-1}t) + \lim_{b \rightarrow +\infty} (\sec^{-1}b - \sec^{-1}2) \\ &= \frac{1}{3}\pi - \lim_{t \rightarrow 1^+} \sec^{-1}t + \lim_{b \rightarrow +\infty} \sec^{-1}b - \frac{1}{3}\pi \\ &= -0 + \frac{1}{2}\pi \\ &= \frac{1}{2}\pi \end{aligned}$$

La integral del ejemplo 3 se denomina *integral impropia de tipo mixto*



Problemas

En los siguientes ejercicios determine si la integral es convergente o divergente. Si es convergente, evalúela y apoye gráficamente la respuesta

$$1. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

$$2. \int_0^{16} \frac{dx}{x^{3/4}}$$

$$3. \int_2^4 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$4. \int_0^{\pi/2} \tan \theta \, d\theta$$

$$5. \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{1 - \operatorname{sen} y}$$

$$6. \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$7. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$$

$$8. \int_0^4 \frac{dx}{x^2 - 2x - 3}$$

$$9. \int_{-2}^0 \frac{dw}{(w+1)^{1/3}}$$

$$10. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$11. \int_{1/2}^2 \frac{dz}{z (\ln z)^{1/5}}$$

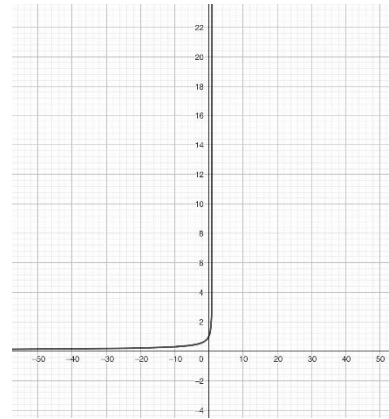
$$12. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}$$

$$13. \int_t^3 \frac{dy}{\sqrt[3]{y-2}}$$

Solucionario

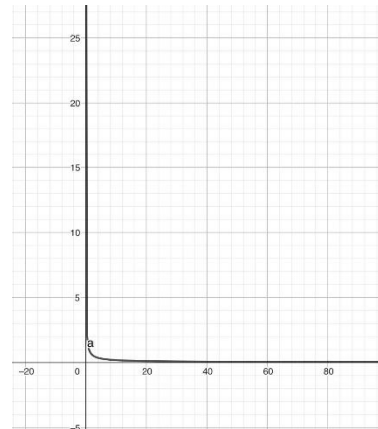
$$1. \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[-2\sqrt{1-t} \right]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} (-2\sqrt{1-t} + 2) \\ &= 2 \end{aligned}$$



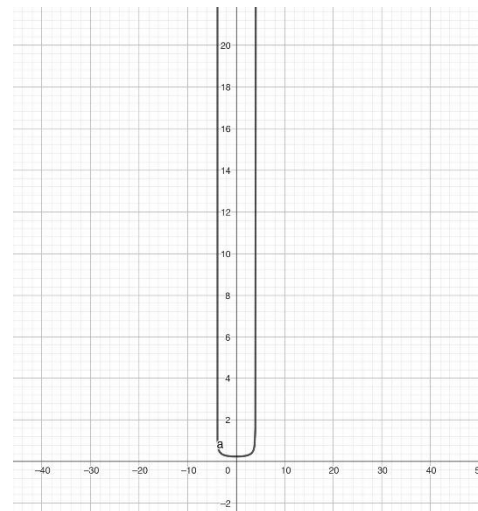
$$2. \int_0^{16} \frac{dx}{x^{3/4}}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{16} \frac{dx}{x^{3/4}} &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^{16} x^{-3/4} dx \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \left[4x^{1/4} \right]_s^{16} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} 4(16^{1/4} - s^{3/4}) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} 4(16^{1/4} - s^{3/4}) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} 4(16^{1/4} - s^{3/4}) \\ &= 4 * 2 = 8 \end{aligned}$$



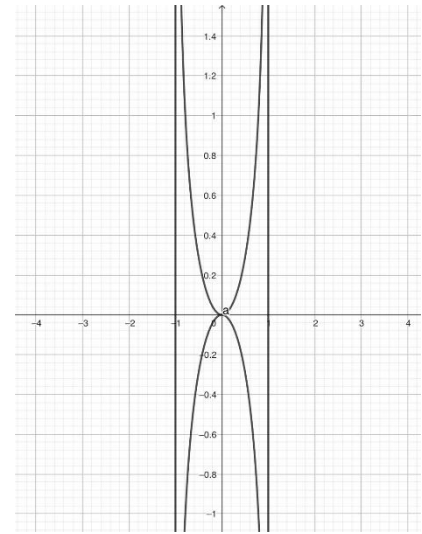
$$3. \int_2^4 \frac{dt}{\sqrt{16-t^2}}$$

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{dt}{\sqrt{16-t^2}} &= \lim_{t \rightarrow 4^-} \int_2^t \frac{dt}{\sqrt{16-t^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 4^-} \left[\text{sen}^{-1} \frac{t}{4} \right]_2^t \\ &= \lim_{t \rightarrow 4^-} \left[\text{sen}^{-1} \frac{t}{4} - \text{sen}^{-1} \frac{2}{4} \right] \\ &= \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{3}\pi \end{aligned}$$



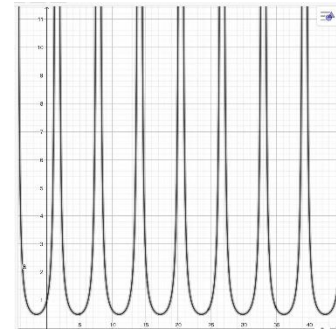
$$4. \int_0^{\pi/2} \tan \theta \, d\theta$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \tan \theta \, d\theta &= \lim_{t \rightarrow \pi/2^-} \int_0^t \tan \theta \, d\theta \\ &= \lim_{t \rightarrow \pi/2^-} \ln \sec \theta \Big|_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \pi/2^-} [\ln \sec t - \ln 1] \\ &= +\infty, \quad \text{Integral divergente} \end{aligned}$$



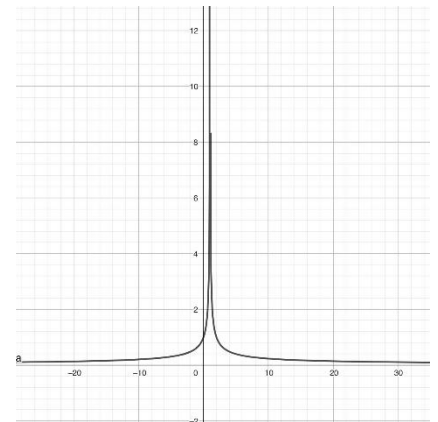
$$5. \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{1 - \sin y}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{1 - \sin y} &= \lim_{t \rightarrow \pi/2^-} \int_0^t \frac{1 + \sin y}{1 + \sin y} \cdot \frac{dy}{1 - \sin y} \\ &= \lim_{t \rightarrow \pi/2^-} \int_0^t \frac{1 + \sin y}{\cos^2 y} dy \\ &= \lim_{t \rightarrow \pi/2^-} \int_0^t (\sec^2 y + \sec y \tan y) dy \\ &= \lim_{t \rightarrow \pi/2^-} |\tan t + \sec t - 1| \\ &= +\infty \text{ por lo tanto da una integral divergente} \end{aligned}$$



$$6. \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

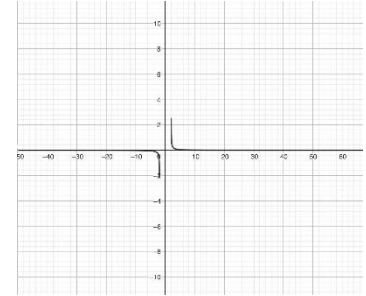
$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t (x-1)^{-2/3} dx + \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_0^s (x-1)^{-2/3} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} 3(x-1)^{1/3} + \lim_{s \rightarrow 1^+} 3(x-1)^{1/3} \Big|_0^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} [3(t-1)^{1/3} + 3] + \lim_{s \rightarrow 1^+} [3 - 3(s-1)^{1/3}] \\ &= 3 + 3 = 6 \end{aligned}$$



$$7. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$$

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} &= \lim_{s \rightarrow 2^+} \int_s^6 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} + \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_6^s \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} \\ &= \lim_{s \rightarrow 2^+} \left. \frac{1}{2} \sec^{-1} \frac{1}{2}x \right|_s^6 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \left. \frac{1}{2} \sec^{-1} \frac{1}{2}x \right|_6^t \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sec^{-1} 3 - 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \sec^{-1} 3 = \frac{1}{4} \pi$$



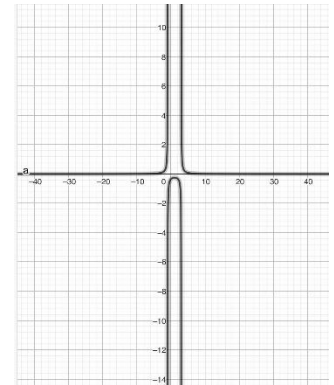
$$8. \int_0^4 \frac{dx}{x^2-2x-3}$$

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{dx}{x^2-2x-3} &= \int_0^4 \frac{dx}{(x-3)(x+1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 3^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-3)(x+1)} + \lim_{s \rightarrow 3^+} \int_t^4 \frac{dx}{(x-3)(x+1)} = I + J \end{aligned}$$

$$I = \lim_{t \rightarrow 3^-} \frac{1}{4} \int_0^t \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

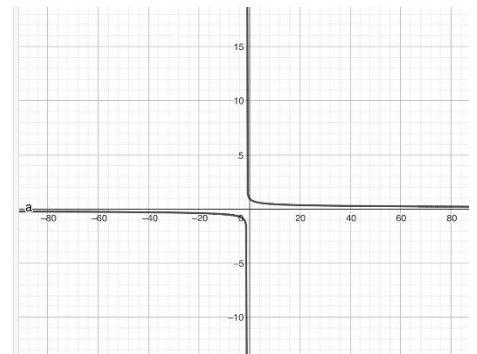
$$I = \left[\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-3}{x+1} \right| \right]_0^t = -\infty$$

(J tampoco converge)



$$9. \int_{-2}^0 \frac{dw}{(w+1)^{1/3}}$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 \frac{dw}{(w+1)^{1/3}} &= \lim_{t \rightarrow -1^-} \int_{-2}^t \frac{dw}{(w+1)^{1/3}} + \lim_{s \rightarrow -1^+} \int_t^0 \frac{dw}{(w+1)^{1/3}} \\ &= \lim_{t \rightarrow -1^-} \left[\frac{3}{2} (w+1)^{2/3} \right]_{-2}^t + \lim_{s \rightarrow -1^+} \left[\frac{3}{2} (w+1)^{2/3} \right]_t^0 \\ &= \lim_{t \rightarrow -1^-} \left[\frac{3}{2} (t+1) - \frac{3}{2} \right] + \lim_{s \rightarrow -1^+} \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2} (t+1) \right] \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0 \end{aligned}$$



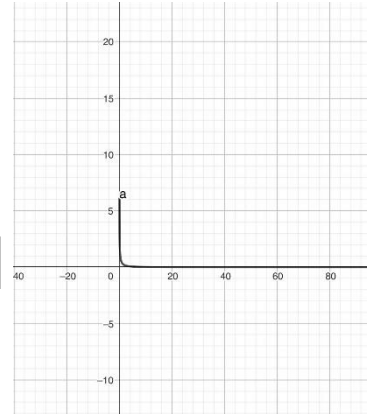
$$10. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \end{aligned}$$

Encontrar la integral, utilizaremos $u = -\sqrt{x}$ después $du = -\frac{1}{2}x^{-1/2}dx$ de este modo

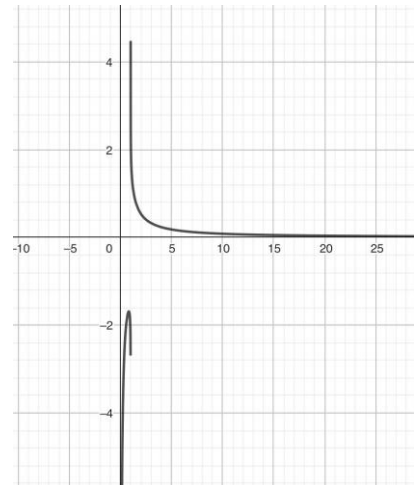
$$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int e^u (-2 du) = -2e^u = -2e^{-\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{s \rightarrow 0^+} [-2e^{-\sqrt{x}}]_s^1 + \lim_{t \rightarrow +\infty} [-2e^{-\sqrt{x}}]_1^t \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} [-2e^{-1} + 2e^{-\sqrt{s}}] + \lim_{t \rightarrow +\infty} [2e^{-\sqrt{t}} + 2e^{-1}] \\ &= [-2e^{-1} + 2] + 2e^{-1} = 2 \end{aligned}$$



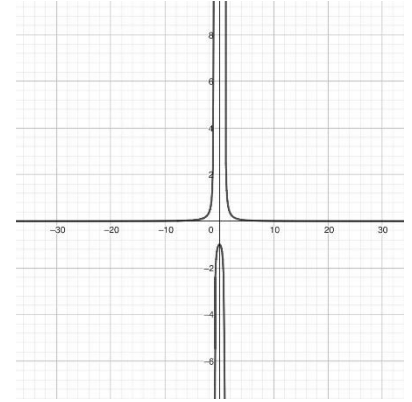
$$11. \int_{1/2}^2 \frac{dz}{z (\ln z)^{1/5}}$$

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^2 \frac{dz}{z (\ln z)^{1/5}} &= \lim_{t \rightarrow -1^-} \int_{1/2}^t (\ln z)^{-1/5} \frac{dz}{z} + \lim_{t \rightarrow -1^+} \int_t^2 (\ln z)^{-1/5} \frac{dz}{z} \\ &= \lim_{t \rightarrow -1^-} \left[\frac{5}{4} (\ln z)^{4/5} \right]_{1/2}^t + \lim_{t \rightarrow -1^+} \left[\frac{5}{4} (\ln z)^{4/5} \right]_t^2 \\ &= \frac{5}{4} \left[\lim_{t \rightarrow -1^-} (\ln t)^{4/5} - \left(\ln \frac{1}{2} \right)^{4/5} + (\ln 2)^{4/5} - \lim_{t \rightarrow -1^+} (\ln t)^{4/5} \right] \\ &= \frac{5}{4} (0 - (-\ln 2)^{4/5} + (\ln 2)^{4/5} - 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$



$$12. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1} &= \lim_{s \rightarrow 2^+} \int_s^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \lim_{s \rightarrow 2^+} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|_s^2 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|_2^t \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{3} - \ln \frac{s-1}{s+1} \right) + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\ln \frac{t-1}{t+1} - \ln \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$



$$13. \int_1^3 \frac{dy}{\sqrt[3]{y-2}}$$

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{dy}{\sqrt[3]{y-2}} &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \int_1^t (y-2)^{-1/3} dy + \lim_{t \rightarrow 2^+} \int_t^3 (y-2)^{-1/3} dy \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \left[\frac{3}{2} (y-2)^{2/3} \right]_1^t + \lim_{t \rightarrow 2^+} \left[\frac{3}{2} (y-2)^{2/3} \right]_t^3 \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \left[\frac{3}{2} (t-2) - \frac{3}{2} \right] + \lim_{t \rightarrow 2^+} \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2} (t-2) \right] \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0 \end{aligned}$$

