CALCULO II MODULO 3

INTEGRAL POR PARTES

Fórmula de Integración por Partes

$$\int f(x)g'(x) = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

$$u = f(x) y\ v = g(x)$$

Entonces

$$du = f'(x)dx \quad y \quad dv = g'(x)dx$$

De modo que se transforma en

$$\int \boldsymbol{udv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{vdu}$$

Método ILATE

El método de ILATE nos ayuda a definir quien tiene prioridad de ser u y por lo tanto saber quién es dv. ILATE es una palabra que nos permite memorizar nemotécnicamente el orden de prioridad que se tiene para seleccionar una función como u.

- La **I** indica que en primer lugar debo seleccionar las **funciones Inversas**, si no hay inversas
- La **L** indica que debo seleccionar las **funciones Logarítmicas**, si no hay funciones logarítmicas
- La **A** indica que debo seleccionar las **funciones Algebraicas**, si no hay algebraicas
- La **T** indica que debo seleccionar las **funciones Trigonométricas**, si no hay trigonométrica
- La **E** indica que entonces debo seleccionar a las **Exponenciales** como la u.

Este método de verdad es muy fácil de recordar, solo hay que saberlo aplicar cuando se tenga que resolver integrales por parte y así tendremos un camino seguro.

Método de Integración por Partes de funciones cíclicas

Ejemplo 1

$$\int x^3 e^{-2x} dx$$

Signos Alternados	*Derivar*	*Integrar*
$+$	x^3	e^{-2x}
$-$	$3x^2$	$-\frac{1}{2}e^{-2x}$
$+$	$6x$	$\frac{1}{4}e^{-2x}$
$-$	6	$-\frac{1}{8}e^{-2x}$
$+$	0	$\frac{1}{16}e^{-2x}$

$$\int x^3 e^{-2x} dx = x^3\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - 3x^2\left(\frac{1}{4}e^{-2x}\right) + 6x\left(-\frac{1}{8}e^{-2x}\right) - 6\left(\frac{1}{16}e^{-2x}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{2}x^3 e^{-2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{-2x} - \frac{3}{4}xe^{-2x} - \frac{3}{8}e^{-2x} + C$$

Ejemplo 2

$$\int x^3 \cos 2x \, dx$$

Signos Alternados	*Derivar*	*Integrar*
$+$ →	x^3 ↘	$\cos 2x$
$-$ →	$3x^2$ ↘	$-\frac{1}{2}\sin 2x$
$+$ →	$6x$ ↘	$\frac{1}{4}\cos 2x$
$-$ →	6 ↘	$-\frac{1}{8}\sin 2x$
$+$	0	$\frac{1}{16}\cos 2x$

$$\int x^3 \cos 2x \, dx$$

$$= x^3\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) - 3x^2\left(-\frac{1}{4}\cos 2x\right) + 6x\left(-\frac{1}{8}\sin 2x\right) - 6\left(\frac{1}{16}\cos 2x\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}x^3 \sin 2x + \frac{3}{4}x^2 \cos 2x - \frac{3}{4}x \sin 2x - \frac{3}{8}\cos 2x + C$$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Problemas

1. $\int xe^{3x}dx$
2. $\int xcos2xdx$
3. $\int xsecxtanxdx$
4. $\int x3^{x}dx$
5. $\int ln5xdx$
6. $\int sen^{-1}wdw$
7. $\int \frac{(lnt)^2}{t}dt$
8. $\int xsec^2xdx$
9. $\int xtan^{-1}xdx$
10. $\int ln\,(x^2+1)dx$
11. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$
12. $\int x^2sen3xdx$
13. $\int sen(lny)dy$
14. $\int sentln\,(cost)dt$

15. $\int e^x \cos x\, dx$
16. $\int x^5 e^{x^2}\, dx$
17. $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$
18. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{e^x}\, dx$
19. $\int x^2 \operatorname{senh} x\, dx$
20. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^x}}\, dx$
21. $\int \frac{\cot^{-1}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\, dz$
22. $\int \cos^{-1} 2x\, dx$
23. $\int \cos\sqrt{x}\, dx$
24. $\int \tan^{-1}\sqrt{x}\, dx$

Solucionario

1. Let $\mathrm{u} = \mathrm{x}$ and $\mathrm{dv} = e^{3x}dx$. Then $\mathrm{du} = dx$ and $\mathrm{v} = \frac{1}{3}e^{3x}$.

$$\int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}x^{3x} + C$$

2. Let $\mathrm{u} = \mathrm{x}$ and $\mathrm{dv} = \cos 2x$. Then $\mathrm{du} = \mathrm{dx}$ and $\mathrm{v} = \frac{1}{2}\sin 2x$.

$$\int x\cos 2x dx = \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}x\sin\ 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

3. Let $u = x$ and $dv = \sec x \tan x\, dx$. Then $du = dx$ and $v = \sec\ x$.

$$\int x\sec x\tan x dx = x\sec x - \int \sec x dx = x\sec\ x - \ln\ |\sec\ x + \tan\ x| + C$$

4. $\int x3^x dx$

We use integration by parts with

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= 3^x dx \\ du &= dx & v &= \frac{3^x}{\ln 3} \end{aligned}$$

Thus,

$$\int x3^x dx = \frac{x3^x}{\ln\ 3} - \frac{1}{\ln\ 3}\int 3^x dx = \frac{x3^x}{\ln\ 3} - \frac{1}{\ln\ 3}\frac{3^x}{\ln\ 3} + C = \frac{3^x(x\ln\ 3 - 1)}{\ln^2\ 3} + C$$

5. Let $u = \ln\ x$ and $dv = dx$. Then $du = \frac{1}{x}dx$ and $v = x$.

$$\int \ln\ x dx = x\ln\ x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln\ x - x + C$$

6. Let $u = \sin^{-1}\ w$ and $dv = dw$. Then $dv = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}$ and $v = w$.

$$\int \sin^{-1}\ w du = w\sin^{-1}\ w - \int \frac{w}{\sqrt{1-w^2}}dw = w\sin^{-1}\ w + \sqrt{1-w^2} + C$$

7. $\int \frac{(\ln\ t)^2}{t}dt = \int (\ln\ t)^2 d(\ln\ t) = \frac{1}{3}(\ln\ t)^3 + C$

8. $\int x\sec^2 \mathrm{x} dx$

We use integration by parts with

$$u = x \qquad dv = \sec^2\ x dx$$
$$du = dx \qquad v = \tan\ x$$

Thus,

$$\int\ x\sec^2\ xdx = \mathrm{x}\tan\ x - \int\ \tan\ xdx = x\tan\ x - \ln\ |\sec\ x| + C$$

9. Let $u = \tan^{-1}\ x$ and $dv = xdx$. Then $du = \frac{dx}{1+x^2}$ and $v = \frac{1}{2}x^2$.

$$\int\ x\tan^{-1} xdz = \frac{1}{2}x^2\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int\ \frac{x^2dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}x^2\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int\ dx + \frac{1}{2}\int\ \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1}\ x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + \mathrm{C}$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\ x(x^2+1) - \frac{1}{2}x + \mathrm{C}$$

Alternatively, let $v = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$. Then $vdu = \frac{1}{2}dx$ and

$$\int\ x\tan^{-1}\ xdx = \frac{1}{2}(x^2+1)\tan^{-1}\ x - \frac{1}{2}\int\ dx = \frac{1}{2}(x^2+1)\tan^{-1}\ x - \frac{1}{2}x + C$$

10. Let $u = \ln(x^2+1)$, $dv = dx$. Then $du = \frac{2x}{x^2+1}dx$ and $v = x.$

$\int\ \mathrm{Ln}(x^2+1)dx$

$$= x\ln\ (x^2+1) - \int\ x \cdot \frac{2x}{x^2+1}dx = x\ln\ (x^2+1) - 2\int\ \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx$$
$$= x\ln\ (x^2+1) - 2x + 2\tan^{-1}\ x + C$$

11. Let $u = xe^x$ and $dv = \frac{dx}{(x+1)^2}$. Then $du = (xe^x + e^x)dx$ and $v = -\frac{1}{x+1}$.

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = -\frac{xe^x}{x+1} + \int \frac{1}{x+1}[e^x(x+1)]\,dx = -\frac{xe^x}{x+1} + \int e^x dx$$

$$= -\frac{xe^x}{x+1} + e^x + \mathrm{C} = \frac{-xe^x + xe^x + e^x}{x+1} + \mathrm{C} = \frac{e^x}{x+1} + \mathrm{C}.$$

Note that $\int \frac{xe^{ax}}{(bx+1)^2}dx$ can be integrated only if a = b.

12. $\int x^2 \sin\ 3x dx$

We let

$$u = x^2 \qquad dv = \sin\ 3x dx$$
$$du = 2x dx \quad v = -\frac{1}{3}\cos\ 3x$$

Thus,

$$\int x^2 \sin\ 3x dx = -\frac{1}{3}x^2 \cos\ 3x + \frac{2}{3}\int x\cos\ 3x dx$$

For the integral on the right side of (1), we let

$$u = x \qquad dv = \cos\ 3x dx$$
$$du = dx \qquad v = \frac{1}{3}\sin\ 3x$$

Thus,

$$\int x\cos\ 3x dx = \frac{1}{3}x\sin\ 3x - \frac{1}{3}\int \sin\ 3x dx = \frac{1}{3}x\sin\ 3x + \frac{1}{9}\cos\ 3x + C$$

Substituting from (2) into (1), we obtain

$$\int x^2 \sin\ 3x dx = -\frac{1}{3}x^2 \cos\ 3x + \frac{2}{9}x\sin\ 3x + \frac{2}{27}\cos\ 3x + C$$

13. Substitute $x = \ln\ y, y = e^x, dy = e^x dz$.

$$\int \sin(\ln\ y)dy = \int \sin\ x e^x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin\ x - \cos\ x) + C$$
$$= \frac{1}{2}y[\sin(\ln\ y) - \cos(\ln\ y)] + C$$

14. First substitute $t = \cos x\,, dt = -\sin x dx$. Thus $I = \int \sin \mathrm{x}\ln(\cos x)\, dx$ $= -\int \ln\ t dt$.

Now let $u = \ln\ t, dv = dt$. Then $du = \frac{1}{t}dt$ and $v = t$.

$$\mathrm{I} = -\left(t\ln\ t - \int t \cdot \frac{1}{t}dt\right) = -t\ln\ t + \int dt = -t\ln\ t + t + C$$
$$= -\cos\ x\ln(\cos\ x) + \cos\ x$$

15. Let $u = e^x$ and $dv = \cos x\, dx$. Then $du = e^x dx$ and $v = \sin x$.

$I = \int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$

Let $\bar{u} = e^x$ and $d\bar{v} = \sin x\, dx$. Then $d\bar{u} = e^x dx$ and $\bar{v} = -\cos x$.

$I = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx\right) = e^x \sin x + e^x \cos x - I$

$2I = e^x(\sin x + \cos x) + 2C;\ I = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$

16. $\int x^5 e^{x^2} dx$

▹ To simplify the exponential, we let $z = x^2$ and $dz = 2x\, dx$. Then

$$\int x^5 e^{x^2} dx = \int (x^2)^2 e^{x^2}(x\, dx) = \int z^2 e^z\, dz$$

Let

$$u = \tfrac{1}{2}z^2 \qquad dv = e^z\, dz$$
$$du = z\, dz \qquad v = e^z$$

Thus

$$\int x^5 e^{x^2} dx = \tfrac{1}{2}z^2 e^z - \int z e^z\, dz$$

For the integral on the right side of (1), we let

$$\bar{u} = z \qquad d\bar{v} = e^z\, dz$$
$$d\bar{u} = dz \qquad \bar{v} = e^z$$

Thus

$$\int z e^z\, dz = z e^z - \int e^z\, dz = z e^z - e^z + \bar{C}$$

Substituting from (2) into (1), we obtain

$$\int x^5 e^{x^2} dx = \tfrac{1}{2}z^2 e^z - z e^z + e^z - \bar{C} = (\tfrac{1}{2}z^2 - z + 1)e^z + C$$

where $C = -\bar{C}$. Finally, substituting $z = x^2$, we get

$$\int x^5 e^{x^2} dx = (\tfrac{1}{2}x^4 - x^2 + 1)e^{x^2} + C$$

17. Let $u = x^2$ and $dv = \dfrac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$. Then $du = 2x\, dx$ and $v = -\sqrt{1 - x^2}$.

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -x^2\sqrt{1 - x^2} + \int 2x\sqrt{1 - x^2}\, dx = -x^2\sqrt{1 - x^2} - \tfrac{2}{3}(1 - x^2)^{3/2} + C$$

18. Let $u = e^{-x}$ and $dv = \sin 2x$. Then $du = -e^{-x}dx$ and $v = -\frac{1}{2}\cos 2x$.

$I = \int e^{-x}\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x - \frac{1}{2}\int e^{-x}\cos 2x\,dx$

Let $\bar{u} = e^{-x}$ and $d\bar{v} = \cos 2x$. Then $d\bar{u} = -e^{-x}dx$ and $\bar{v} = \frac{1}{2}\sin 2x$.

$I = -\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x + \frac{1}{2}\int e^{-x}\sin 2x\,dx) = -\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x - \frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x - \frac{1}{4}I$

$\frac{5}{4}I = -e^{-x}(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x)$; $I = -\frac{1}{5}e^{-x}(2\cos 2x + \sin 2x) + C$

19. Let $u = x^2$ and $dv = \sinh x\,dx$. Then $du = 2x\,dx$ and $v = \cosh x$.

$\int x^2\sinh x\,dx = x^2\cosh x - 2\int x\cosh x\,dx$

Let $\bar{u} = x$ and $d\bar{v} = \cosh x\,dx$. Then $d\bar{u} = dx$, and $\bar{v} = \sinh x$.

$\int x^2\sinh x\,dx = x^2\cosh x - 2\left(x\sinh x - \int\sinh x\,dx\right) = x^2\cosh x - 2x\sinh x + 2\cosh x + C$

20. $\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^x}}dx$

▸ Integration by parts is not required. We let $u = 1 - e^x$. Then $du = -e^x\ dx$ and $e^x = 1 - u$. With these substitutions we obtain

$$\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^x}}\,dx = \int\frac{e^x(e^x dx)}{\sqrt{1-e^x}} = \int\frac{(1-u)(-du)}{\sqrt{u}} = \int(u^{1/2} - u^{-1/2})\,du = \frac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2} + C$$

$$= \frac{2}{3}u^{1/2}(u-3) + C = \frac{2}{3}\sqrt{1-e^x}(1-e^x-3) + C = -\frac{2}{3}\sqrt{1-e^x}(2+e^x) + C$$

21. First substitute $t = \sqrt{z}$, $dt = \frac{1}{2\sqrt{z}}$. Thus $I = \int\frac{\cot^{-1}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}dz = 2\int\cot^{-1}t\,dt$.

Now let $u = \cot^{-1}t$ and $dv = dt$. Then $du = \frac{-1}{1+t^2}dt$ and $v = t$.

$I = 2t\cot^{-1}t + \int\frac{2t\,dt}{1+t^2} = 2t\cot^{-1}t + \ln(1+t^2) + C = 2\sqrt{z}\cot^{-1}\sqrt{z} + \ln(1+z) + C$

22. Let $u = \cos^{-1}2x$ and $dv = dx$. Then $du = -\frac{2\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ and $v = x$.

$\int\cos^{-1}2x\,dx = x\cos^{-1}2x + \int\frac{2x\,dx}{\sqrt{1-4x^2}} = x\cos^{-1}2x - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$

23. First substitute $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$. Thus $I = \int\cos\sqrt{x}\,dx = \int 2t\cos t\,dt$.

Now let $u = 2t$, $dv = \cos t\,dt$. Then $du = 2\,dt$ and $v = \sin t$.

$I = 2t\sin t - \int 2\sin t\,dt = 2t\sin t + 2\cos t + C = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$

24. $\int\tan^{-1}\sqrt{x}\,dx$

▸ First, we let $z = \sqrt{x}$. Then $x = z^2$, and $dx = 2z\,dz$. Thus,

$$\int\tan^{-1}\sqrt{x}\,dx = \int 2z\tan^{-1}z\,dz \qquad (1)$$

Next, we integrate by parts on the right side of Eq. (1). Let

$u = \tan^{-1}z \qquad dv = 2z\,dz$

$du = \frac{dz}{1+z^2} \qquad v = z^2 + 1$

Note that we are free to choose the most convenient antiderivative. Thus,

$$\int\tan^{-1}\sqrt{x}\,dx = (z^2+1)\tan^{-1}z - \int\frac{z^2+1}{1+z^2}dz = (z^2+1)\tan^{-1}z - \int dz$$

$$= (z^2+1)\tan^{-1}z - z + C = (x+1)\tan^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$$

INTEGRACIÓN DE POTENCIAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Integrales que implican seno y coseno

Caso 1:

$$a) \int sen^n x\, dx \quad o \quad b) \int cos^n x\, dx\,,\ \text{donde } n \text{ es un número entero positivo impar}$$

Se resuelve utilizando los factores:

$$a)\ sen^n x\, dx = (sen^{n-1} x\,)(senxdx)$$

$$b)\ cos^n x\, dx = (cos^{n-1} x\,)(cosxdx)$$

Caso 2:

$$a) \int sen^n x\, cos^m x\, dx,\ \text{donde al menos uno de los exponentes es un entero positivo impar}$$

Se resuelve utilizando los factores:

a) Si *n* es impar, entonces

$$sen^n x\, cos^m x\, dx = sen^{n-1} x cos^m x(senxdx)$$

a) Si *m* es impar, entonces

$$sen^n x\, cos^m x\, dx = sen^n x cos^{m-1} x(cosxdx)$$

Caso 3:

$$a) \int sen^n x\, dx, \quad b) \int cos^n x\, dx\,, \quad o \quad c) \int sen^n x\, cos^m x\, dx$$

Donde m y n son números enteros positivos pares

Se utiliza la descomposición:

$$a)\ sen^n x\, dx = (sen^2 x)^{n/2}\, dx$$

$$= \left(\frac{1 - cos2x}{2}\right)^{n/2} dx$$

$$b) \int cos^n x\, dx = (cos^2 x)^{n/2}\, dx$$

$$= \left(\frac{1 + cos2x}{2}\right)^{n/2} dx$$

$c) \int sen^n x\, cos^m x\, dx = (sen^2 x)^{n/2} (cos^2 x)^{m/2}$

$$= \left(\frac{1-cos2x}{2}\right)^{n/2} \left(\frac{1+cos2x}{2}\right)^{m/2} dx$$

Integrales que implican potencias de Tangente, Cotangente, Secante y Cosecante

Caso 4:

$a) \int tan^n x\, dx \quad o \quad b) \int cot^n x\, dx$, *donde n es un número entero positivo impar*

Se resuelve utilizando los factores:

$a)\ tan^n x dx = (tan^{n-2} x)(tan^2 x dx)$

$$= tan^{n-2} x(sec^2 x - 1)dx$$

$b)\ cot^n x dx = (cot^{n-2} x)(cot^2 x dx)$

$$= cot^{n-2} x(csc^2 x - 1)dx$$

Caso 5:

$a) \int sec^n x\, dx \quad o \quad b) \int csc^n x\, dx$, *donde n es un número entero positivo par*

Se resuelve utilizando los factores:

$a)\ sec^n x dx = (sec^{n-2} x)(sec^2 x dx)$

$$= (tan^2 x - 1)^{(n-2)/2} (sec^2 x dx)$$

$b)\ cot^n x dx = (cot^{n-2} x)(cot^2 x dx)$

$$= (cot^2 x - 1)^{(n-2)/2} (csc^2 x dx)$$

Caso 6:

$$a) \int tan^n sec^m x\, dx \quad o \quad b) \int cot^n csc^n x\, dx, \text{ donde n es un número entero positivo par}$$

Se resuelve utilizando los factores:

$$a)\ tan^n sec^m x\, dx = tan^n x\, sec^{m-2} x(sec^2 x dx)$$

$$= tan^n x(tan^2 x + 1)^{(m-2)/2}(sec^2 x dx)$$

$$b)\ cot^n x csc^m x dx = cot^n x csc^{m-2} x(csc^2 x dx)$$

$$= cot^n x(cot^2 x + 1)^{(m-2)/2}(csc^2 x dx)$$

Caso 7:

$$a) \int tan^n sec^m x\, dx \quad o \quad b) \int cot^n csc^n x\, dx, \text{ donde n es un número entero positivo par}$$

Se resuelve utilizando los factores:

$$a)\ tan^n sec^m x\, dx = tan^{n-1} x\, sec^{m-1} x(secx\, tanx\, dx)$$

$$= (sec^2 x - 1)^{(n-1)/2} sec^{m-1} x(secx\, tanx\, dx)$$

$$b)\ cot^n cssc^m x\, dx = cot^{n-1} x\, csc^{m-1} x(cscx\, cotx\, dx)$$

$$= (csc^2 x - 1)^{(n-1)/2} csc^{m-1} x(cscx\, cotx\, dx)$$

Caso 8:

$$a) \int sec^n x\, dx \quad o \quad b) \int csc^n x\, dx, \text{ donde n es un número entero positivo impar}$$

Aplicar integración por partes

$$a)\ Considere\ u = sec^{n-2} x \qquad y \qquad dv = sec^2 x\, dx$$

$$b)\ Considere\ u = csc^{n-2} x \qquad y \qquad dv = csc^2 x\, dx$$

Caso 9:

$$a)\int tan^n sec^m x\,dx \quad o \quad b)\int cot^n csc^n x\,dx,$$

Donde n es entero positivo y m entero positivo impar

Expresar el integrando en términos de potencias impares de la secante o cosecante y luego seguir las sugerencias del caso anterior.

Se utiliza la descomposición:

$$a)\ tan^n sec^m x\,dx = (tan^2 x)^{n/2}\ sec^m x\,dx$$

$$= (sec^2 x - 1)^{n/2} sec^m x dx$$

$$b)\ cot^n csc^m x dx = (cot^2 x)^{n/2}\ csc^m x\,dx$$

$$= (csc^2 x - 1)^{n/2} csc^m x dx$$

Integrales que contienen los productos seno-coseno de ángulos diferentes

$$sen\,mx\,sen\,nx = \frac{1}{2}(cos\,[(m-n)x] - cos\,[(m+n)x])$$

$$sen\,mx\,cos\,nx = \frac{1}{2}(sen\,[(m-n)x] + sen\,[(m+n)x])$$

$$cos\,mx\,cos\,nx = \frac{1}{2}(cos\,[(m-n)x] + cos\,[(m+n)x])$$

Problemas

1) $\int cos^5 x\, dx$

2) $\int sen^3 x\, cos^2 x dx$

3) $\int cos^3 x\, sen^4 x\, dx$

4) $\int sen^4 x\, dx$

5) $\int tan^6 3x\, dx$

6) $\int sec^4 x\, dx$

7) $\int cot^5 2x\, dx$

8) $\int tan^6 x\, sec^4 x\, dx$

9) $\int tan^5 2x\, sec^4 2x\, dx$

10) $\int sec^5 x\, tan^4 x\, dx$

11) $\int cot^3 x\, csc^3 x\, dx$

12) $\int cot^3 x\, dx$

13) $\int sec^6 4x \tan 4x\ \ dx$

14) $\int cot^2 3x\, csc^4 3x\, dx$

15) $\int \cos 4x \cos 3x\ \ dx$

16) $\int sen\ 3y \cos 5y\ \ dy$

17) $\int sen5\theta\ sen\theta\ d\theta$

18) $\int e^x tan^4(\ e^x)\ dx$

19) $\int \frac{sec^4(\ln x)}{x} dx$

20) $\int (\tan 2x + \cot 2x)^2 dx$

21) $\int \frac{2\ sen\ w - 1}{cos^2 w} dw$

22) $\int \frac{tan^3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

23) $\int \frac{tan^4 y}{sec^5 y} dy$

Problemas

1) $\int cos^5x\, dx$

$$\int cos^5x\, dx = \int cos^4x\,(\cos x)\, dx$$

$$= \int (1 - sen^2x)^2 \cos x\, dx$$

$$= \int (1 - 2sen^2x + sen^4x) \cos x\, dx$$

$$= \int \cos x\;\; dx - 2\int sen^2x \cos x\;\; dx\; + \int sen^4x \cos x\, dx$$

$$= senx - \frac{2}{3}sen^3x + \frac{1}{5}sen^5x + C$$

2) $\int sen\,^3x\; cos^2xdx$

$$\int sen\,^3x\; cos^2x\, dx = \int sen\,^2x\; cos^2x\;(sen\;x)dx$$

$$= \int (1 - cos\,^2x)\; cos^2x\; sen\;x\; dx$$

$$= \int\; cos^2sen\;x\;dx - \int cos^4x\;sen\;x\;dx$$

$$= -\frac{1}{3}cos^3x - \left(-\frac{1}{5}cos^5x\right) + C$$

$$= -\frac{1}{3}cos^3x - \left(-\frac{1}{5}cos^5x\right) + C$$

3) $\int cos^{3}x\ sen^{4}x\ dx$

$$\int cos^{3}x\ sen^{4}x\ dx = \int cos^{2}x\ sen^{4}x\ (\cos x)dx$$

$$= \int (1 - sen^{2}x)\ sen^{4}x\ (\cos x)\ dx$$

$$= \int sen^{4}x \cos x\ \ dx - \int sen^{6}x\ \ \cos x\ \ dx$$

$$= \frac{1}{5} sen^{5}x - \frac{1}{7} sen^{7}x + C$$

4) $\int sen^{4}x\ dx$

$$\int sen^{4}x\ dx = \int sen^{2}x\ sen^{2}x\ dx$$

$$= \int \left(\frac{(1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{(1 - \cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + cos^{2}2x)\ dx$$

$$= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x\ dx + \frac{1}{4} \int cos^{2}2x\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\ x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} sen\ 2x\right) + \int \left(\frac{(1 + \cos 4x}{2}\right)\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\ x - \frac{1}{4} sen\ 2x + \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos 4x\ \ dx$$

$$= \frac{1}{4}\ x - \frac{1}{4} sen\ 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4} sen\ 4x\right) + C$$

$$= \frac{3}{8}\ x - \frac{1}{4} sen\ 2x + \frac{1}{32} sen\ 4x + C$$

5) $\int tan^6 3x\, dx$

$$\int tan^6 3x\, dx = \int tan^4 3x\, tan^2 3x\, dx$$

$$= \int tan^4 3x(sec^2 3x - 1)dx$$

$$= \int tan^4 3x sec^2 3x\, dx - \int tan^4 3x\, dx$$

$$= \frac{1}{15} tan^5 3x - \int tan^2 3x\, tan^2 3x\, dx$$

$$= \frac{1}{15} tan^5 3x - \int tan^2 3x(sec^2 3x - 1)dx$$

$$= \frac{1}{15} tan^5 3x - \int tan^2 3x sec^2 3x\, dx + \int tan^2 3x\, dx$$

$$= \frac{1}{15} tan^5 3x - \frac{1}{9} tan^3 3x + \int (\sec^2 3x - 1)\, dx$$

$$= \frac{1}{15} tan^5 3x - \frac{1}{9} tan^3 3x + \int \sec^2 3x\, dx - \int dx$$

$$= \frac{1}{15} tan^5 3x - \frac{1}{9} tan^3 3x + \frac{1}{3} tan 3x - x + C$$

6) $\int sec^4 x\, dx$

$$\int sec^4 x\, dx = \int sec^2 x\, sec^2 x\, dx$$

$$= \int sec^2 x\, (tan^2 x + 1)\, dx$$

$$= \int sec^2 x\, tan^2 x\, dx + \int sec^2 x\, dx$$

$$= \frac{1}{3} tan^3 x + \tan x + C$$

7) $\int cot^5 2x\, dx$

$$\int cot^5 2x\, dx = \int cot^2 2x\, cot^2 2x\, dx$$

$$= \int cot^3 2x\,(csc^2 2x - 1)\, dx$$

$$= \int cot^3 2x\, csc^2 2x\, dx - \int cot^3 2x\, dx$$

$$= \int cot^3 2x\, csc^2 2x\, dx - \int cot^2 2x\, cot 2x\, dx$$

$$= -\frac{1}{8} cot^4 2x - \int (csc^2 2x - 1)\, cot 2x\, dx$$

$$= -\frac{1}{8} cot^4 2x - \int csc^2 2x\, cot 2x\, dx + \int cot 2x\, dx$$

$$= -\frac{1}{8} cot^4 2x + \frac{1}{4} cot^2 2x + \frac{1}{2} ln|sen 2x| + C$$

8) $\int tan^6 x\, sec^4 x\, dx$

$$\int tan^6 x\, sec^4 x\, dx = \int tan^6 x\, sec^2 x (sec^2 x)\, dx$$

$$= \int tan^6 x\,(tan^2 x + 1)(sec^2 x)\, dx$$

$$= \int tan^8 x\; sec^2 x\, dx + \int tan^6 x\; sec^2 x\, dx$$

$$= -\frac{1}{9} tan^9 x + \frac{1}{7} tan^7 x + C$$

9) $\int tan^5 2x\, sec^4 2x\; dx$

$$\int tan^5 2x\, sec^4 2x\; dx = \int tan^5 2x\, sec^2 2x (sec^2 2x)\; dx$$

$$= \int tan^5 2x\; (tan^2 2x + 1)(sec^2 2x)\; dx$$

$$= \int tan^7 2x\;\; sec^2 2x\; dx + \int tan^5 2x\;\; sec^2 2x\; dx$$

$$= -\frac{1}{16} tan^8 2x + \frac{1}{12} tan^6 2x + C$$

10) $\int sec^5 x\, tan^4 x\; dx$

$$\int sec^5 x\, tan^4 x\; dx = \int sec^2 2x\, tan^2 2x\; (\sec x \tan x)\; dx$$

$$= \int sec^4 x\; (sec^2 x - 1)(\sec x \tan x)\; dx$$

$$= \int sec^6 x (\sec x \tan x)\;\; dx - \int sec^4 x\; (\sec x \tan x)\; dx$$

$$= \frac{1}{7} sec^7 x - \frac{1}{5} sec^5 x + C$$

11) $\int cot^3 x\, csc^3 x\; dx$

$$\int cot^3 x\, csc^3 x\; dx = \int cot^2 x\, csc^2 x\; (cotx\; cscx)\; dx$$

$$= \int\;\; (csc^2 x - 1)\; csc^2 x (cotx\; cscx)\; dx$$

$$= \int csc^4 x (cotx\; cscx)\; dx - \int csc^2 x (cotx\; cscx)\; dx$$

$$= -\frac{1}{5} csc^5 x + \frac{1}{3} csc^3 x + C$$

12) $\int cot^3x\, dx$

$$\int cot^3xdx = \int cotx\,(cot^2x)\,dx$$

$$= \int cotx\,(csc^2 2x - 1)\,dx$$

$$= \int cotx\, csc^2x\, dx - \int cotx\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}cot^2x - \frac{1}{2}ln|sen2x| + C$$

13) $\int sec^6 4x \tan 4x\ \ dx$

$$\int sec^6 4x \tan 4x\, dx = \int sec^5 4x\,(\sec 4x \tan 4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}sec^6 4x\right) + C$$

$$= \frac{1}{24}sec^6 4x + C$$

14) $\int cot^2 3x\, csc^4 3x\, dx$

$$\int cot^2 3x\, csc^4 3x\ \ dx = \int cot^2 3x\, csc^2 3x\, csc^2 3x\ \ dx$$

$$= \int cot^2 3x(cot^2 3x + 1)\, csc^2 3x\, dx$$

$$= \int cot^4 3x\, csc^2 3x\, dx + \int cot^2 3x\, csc^2 3x\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{5}cot^5 3x\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}cot^3 3x\right) + C$$

$$= -\frac{1}{15}cot^5 3x - \frac{1}{9}cot^3 3x + C$$

15) $\int \cos 4x \cos 3x \; dx$

$$\int \cos 4x \cos 3x \; dx = \frac{1}{2}\int [cos(4-3)x + cos(4+3)x]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int cosx\, dx + \frac{1}{2}\int \cos 7x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}senx + \frac{1}{14}sen\ 7x + C$$

16) $\int sen\ 3y \cos 5y \; dy$

$$\int sen\ 3y \cos 5y \; dy = \frac{1}{2}\int [sen(3-5)y + sen(3+5)y\ ]dy$$

$$= \frac{1}{2}\int sen(-2y)dy + \frac{1}{2}\int sen\ 8y\, dy$$

$$= -\frac{1}{2}\int sen\ 2y\, dy + \frac{1}{2}\int sen\ 8y\, dy$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2y\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\cos 8y\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}\cos 2y - \frac{1}{16}\cos 8y + C$$

17) $\int sen5\theta\ sen\theta\ d\theta$

$$\int sen5\theta\ sen\theta\ d\theta = \frac{1}{2}\int [cos(5-1)\theta + sen(5+1)\theta\ ]d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 4\theta \; d\theta \; - \frac{1}{2}\int \cos 6\theta \; d\theta$$

$$= \frac{1}{8}sen\ 4\theta - \frac{1}{12}sen\ 6\theta + C$$

18) $\int e^x tan^4(e^x)\, dx$

$$u = e^x \; ; \qquad du = e^x dx$$

$$\int e^x tan^4(e^x)\, dx = \int tan^4 u\, du$$

$$= \int tan^2 u(sec^2 u - 1)du$$

$$= \int tan^2 u\, sec^2 u\, du - \int (sec^2 u - 1)du$$

$$= \frac{1}{3} tan^3 u - \tan u + u + C$$

$$= \frac{1}{3} tan^3 e^x - \tan e^x + e^x + C$$

19) $\int \frac{sec^4(\ln x)}{x} dx \qquad u = \ln x \; ; \; du = \frac{dx}{x}$

$$\int \frac{sec^4(\ln x)}{x} dx = \int sec^4 u\, du$$

$$= \int sec^2 u\, sec^2 u\, du$$

$$= \int (tan^2 u + 1) d(\tan u)$$

$$= \frac{1}{3} tan^3 u + \tan u + C$$

$$= \frac{1}{3} tan^3(\ln x) + \tan(\ln x) + C$$

20) $\int (\tan 2x + \cot 2x)^2 dx$

$$\int (\tan 2x + \cot 2x)^2 dx = \int (tan^2 2x + 2 + cot^2 2x)\ dx$$

$$= \int (sec^2 2x - 1 + 2 + csc^2 2x - 1)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\tan 2x - \frac{1}{2}\cot 2x + C$$

21) $\int \frac{2\ sen\ w - 1}{cos^2 w} dw$

$$\int \frac{2\ sen\ w - 1}{cos^2 w} dw = \int (2\tan w \sec w - sec^2 w) dw$$

$$= \int 2\tan w \sec w\ \ dw - \int sec^2 w\, dw$$

$$= 2\sec w - \tan w + C$$

22) $\int \frac{tan^3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad u = \sqrt{x}\ ; \quad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$$\int \frac{tan^3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2\int tan^3 u\ \ du$$

$$= 2\int \tan u\ tan^2 u\ \ du$$

$$= 2\int \tan u\ (sec^2 u - 1)\ du$$

$$= 2\int \tan u\ (sec^2 u\ du - 1)\ du - 2\int \tan u\ \ du$$

$$= tan^2 u - \ln|\sec u| + C$$

$$= tan^2\sqrt{x} - 2\ ln\left|sec\sqrt{x}\right| + C$$

23) $\int \frac{tan^4 y}{sec^5 y} dy$

$$\int \frac{tan^4 y}{sec^5 y} dy = \int \frac{sin^4 y}{cos^4 y} \cdot \ cos^5 y\ dy$$

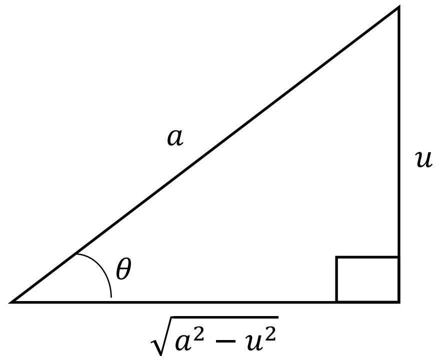
$$= \int sin^4 y(\cos y)\ dy$$

$$= \frac{1}{5} sen^5 y + C$$

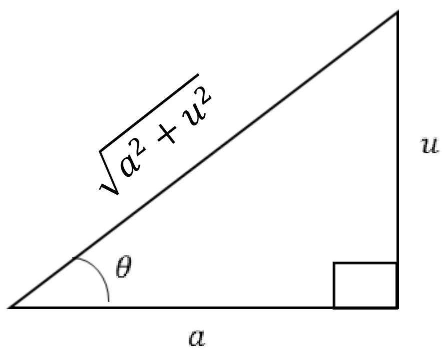
SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1. Para integrales que implican $\sqrt{a^2 - u^2}$, sea $\boldsymbol{u = asen\theta}$

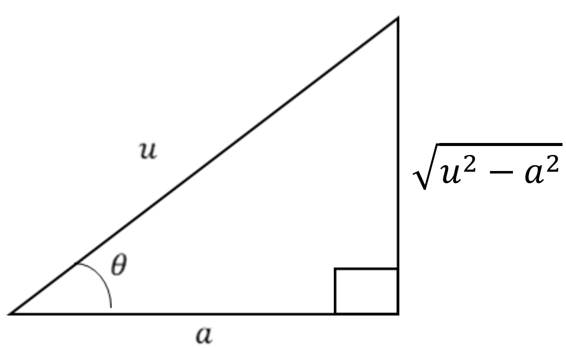
   Entonces $\sqrt{a^2 - u^2} = acos\theta$, donde $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$



2. Para integrales que implican $\sqrt{a^2 + u^2}$, sea $\boldsymbol{u = atan\theta}$
   Entonces $\sqrt{a^2 + u^2} = asec\theta$, donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$



3. Para integrales que contienen $\sqrt{u^2 - a^2}$, sea $\boldsymbol{u = asec\theta}$



Entonces,

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \begin{cases} atan\theta \ para \ u > a, donde \ 0 \leq \theta < \pi/2 \\ -atan\theta \ para \ u < -a, donde \ \pi/2 < \theta \leq \pi \end{cases}$$

Problemas

1) $\int \frac{4}{x^2\sqrt{16-x^2}}dx$

2) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-25}}dx$

3) $\int \frac{9x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$

4) $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx$

5) $\int x^2 \sin^{-1} x \, dx$

Solucionario

1) $\int \frac{4}{x^2\sqrt{16-x^2}}dx$

$a^2 = 16 \Longrightarrow a = 4$

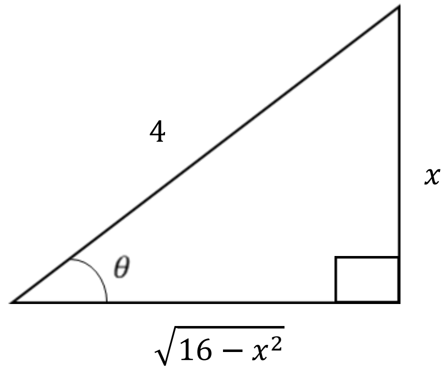
$u^2 = x^2 \Rightarrow u = x$

$u = asen\theta$

$x = 4sen\theta \Rightarrow x^2 = 16sen^2\theta$

$dx = 4cos\theta\, d\theta$

$\sqrt{16-x^2} = 4cos\theta$



$$\int \frac{4}{x^2\sqrt{16-x^2}}dx = 4\int \frac{4cos\theta\, d\theta}{(16sen^2\theta)(4cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{sen^2\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int csc^2\theta\, d\theta$$

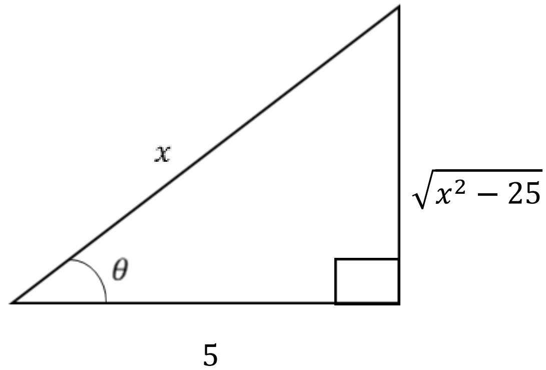
$$= \frac{1}{4}(-cot\theta) + C$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{16-x^2}}{x}\right) + C$$

$$= -\frac{\sqrt{16-x^2}}{4x} + C$$

2) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-25}}dx$

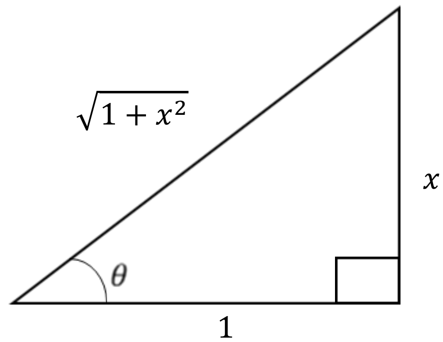
$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$
$u^2 = x^2 \Rightarrow u = x$
$u = asec\theta$
$x = 5sec\theta \Rightarrow x^3 = 125sec^3\theta$
$dx = 5sec\theta tan\theta\, d\theta$
$\sqrt{x^2-25} = 5tan\theta$



$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-25}}dx = \int \frac{(125sec^3\theta)(5sec\theta tan\theta)\, d\theta}{5tan\theta}$$
$$= 125\int sec^4\, d\theta$$
$$= 125\int sec^2\theta\, sec^2\theta\, d\theta$$
$$= 125\int (1+tan^2\theta)sec^2\theta\, d\theta$$
$$= 125\int sec^2\theta\, d\theta + 125\int tan^2\theta sec^2\theta\, d\theta$$
$$= 125tan\theta + \frac{125}{3}tan^3\theta + C$$
$$= 125\left(\frac{\sqrt{x^2-25}}{5}\right) + \frac{125}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2-25}}{5}\right)^3 + C$$
$$= 25\sqrt{x^2-25} + \frac{1}{3}(x^2-25)^{3/2} + C$$

3) $\int \frac{9x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$
$u^2 = x^2 \Rightarrow u = x$
$u = atan\theta$
$x = tan\theta \Rightarrow x^3 = tan^3\theta$
$dx = sec^2\theta\, d\theta$
$\sqrt{1+x^2} = sec\theta$



$$\int \frac{9x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = 9\int \frac{tan^3\theta sec^2\theta\, d\theta}{sec\theta}$$

$$= 9\int tan^3\theta sec\theta\, d\theta$$
$$= 9\int tan^2\theta(tan\theta sec\theta)\, d\theta$$
$$= 9\int (sec^2\theta - 1)(tan\theta sec\theta)\, d\theta$$
$$= 9\int sec^2\theta(tan\theta sec\theta)\, d\theta - 9\int (tan\theta sec\theta)\, d\theta$$
$$= 9\left(\frac{1}{3}sec^3\theta\right) - 9sec\theta + C$$
$$= 3sec^3\theta - 9sec\theta + C$$
$$= 3\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3 - 9\sqrt{1+x^2} + C$$

4) $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

$u^2 = x^2 \Rightarrow u = x$

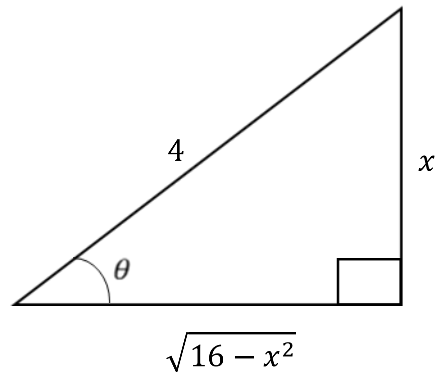
$u = a sen\theta$

$x = 4sen\theta \Rightarrow x^2 = 16sen^2\theta$

$dx = 4cos\theta\, d\theta$

$\sqrt{16-x^2} = 4cos\theta$

$x = 4sen\theta \rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)$



$$\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}\,dx = \int \frac{(16sen^2\theta)(4cos\theta\, d\theta)}{4cos\theta}$$

$$= 16\int sen^2\theta\, d\theta$$

$$= 16\int \left(\frac{1-cos2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= 8\int d\theta - 8\int cos2\theta\, d\theta$$

$$= 8\theta - 8\left(\frac{1}{2}sen2\theta\right) + C$$

$$= 8\theta - 4sen2\theta + C$$

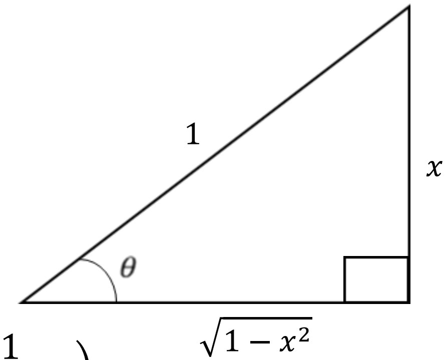
$$= 8\theta - 4(2sen\theta cos\theta) + C$$

$$= 8\theta - 8sen\theta cos\theta + C$$

$$= 8\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) - 8\left(\frac{x}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{16-x^2}}{4}\right) + C$$

$$= 8\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{x\sqrt{16-x^2}}{2} + C$$

5) $\int x^2 \sin^{-1} x\, dx$



$$u = \sin^{-1} x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$dv = x^2 dx \Rightarrow v = \int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3$$

$$\int x^2 \sin^{-1} x\, dx = \frac{1}{3}x^3 \sin^{-1} x - \int \left(\frac{1}{3}x^3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \sin^{-1} x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Aplicando sustitución trigonométrica en la expresión:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$u^2 = x^2 \Rightarrow u = x$$

$$x = asen\theta$$

$$dx = cos\theta\, d\theta$$

$$\sqrt{1-x^2} = cos\theta$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{(sen\theta)^3 (cos\theta)\, d\theta}{cos\theta}$$

$$= \int sen^3\theta\, d\theta$$

$$= \int sen^2\theta sen\theta\, d\theta$$

$$= \int (1 - cos^2\theta) sen\theta\, d\theta$$

$$= \int sen\theta\, d\theta - \int cos^2\theta sen\theta\, d\theta$$

$$= -cos\theta - \left(-\frac{1}{3}cos^3\theta\right) + C$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3 + C$$

$$\int x^2 \sin^{-1} x\,dx = \frac{1}{3}x^3 \sin^{-1} x - -\frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \tfrac{1}{3}x^3 \sin^{-1} x - \tfrac{1}{3}\left[-\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3\right] + C$$

$$= \tfrac{1}{3}x^3 \sin^{-1} x + \tfrac{1}{3}\sqrt{1-x^2} - \tfrac{1}{9}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3 + C$$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES POR FRACCIONES PARCIALES, CUADNO EL DENOMINADOR TIENE FACTORES LINEALES Y CUANDO CONTIENE FACTORES CUADRÁTICOS

Descomposición de $\mathrm{N(x)/D(x)}$ en fracciones parciales

1. Cuando $\mathrm{N(x)/D(x)}$ es una fracción impropia (es decir, el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador), realice la división para obtener

$$\frac{N(x)}{D(x)} = (un\ polinomio) + \frac{N_1(x)}{D(x)}$$

2. Factorice completamente el denominador $\mathrm{D(x)}$ en factores de la forma

$(\mathrm{px + q})^m$ y $(\mathrm{a}x^2 + \mathrm{bx + c})^n$ donde $\mathrm{a}x^2 + \mathrm{bx + c}$ es irreducible.

3. Factores lineales: Para cada factor de la forma $(\mathrm{px + q})^m$, la descomposición en fracciones parciales debe incluir la siguiente suma de m fracciones.

$$\frac{A_1}{(px+q)} + \frac{A_2}{(px+q)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(px+q)^m}$$

4. Factores cuadráticos: Para cada factor de la forma $(\mathrm{a}x^2 + \mathrm{bx + c})^n$, la descomposición en fracciones parciales debe incluir la siguiente suma de n fracciones.

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2+bx+c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Estrategias para resolver la ecuación básica Factores lineales

1. Sustituir en la ecuación básica las raíces de los distintos factores lineales.

2. Para factores lineales repetidos, usar los coeficientes lineales determinados en la estrategia 1 para reescribir la ecuación básica. Entonces sustituir otros valores convenientes de x y resolver para los coeficientes restantes.

Factores cuadráticos

1. Desarrollar la ecuación básica.

2. Agrupar términos atendiendo a las potencias de x.

3. Igualar los coeficientes de cada potencia para obtener un sistema de ecuaciones lineales conteniendo $\mathrm{A, B, C}$, etc.

4. Resolver el sistema de ecuaciones lineales.

Problemas

1) $\int \frac{1}{x^2-9}dx$
2) $\int \frac{1}{4x^2-1}dx$
3) $\int \frac{4x^2}{x^3+x^2-x+1}dx$
4) $\int \frac{6x}{x^3-8}dx$
5) $\int \frac{x}{16x^4-1}dx$
6) $\int \frac{x^2-x+9}{(x^2+9)^2}dx$

Solucionario

1) $\int \frac{1}{x^2-9}dx$

$x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

Escribimos:

$$\frac{1}{(x+3)(x-3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3}$$

Multiplicando por el M.C.D. $(x+3)(x-3)$, obtenemos la ecuación básica.

$1 = A(x-3) + B(x+3)$ Ecuación Básica

Al resolver para A, sea $x = -3$ y obtenemos:

$$1 = A(-6) \Longrightarrow A = -\frac{1}{6}$$

Al resolver para B sea $x = 3$ y obtenemos:

$$1 = B(6) \Longrightarrow B = \frac{1}{6}$$

Reemplazando los valores de A y B.

$$\int \frac{1}{x^2-9}dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{6}}{x+3} + \frac{\frac{1}{6}}{x-3} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{6}\int \frac{1}{x+3}dx + \frac{1}{6}\int \frac{1}{x-3}dx$$

$$= -\frac{1}{6}\ln|x+3| + \frac{1}{6}\ln|x-3| + C$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$$

2) $\int \frac{1}{4x^2-1}dx$

$4x^2 - 1 = (2x+1)(2x-1)$

Escribimos:

$$\frac{1}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{2x-1}$$

Multiplicando por el M.C.D. $(2x+1)(2x-1)$, obtenemos la ecuación básica.

$1 = A(2x-1) + B(2x+1)$ Ecuación Básica

Al resolver para A, sea $x = -\frac{1}{2}$ y obtenemos:

$$1 = A(-2) \Longrightarrow A = -\frac{1}{2}$$

Al resolver para B, sea $x = \frac{1}{2}$ y obtenemos:

$$1 = B(2) \Longrightarrow B = \frac{1}{2}$$

Reemplazando los valores de A y B.

$$\int \frac{1}{4x^2-1}dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{2x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{2x-1} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{2x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x-1}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln|2x-1|\right] + C$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|2x+1| + \frac{1}{4}\ln|2x-1| + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right| + C$$

3) $\int \frac{4x^2}{x^3+x^2-x+1}dx$

$x^3 + x^2 - x + 1 = (x-1)(x+1)^2$

Escribimos:

$$\frac{4x^2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

Multiplicando por el M.C.D. $(x-1)(x+1)^2$, obtenemos la ecuación básica.

$4x^2 = A(x+1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x-1)$ Ecuación Básica

Al resolver para A, sea $x = 1$ y obtenemos:
$4 = A(2)^2 \Longrightarrow A = 1$

Al resolver para C, sea $x = -1$ y obtenemos:

$4 = C(-2) \Longrightarrow C = -2$

Al resolver para B, sea $x = 0$ y obtenemos:

$0 = A - B - C$, sustituyendo los valores de A y C

$0 = 1 - B + 2 \Longrightarrow B = 3$

$$\int \frac{4x^2}{x^3+x^2-x+1}dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{x-1}dx + 3\int \frac{1}{x+1}dx - 2\int \frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$= \ln|x-1| + 3\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + C$$

4) $\int \frac{6x}{x^3-8}dx$

$x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$

Escribimos:

$$\frac{6x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x^2+2x+4}$$

Multiplicando por el M.C.D. $(x-2)(x^2+2x+4)$, obtenemos la ecuación básica.

$6x = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2)$ Ecuación Básica

Al resolver para A, sea $x = 2$ y obtenemos: $12 = 12A \Longrightarrow A = 1$

Al resolver para C, sea $x = 0$ y obtenemos:

$0 = 4A - 2C \Longrightarrow C = 2$

Al resolver para B, sea $x = 1$ y obtenemos:

$6 = 7A - B - C \Longrightarrow B = -1$

$$\int \frac{6x}{x^3-8}dx = \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{-x+2}{x^2+2x+4}\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{x-2}dx + \int \frac{-x-1+3}{x^2+2x+4}dx$$

$$= \int \frac{1}{x-2}dx + \int \frac{-(x+1)}{x^2+2x+4}dx + \int \frac{3}{x^2+2x+4}dx$$

$$= \ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+4| + 3\int \frac{1}{(x+1)^2+3}dx$$

$$= \ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+4| + 3\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)\right] + C$$

$$= \ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+4| + \frac{3}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

5) $\int \frac{x}{16x^4-1}dx$

$16x^4-1=(4x^2+1)(4x^2-1)$

$=(2x+1)(2x-1)(4x^2+1)$

Escribimos:

$$\frac{x}{(2x+1)(2x-1)(4x^2+1)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{2x+1}+\frac{Cx+D}{(4x^2+1)}$$

Multiplicando por el M.C.D. $(2x+1)(2x-1)(4x^2+1)$, obtenemos la ecuación básica.

$x=A(2x+1)(4x^2+1)+B(2x-1)(4x^2+1)+(Cx+D)(2x+1)(2x-1)$ Ecuación Básica

Al resolver para A, sea $x=\frac{1}{2}$ y obtenemos:

$$\frac{1}{2}=4A\Longrightarrow A=\frac{1}{8}$$

Al resolver para B, sea $x=-\frac{1}{2}$ y obtenemos:

$$-\frac{1}{2}=-4B\Longrightarrow B=\frac{1}{8}$$

Al resolver para D, sea $x=0$ y obtenemos:

$$0=A-B-D$$

$$0=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}-D\Longrightarrow D=0$$

Al resolver para C, sea $x=1$ y obtenemos:

$$1=15A+5B+3C+3D\Longrightarrow C=-\frac{1}{2}$$

$$\int\frac{x}{16x^4-1}dx=\int\left(\frac{\frac{1}{8}}{2x-1}+\frac{\frac{1}{8}}{2x+1}+\frac{-\frac{1}{2}x}{(4x^2+1)}\right)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{2x-1}dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{2x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{x}{4x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\ln|2x-1|\right] + \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{8}\ln|4x^2+1|\right] + C$$

$$= \frac{1}{16}\ln|2x-1| + \frac{1}{16}\ln|2x+1| - \frac{1}{16}\ln|4x^2+1| + C$$

$$= \frac{1}{16}\ln|(2x-1)(2x+1)| - \frac{1}{16}\ln|4x^2+1| + C$$

$$= \frac{1}{16}\ln|4x^2-1| - \frac{1}{16}\ln|4x^2+1| + C$$

$$= \frac{1}{16}\ln\left|\frac{4x^2-1}{4x^2+1}\right| + C$$

6) $\int \frac{x^2-x+9}{(x^2+9)^2}dx$

Escribimos:

$$\frac{x^2-x+9}{(x^2+9)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+9)}+\frac{Cx+D}{(x^2+9)^2}$$

Multiplicando por el M.C.D. $(x^2+9)^2$, obtenemos la ecuación básica.

$x^2-x+9=(Ax+B)(x^2+9)+(Cx+D)$ Ecuación Básica

$$x^2-x+9=Ax^3+9Ax+Bx^2+9B+Cx+D$$

$$x^2-x+9=Ax^3+Bx^2+(9A+C)x+9B+D$$

Igualando coeficientes, se tiene que:

$$A=0;\ B=1;\ 9A-C=-1\Rightarrow C=-1$$

$$9B+D=9\Rightarrow D=9$$

$$\int \frac{x^2-x+9}{(x^2+9)^2}dx=\int\left(\frac{1}{x^2+9}+\frac{-x}{(x^2+9)^2}\right)dx$$

$$=\int\frac{1}{x^2+9}dx-\int\frac{x}{(x^2+9)^2}dx$$

$$=\frac{1}{3}\tan^{-1}(\frac{x}{3})-\left[-\frac{1}{2(x^2+9)}\right]+C$$

$$=\frac{1}{3}\tan^{-1}(\frac{x}{3})+\frac{1}{2(x^2+9)}+C$$

$$u=x^2+9\ \Rightarrow du=2xdx$$

$$\frac{1}{2}du=xdx$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2}=\frac{1}{2}\int u^{-2}du$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{u^{-1}}{-1}\right)$$

$$=-\frac{1}{2(x^2+9)}$$