La Carga Eléctrica

Una carga eléctrica es una propiedad intrínseca de algunas partículas subatómicas (como electrones y protones) que genera fuerzas de atracción y repulsión a través de campos electromagnéticos, haciendo que la materia interactúe con estos campos. La atracción y repulsión eléctricas en ocasiones se resume como "carcas iguales se repelen, y cargas opuestas se atraen". Sin embargo, tenga en cuenta que "cargas iguales" no significa que las dos cargas sean idénticas, sino solo que ambas cargas tienen el mismo signo algebraico (ambas son positivas o ambas negativas). La expresión "cargas opuestas" quiere decir que los dos objetos tienen una carga eléctrica de signos diferentes (una positiva y la otra negativa). Esta carga esta dada en unidades de Coulombs (C).

La estructura de los átomos se describe en términos de tres partículas: el **electrón,** con carga negativa; el **protón**, cuya carga es positiva; y el **neutrón,** sin carga.

Las masas de las partículas individuales que usamos comúnmente, con la precisión que se conocen actualmente, son:

$$\text{Masa del electrón} = m_e = 9.10938215(45) \times 10^{-31}\text{kg}$$

$$\text{Masa del protón} = m_p = 1.672621637(83) \times 10^{-27}\text{kg}$$

Y sus cargas:

$$\text{Carga del electrón} = q_e = -1.602 \times 10^{-19}\text{ C}$$

$$\text{Carga del protón} = q_p = 1.602 \times 10^{-19}\text{ C}$$

Conductores, aislantes y cargas inducidas

Algunos materiales permiten que las cargas eléctricas se desplacen con facilidad de una región del material a otra, mientras que otros materiales no lo permiten. Los conductores facilitan el desplazamiento de las cargas a través de ellos, mientras que los aislantes no lo hacen. La mayoría de los metales son buenos conductores; en cambio los no metales, en general, son aislantes.

Algunos materiales se denominan *semiconductores* porque tienen propiedades internas entre las de los buenos conductores y las de los buenos aislantes.

Ley de Coulomb

Las **cargas puntuales**, en realidad no existen, ya que son una idealización para facilitar el estudio, esto es debido a los cuerpos cargados cuando son muy pequeños en comparación con la distancia "r" que los separa y la misma fuerza eléctrica es proporcional a $\frac{1}{r^2}$

La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales también depende de la cantidad de carga en cada cuerpo, la que se denotará con "q"

Entonces se estableció la que ahora se conoce como la **Ley de Coulomb:**

La magnitud de la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales es directamente proporcional al producto de las cargas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

En términos matemáticos, la magnitud "F" de la fuerza que cada una de las dos cargas puntuales, q_1 y q_2, separadas una distancia r, ejerce sobre la otra se expresa como:

$$F = k\frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

Las direcciones de las fuerzas que las dos cargas ejercen una sobre la otra siempre se encuentran a lo largo de la recta que las une. Cuando las cargas q_1 y q_2 tienen el mismo signo, ya sea positivo o negativo, las fuerzas son de repulsión; cuando las cargas tienen signos opuestos, las fuerzas son de atracción. Esta fuerza esta dada por unidades de Newtons (N).

Constantes eléctricas fundamentales

El valor de la constante de proporcionalidad *k* en la ley de Coulomb que aparece en la ecuación es igual a:

$$k = 8.987551787 \times 10^9\ \frac{Nm^2}{C^2} \approx 9 \times 10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}$$

La constante k de la ecuación se representa por lo general como $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ donde ϵ_0 ("épsilon cero") es otra constante.

Entonces la **Ley de coulomb** también es:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

La constante en la ecuación es aproximadamente:

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\frac{C^2}{Nm^2}$$

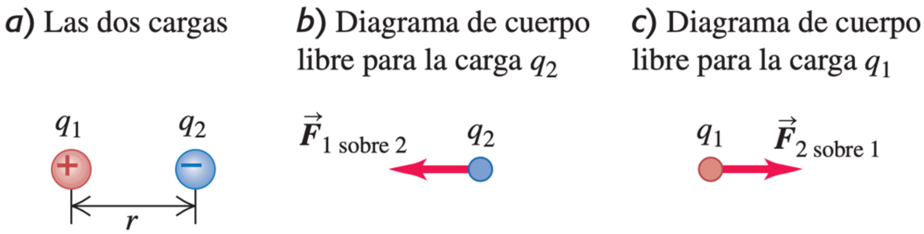
Fuerza entre dos cargas puntuales

Ejemplo:

Dos cargas puntuales, $q_1 = +25\ nC$ y $q_2 = -75\ nC$, están separadas por una distancia $r = 3.0\ cm$ Calcule la magnitud y la dirección de:

a) La fuerza eléctrica que q_1 ejerce sobre q_2.

b) La fuerza eléctrica que q_2 ejerce sobre q_1.



Usamos la ley de Coulomb para calcular las magnitudes de las fuerzas. Los signos de las cargas determinarán las direcciones de las fuerzas. Después de convertir las unidades de r a metros y las de las cargas q_1 y q_2 a coulomb, la ecuación nos da:

$$F_{1\ sobre\ 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

$$F_{1(2)} = \left(9 \times 10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}\right)\frac{|(25 \times 10^{-9} C)(75 \times 10^{-9} C)|}{(0.030m)^2}$$

$$F_{1(2)} = 0.019\ \text{N}$$

Las cargas tienen signos opuestos, de modo que la fuerza es de atracción, es decir, la fuerza que actúa sobre q_2 está dirigida hacia q_1 a lo largo de la línea que une las dos cargas.

b) Procediendo como en el inciso anterior, tenemos:

$$F_{1(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_2 q_1|}{r^2}\ entoces\ F_{2\ (1)} = 0.019N$$

La fuerza de atracción q_1 actúa hacia la derecha, es decir hacia q_2

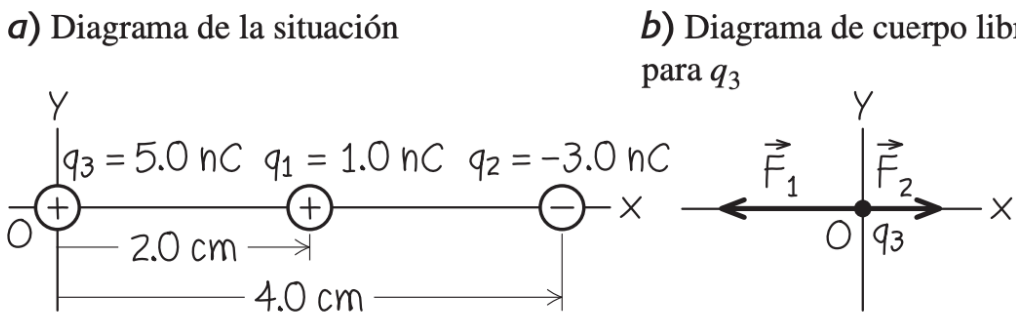
La tercera ley de Newton se aplica para la fuerza eléctrica. Aun cuando las cargas tienen diferentes magnitudes, la magnitud de la fuerza que q_2 ejerce sobre q_1 es la misma que la magnitud de la fuerza que q_1 ejerce sobre q_2 y estas dos fuerzas tienen direcciones opuestas.

Suma vectorial de las fuerzas eléctricas sobre una línea

Ejemplo:

Dos cargas puntuales se localizan en el eje x de un sistema de coordenadas. La carga $q_1 = 1.0\ nC$ está en $x = 2.0\ cm$, y la carga $q_2 = -3.0\ nC$ está en $x = 4.0\ cm$. ¿Cuál es la fuerza eléctrica total que ejercen estas dos cargas sobre una carga $q_3 = 5.0\ nC$ que se encuentra en x= 0?

Para obtener la fuerza total sobre q_3, nuestra incógnita, obtenemos la suma vectorial de las dos fuerzas eléctricas sobre ella.



La figura es un diagrama de cuerpo libre para la carga q_3, la cual es repelida por q_1 (que tiene el mismo signo) y atraída hacia q_2 (que tiene signo opuesto). $\vec{F}_{1\ sobre\ 3}$ se encuentra en la dirección $-x$ y $\vec{F}_{2\ sobre\ 3}$ está en la dirección $+x$ Después de las conversiones de unidades.

$$F_{1\ sobre\ 3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1 q_3|}{r^2{}_{13}} = \left(9.0 \times 10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}\right)\frac{|(1.0 \times 10^{-9} C)(5.0 \times 10^{-9} C)|}{(0.020 m)^2}$$

$$= 1.12 \times 10^{-4}\ \mathrm{N} = 112 \mu\mathrm{N}$$

De la misma manera se puede demostrar que $F_{2\ sobre\ 3} = 84 \mu$N. Por lo tanto, tenemos que:

$$\vec{F}_{1(3)} = (-112 \mu N)\hat{\imath} \text{ y } \vec{F}_{2(3)} = (84 \mu N)\hat{\imath}$$

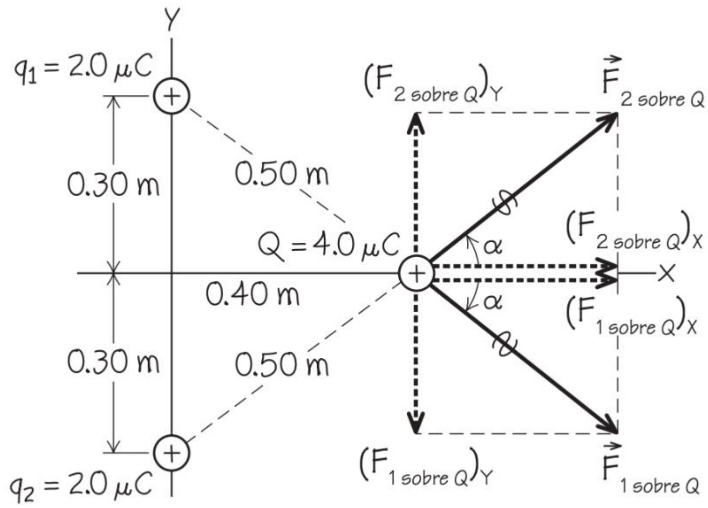
$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{1(3)} + \vec{F}_{2(3)} = (-112 \mu N)\hat{\imath} + (84 \mu N)\hat{\imath} = (-28 \mu N)\hat{\imath}$$

Suma vectorial de fuerzas eléctricas en un plano

Ejemplo:

Dos cargas iguales y positivas, $q_1 = q_2 = 2.0\ \mu C$, se localizan en $x = 0$, $y = 0.30\ m$ y $x = 0$, $y = -0.30\ m$, respectivamente. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza eléctrica total que q_1 y q_2 ejercen sobre una tercera carga $Q = 4.0\ \mu C$ en $x = 0.4$ y $y = 0$

Debemos calcular la fuerza que cada carga ejerce sobre Q y después obtener la suma vectorial de esas fuerzas. Como las tres cargas no se encuentran todas en una línea, la mejor forma de calcular las fuerzas es usar componentes.



Se muestran las fuerzas $\vec{F}_{1\ sobre\ Q}$ Y $\vec{F}_{2\ sobre\ Q}$ debidas a las cargas idénticas q_1 y q_2 las cuales se encuentran a distancias iguales de Q. De acuerdo con la ley de Coulomb, ambas fuerzas tienen magnitud:

$$F_{1,2\ sobre\ Q} = \left(9.0 \times 10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}\right) \frac{|(4.0 \times 10^{-6} C)(2.0 \times 10^{-6} C)|}{(0.50m)^2} = 0.29N$$

Las componentes x de las dos fuerzas son iguales:

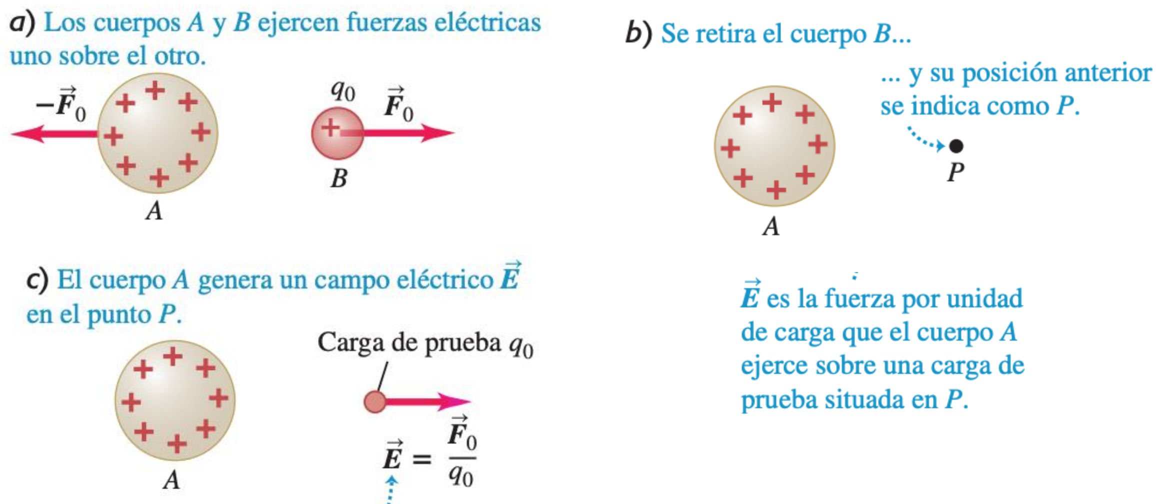
$$\left(F_{1,2(Q)}\right)_x = \left(F_{1,2(Q)}\right) \cos\alpha = (0.29N) \frac{0.40m}{0.50m} = 0.23N$$

Por simetría, vemos que las componentes y de las dos fuerzas son iguales y opuestas. Por lo tanto, su suma es igual a cero y la fuerza total $\vec{\boldsymbol{F}}$ sobre Q tiene una sola componente $x = F_x = 0.23N + 0.23N = 0.46N$. La fuerza total sobre Q se encuentra en dirección x, con una magnitud de $0.46N$.

Campo Eléctrico

Para introducir el concepto, examinemos la repulsión mutua de dos cuerpos cargados A y B . Suponga que B tiene carga q_0 y sea $\overrightarrow{F_0}$ la fuerza eléctrica que A ejerce sobre B. Una manera de concebir esta fuerza es como una fuerza a distancia, es decir, como una que actúa a través del espacio vacío sin necesidad de materia que la transmita.

Imaginemos que el cuerpo A, como resultado de la carga que porta, modifica de algún modo las propiedades del espacio que lo rodea. Después, el cuerpo B, como resultado de la carga que porta, percibe cómo el espacio se modificó en su posición. La respuesta del cuerpo B es experimentar la fuerza $\overrightarrow{F_0}$.



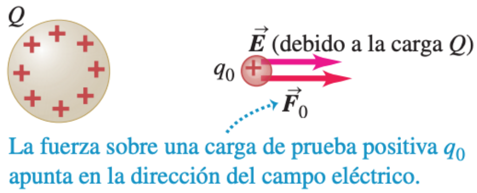
Una sola carga produce un campo eléctrico en el espacio circulante, este campo eléctrico no ejerce una fuerza neta sobre la carga que lo creo; un cuerpo no puede ejercer una fuerza sobre sí mismo. La fuerza eléctrica sobre un cuerpo cargado es ejercida por el campo eléctrico que otros cuerpos cargados originan.

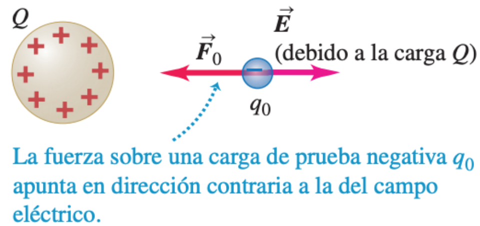
Para averiguar experimentalmente si existe un campo eléctrico en un punto específico. colocamos en el punto un pequeño cuerpo cargado, al que llamamos carga de prueba. Si la carga de prueba experimenta una fuerza eléctrica, entonces existe un campo eléctrico en ese punto. Este campo lo producen cargas distintas de q_0. La fuerza es una cantidad vectorial, por lo que el campo eléctrico también es una cantidad vectorial.

El campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}}$ en un punto se define como la fuerza eléctrica $\overrightarrow{\boldsymbol{F_0}}$ que experimenta una carga de prueba en dicho punto, dividida entre la carga q_0. Es decir, el campo eléctrico en cierto punto es igual a la fuerza eléctrica por unidad de carga que una carga experimenta en ese punto:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{F}_0}}{q_0}$$

En unidades del SI, en el cual la unidad de fuerza es N y la unidad de carga es C. la unidad para la magnitud del campo eléctrico es newton por coulomb (N/C).



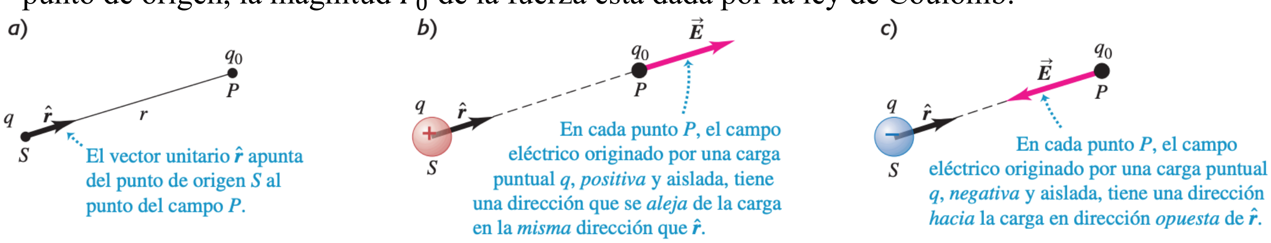


La carga q_0 puede ser positiva o negativa. Si q_0 es positiva, la fuerza $\overrightarrow{F_0}$ experimentada por la carga tiene la misma dirección que $\vec{E}$; si q_0 es negativa $\overrightarrow{F_0}$ y $\vec{E}$ tienen direcciones opuestas.

$\overrightarrow{F_0} = q_0\vec{E}$ **es solo para cargas de pruebas puntuales** La fuerza eléctrica experimentada por una carga de prueba q_0 varía de un punto a otro, de manera que el campo eléctrico también es diferente en distintos puntos. Por esta razón, la ecuación $\overrightarrow{F_0} = q_0\vec{E}$ se usa únicamente para calcular la fuerza eléctrica sobre una carga puntual. Si un cuerpo cargado tiene un tamaño suficientemente grande, el campo eléctrico $\vec{E}$ puede tener magnitudes y direcciones muy distintas en diferentes puntos del cuerpo, y el cálculo de la fuerza eléctrica neta sobre él será más complicado.

Campo eléctrico de una carga puntual

También es útil introducir un vector unitario $\hat{r}$ que apunte a lo largo de la línea que va del punto de origen al punto del campo. Este vector unitario es igual al vector desplazamiento $\vec{r}$ del punto de origen al punto del campo, dividido entre la distancia $r = |\vec{r}|$ que separa a los dos puntos; es decir, $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ Si colocamos una pequeña carga prueba q_0 en el punto del campo P, a una distancia r del punto de origen, la magnitud F_0 de la fuerza está dada por la ley de Coulomb.



La magnitud de E del campo eléctrico en P es:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q|}{r^2}$$

Usando el vector unitario $\hat{\boldsymbol{r}}$, escribimos una ecuación vectorial que proporciona tanto la magnitud como la dirección del campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}}$.

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

Magnitud del campo eléctrico para una carga puntual

Ejemplo

¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}}$ en un punto situado a 2.0 m de una carga puntual $q = 4.0nC$?

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q|}{r^2}$$

$$E = \left(9.0 \times 10^9 \ \frac{Nm^2}{C^2}\right)\left(\frac{4.0 \times 10^{-9}C}{(2.0m)^2}\right) = 9.0\frac{N}{C}$$

Este resultado $E \ = \ 9.0\frac{N}{C}$ significa que si colocamos una carga de $1.0\ C$ en un punto a $2.0\ m$ de q, experimentaría una fuerza de 9,0 N. La fuerza sobre una carga de $2.0\ C$ en ese punto sería

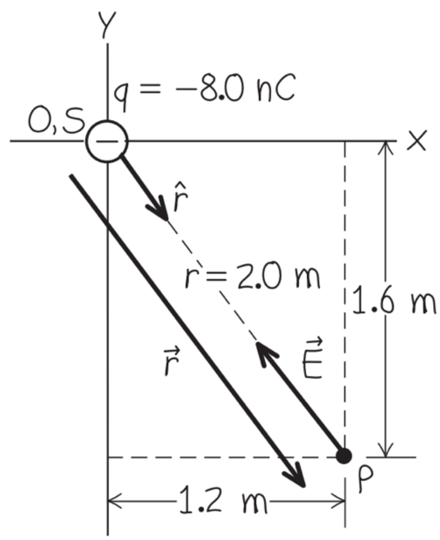
$$(2.0\ C)\left(9.0\frac{N}{C}\right) = 18 \text{ N}$$

y así sucesivamente.

Vector del campo electico de una carga puntual

Ejemplo

Una carga puntual $q = -8.0\ nC$ se localiza en el origen. Obtenga el vector del campo eléctrico en el punto del campo $x = 1.2\ m$, $y = -1.6\ m$.



Se debe calcular el vector del campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}}$ debido a una carga puntual. En la figura se muestra el esquema. Se usa la ecuación de campo vectorial, para ello, se debe obtener la distancia r que hay entre el punto de la fuente S.

Como una expresión para el vector unitario $\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r}$ que tiene la dirección de S a P.

La distancia de S a P es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{(1.2m)^2 + (-1.6m)^2}$$

$$= 2.0\ m$$

El vector unitario $\hat{\boldsymbol{r}}$ es, entonces,

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r} = \frac{x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{r}$$

$$= \frac{(1.2m)\hat{\boldsymbol{\imath}} + (-1.6m)\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{2.0\ m} = 0.60\hat{\boldsymbol{\imath}} \pm 0.80\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Entonces:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \left(9.0 \times 10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}\right)\left(\frac{-8.0 \times 10^{-9}C}{(2.0m)^2}\right)(0.60\hat{\boldsymbol{\imath}} \pm 0.80\hat{\boldsymbol{\jmath}})$$

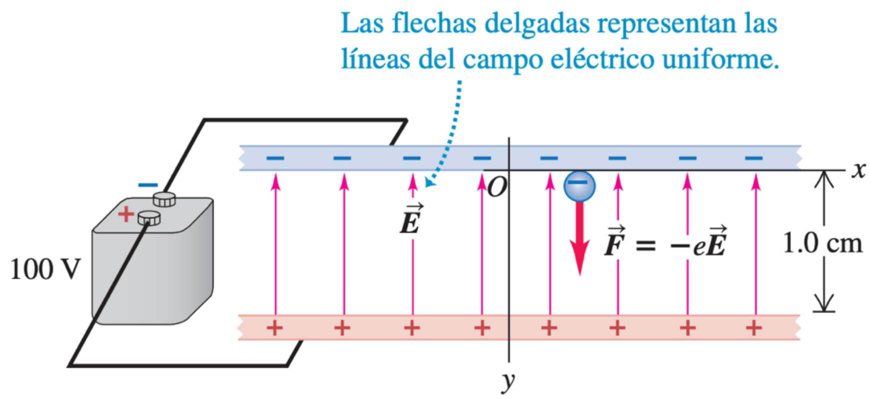
$$\vec{\boldsymbol{E}} = \left(-11\frac{N}{C}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \left(14\frac{N}{C}\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Como q es negativa, $\vec{\boldsymbol{E}}$ tiene una dirección que va del punto del campo a la carga (el punto de la fuente), en dirección opuesta a $\hat{\boldsymbol{r}}$. El cálculo de la magnitud y la dirección de $\vec{\boldsymbol{E}}$ se puede realizar a partir de la ecuación de campo vectorial obtenida.

Un electrón en un campo uniforme

Ejemplo

Cuando las terminales de una batería se conectan a dos placas conductoras paralelas con un pequeño espacio entre ellas, las cargas resultantes sobre las placas originan un campo eléctrico aproximadamente uniforme $\vec{E}$ entre las placas. Si las placas están separadas por 1.0 cm y se conectan a una batería de 100 volts.



El campo apunta verticalmente hacia arriba y tiene una magnitud $E = 1.00 \times 10^4 \frac{N}{C}$. Determine

a) Si un electrón (con carga $-e = -1.60 \times 10^{-19}\ C$, masa $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg) en reposo se libera en la placa superior, ¿cuál es su aceleración?
b) ¿Qué rapidez y qué energía cinética adquiere cuando viaja 1.0 cm hacia la placa inferior?
c) ¿Cuánto tiempo se requiere para recorrer esa distancia?

Se utiliza la ecuación $\vec{F_0} = q_0\vec{E}$ para calcular la fuerza sobre el electrón, y la segunda ley de Newton para obtener su aceleración. Como el campo es uniforme, la fuerza es constante y se pueden usar las fórmulas de aceleración constante, para calcular la velocidad del electrón y el tiempo de su recorrido. La energía cinética se determina mediante $K = \frac{1}{2}mv^2$.

a) Aun cuando $\vec{E}$ está dirigido hacia arriba (en la dirección positiva del eje y), $\vec{F}$ va hacia abajo porque la carga del electrón es energía negativa; por ello, F_y es negativa. Como F_y es constante, la aceleración del electrón es constante:

$$a_y = \frac{F_y}{m} = -\frac{eE}{m} = \frac{(-1.60 \times 10^{-9}\ C)\left(1.00 \times 10^4 \frac{N}{C}\right)}{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}$$

$$= -1.76 \times 10^{15} \frac{m}{s^2}$$

b) El electrón parte del reposo, por lo que se mueve solo en la dirección del eje y (la dirección de la aceleración). Podemos encontrar la rapidez del electrón en cualquier posición y usando la fórmula de aceleración constante, ${v_y}^2 = {v_{0y}}^2 + 2a_y(y - y_0)$ Sabemos que $v_{0y} = 0$ y $y_0 = 0$, por lo que en $y = -1.0\ cm = -1.0 \times 10^{-2}$m tenemos:

$$|v_y| = \sqrt{2a_y y} = \sqrt{2\left(-1.76 \times 10^{15}\frac{m}{s^2}\right)(-1.0 \times 10^{-2}\text{m})}$$

$$= 5.9 \times 10^6\frac{m}{s}$$

La velocidad es hacia abajo, de manera que $v_y = -5.9 \times 10^6\frac{m}{s}$. La energía cinética es:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(9.11 \times 10^{-31}kg)\left(5.9 \times 10^6\frac{m}{s}\right)^2$$

$$= 1.6 \times 10^{-17}\,J$$

c) De acuerdo con la ecuación para aceleración constante, $v_y = v_{0y} + a_y t$,

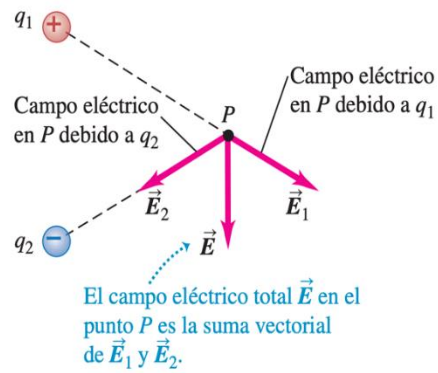
$$t = \frac{v_y - v_{0y}}{a_y} = \frac{\left(-5.9 \times 10^6\frac{m}{s}\right) - \left(0\frac{m}{s}\right)}{-1.76 \times 10^{15}\frac{m}{s^2}}$$

$$= 3.4 \times 10^{-9}\,s$$

Principio de Superposición

El campo eléctrico total en P es la suma vectorial de los campos en P debidos a cada carga puntual de la distribución de carga Este es el **principio de superposición de campos eléctricos.**

Se establece que el campo eléctrico total en un punto del espacio debido a múltiples cargas es la suma vectorial, esto implica que el campo eléctrico de cada carga es independiente de la presencia de las otras y puede calcularse por separado, para luego combinarlos mediante la suma vectorial para obtener el resultado final.



Cuando las cargas no son puntuales, sino que están distribuidas de forma continua, el principio de superposición se adapta de la siguiente manera:

- **Divide la distribución en elementos de carga:**

La distribución continua de carga se divide en pequeños elementos infinitesimales de carga (dq).

- **Calcula el campo de cada elemento:**

Cada elemento infinitesimal de carga dq produce un campo eléctrico $d\vec{E}$ en el punto de interés.

- **Integra los campos:**

El campo total se obtiene integrando estos pequeños campos $d\vec{E}$ sobre toda la distribución de carga. Esencialmente, la suma vectorial se reemplaza por una integral vectorial.

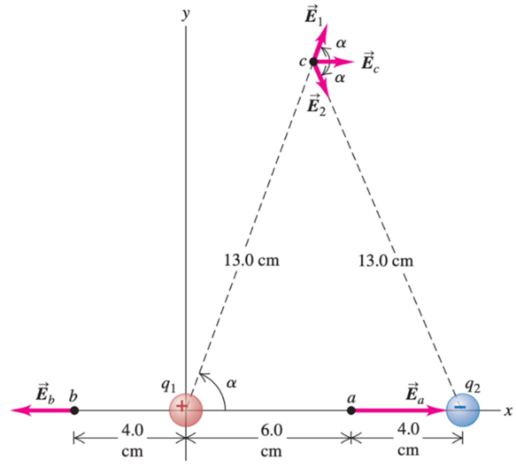
Cuando la carga está distribuida a lo largo de una línea, sobre una superficie o a través de un volumen, son muy útiles algunos términos adicionales. Para una distribución de carga lineal (como la de una varilla de cargada, larga y delgada). usamos $\boldsymbol{\lambda}$ (letra griega lambda) para representar la **densidad de carga lineal** (carga por unidad de longitud, medida en $\frac{C}{m}$). Cuando la carga está distribuida sobre una superficie (como la de una placa), se usa $\boldsymbol{\sigma}$ (sigma) para representar la **densidad de carga superficial** (carga por unidad de área, medida en $\frac{C}{m^2}$). Y cuando la carga se distribuye a través de un volumen, se usa $\boldsymbol{\rho}$ (rho) para representar la **densidad de carga volumétrica** (carga por unidad de volumen, $\frac{C}{m^3}$).

Campo de un dipolo eléctrico

Ejemplo

Dos cargas puntuales $q_1 = +12\,nC$ y $q_2 = -12\,nC$ están separadas por una distancia de $0.100\,m$. (Estos pares de cargas puntuales de igual magnitud y signos opuestos se denominan dipolos eléctricos). Calcule el campo eléctrico debido a q_1, el campo debido a q_2, y el campo total:

a) En el punto a
b) En el punto b
c) En el punto c.



Usaremos el principio de superposición: $\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_1 + \vec{\boldsymbol{E}}_2$

En cada punto del campo, $\vec{\boldsymbol{E}}$ depende de $\vec{\boldsymbol{E}}_1$, y $\vec{\boldsymbol{E}}_2$ primero calculamos las magnitudes E_1 y E_2 en cada punto del campo. En a, la magnitud del campo $\vec{\boldsymbol{E}}_{1a}$, debido a q_1 es:

$$E_{1a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1|}{r^2} = \left(9.0\times 10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}\right)\left(\frac{12.0\times 10^{-9}C}{(0.060m)^2}\right)$$

$$E_{1a} = 3.0\times 10^4\frac{N}{C}$$

Las otras magnitudes se calculan de manera similar. Los resultados

$$E_{1a} = 3.0\times 10^4\frac{N}{C} \qquad E_{1b} = 6.8\times 10^4\frac{N}{C} \qquad E_{1c} = 6.39\times 10^3\frac{N}{C}$$

$$E_{2a} = 6.8\times 10^4\frac{N}{C} \qquad E_{2b} = 0.55\times 10^4\frac{N}{C} \quad E_{2c} = E_{1c} = 6.39\times 10^3\frac{N}{C}$$

Las direcciones de los campos correspondientes se alejan, en todos los casos, de la carga positiva.

a) En el punto a, $\vec{\boldsymbol{E}}_{1a}$, y $\vec{\boldsymbol{E}}_{2a}$ están dirigidos hacia la derecha; por lo tanto:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_a = E_{1a}\hat{\boldsymbol{\imath}} + E_{2a}\hat{\boldsymbol{\imath}} = \left(9.8\times 10^4\frac{N}{C}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

b) En el punto b, $\widehat{\boldsymbol{E}}_{1b}$, está dirigido hacia la izquierda y $\widehat{\boldsymbol{E}}_{2b}$, está dirigido hacia la derecha; por lo tanto:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_b = -E_{1b}\hat{\boldsymbol{\imath}} + E_{2b}\hat{\boldsymbol{\imath}} = \left(-6.2\times 10^4\frac{N}{C}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

c) La figura muestra la dirección de $\vec{\boldsymbol{E}}_1$, y $\vec{\boldsymbol{E}}_1$ en el punto c. Ambos vectores tienen la misma componente x:

$$E_{1cx} = E_{2cx} = E_{1c}\cos\alpha = \left(6.39 \times 10^3 \frac{N}{C}\right)\left(\frac{5}{13}\right)$$

$$E_{1cx} = 2.46 \times 10^3 \frac{N}{C}$$

Por simetría, E_{1y} y E_{2y} son iguales y opuestas; por lo tanto, su suma es igual a cero. Así,

$$\vec{\boldsymbol{E}}_c = 2\left(2.46 \times 10^3 \frac{N}{C}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} = \left(4.9 \times 10^3 \frac{N}{C}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

También podemos obtener $\vec{\boldsymbol{E}}_C$ usando la ecuación para el campo de una carga puntual. El vector desplazamiento $\vec{\boldsymbol{r}}_1$ desde q_1 hasta el punto c, es $\vec{\boldsymbol{r}}_1 = r\cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + r\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$. Entonces, el vector unitario que va de q_1 a c es $\hat{\boldsymbol{r}}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r} = \cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$. Por simetría, el vector unitario que va de q_2 al punto c tiene la componente x opuesta pero la misma componente y:

$$\hat{\boldsymbol{r}}_2 = -\cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Ahora podemos representar los campos $\vec{\boldsymbol{E}}_{1C}$ y $\vec{\boldsymbol{E}}_{2C}$ en c en forma vectorial, para obtener su suma. Como $q_2 = -q_1$ y la distancia de r a c es la misma para ambas cargas,

$$\vec{\boldsymbol{E}}_C = \vec{\boldsymbol{E}}_{1C} + \vec{\boldsymbol{E}}_{2C} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}_2$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}(q_1\hat{\boldsymbol{r}}_1 + q_2\hat{\boldsymbol{r}}_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}(\hat{\boldsymbol{r}}_1 - \hat{\boldsymbol{r}}_2)$$

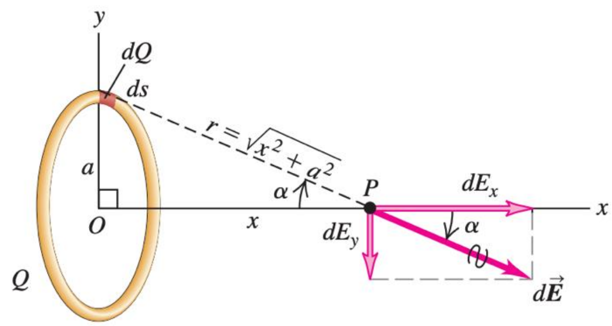
$$\vec{\boldsymbol{E}}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2}(2\cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{\imath}})$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}_C = 2\left(9.0 \times 10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}\right)\left(\frac{12 \times 10^{-9}C}{(0.13m)^2}\right)\left(\frac{5}{13}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} = \left(4.9 \times 10^3 \frac{N}{C}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Campo de un anillo con carga

La carga Q está distribuida de manera uniforme alrededor de un anillo de radio a. Calcule el campo eléctrico en el punto P, que se localiza sobre el eje del anillo a una distancia x del centro.

Cada elemento de carga alrededor del anillo produce un campo eléctrico en un punto arbitrario sobre el eje x; nuestra incógnita es el campo total en este punto debido a todos los elementos de carga.



Se divide el anillo en segmentos infinitesimales de longitud ds. En términos de la densidad de carga lineal $\lambda = \frac{Q}{2\pi a}$, la carga en un segmento de longitud ds es $dQ = \lambda ds$. Considere dos segmentos idénticos, uno como el que se muestra en la figura en $y = a$ y otro aproximadamente a la mitad del anillo en $y = -a$. Lo mismo se aplica para cualquier par de segmentos alrededor del anillo, de modo que el campo neto en P se encuentra a lo largo del eje x: $\vec{\boldsymbol{E}} = E_x \hat{\boldsymbol{\imath}}$.

Para calcular E_x, se observa que el cuadrado de la distancia r de un segmento de anillo al punto P es $r^2 = x^2 + a^2$. De manera que la magnitud de la contribución de este segmento $d\vec{\boldsymbol{E}}$ al campo eléctrico en P es

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{x^2 + a^2}$$

La componente x de este campo es $dE_x = dE\cos\alpha$. Sabemos que $dQ = \lambda ds$ y

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$dE_x = dE\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{x^2 + a^2}\frac{x}{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda x}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}ds$$

Para obtener E_x, se integra esta expresión a lo largo del anillo completo, es decir, paras s de 0 a $2\pi a$ (la circunferencia del anillo). El integrando tiene el mismo valor para todos los puntos del anillo, de modo que se puede sacar de la integral. Entonces tenemos:

$$E_x = \int dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda x}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi a} ds$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda x}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} (2\pi a)$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = E_x \hat{\boldsymbol{\imath}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{\boldsymbol{\imath}}$$

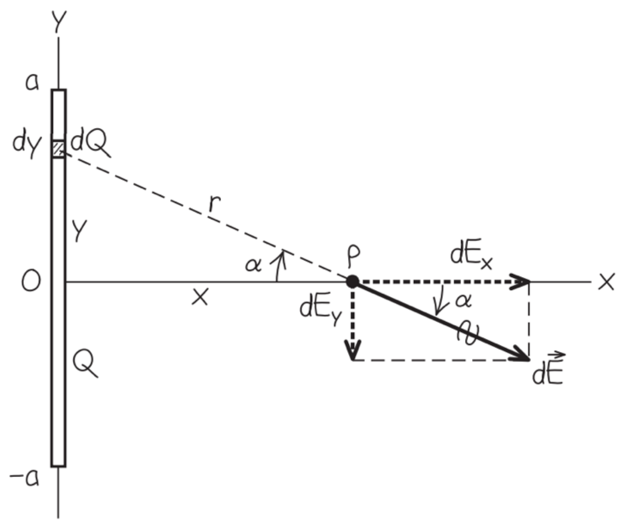
La ecuación muestra que $\vec{\boldsymbol{E}} = 0$ en el centro del anillo $(x = 0)$. Esto tiene sentido; las cargas en los lados opuestos del anillo empujarían en direcciones opuestas a una carga prueba situada en el centro, y la suma vectorial de cada par de fuerzas es cero. Cuando el punto P del campo se encuentra mucho más lejos del anillo que el radio de este, tenemos que $x \gg a,$ y el denominador de la ecuación toma un valor cercano a x^3. En este límite el campo eléctrico en P es

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} \hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Es decir, cuando el anillo está tan lejos que el tamaño de su radio es despreciable en comparación con la distancia x, su campo es el mismo que el de una carga puntual.

Campo de una línea de carga

Una carga eléctrica, Q. positiva está distribuida de manera uniforme a lo largo del eje y entre $y\ = -a$ y $y = +a$. Calcule el campo eléctrico en el punto P sobre el eje x, a una distancia x del origen.



La figura describe la situación. Al igual que en el ejemplo anterior, debemos calcular el campo eléctrico debido a una distribución continua de la carga. Nuestra incógnita es una expresión para el campo eléctrico en P como una función de $\boldsymbol{x}$. El eje $\boldsymbol{x}$ es el bisector perpendicular del segmento, por lo que, podemos utilizar un argumento de simetría.

Se divide la línea de carga de longitud $2a$ en segmentos infinitesimales de longitud dy. La densidad de carga lineal es $\lambda = \frac{Q}{2a}$, y la carga en un segmento es $dQ = \lambda ds = \left(\frac{Q}{2a}\right) dy$. La distancia r entre un segmento a una altura $\boldsymbol{y}$ y el punto $\boldsymbol{P}$ del campo es $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, de modo que la magnitud del campo en P debido al segmento a la altura y es:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\frac{dy}{(x^2+\ y^2)}$$

Se muestra que las componentes $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ de este campo son $dE_x = dE\cos\alpha$ y $dE_y = -dE\sin\alpha$, donde $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ y $\sin\alpha = \frac{y}{r}$ Entonces:

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\frac{xdy}{(x^2+\ y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\frac{ydy}{(x^2+\ y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Para determinar el campo total en P, se deben sumar los campos de todos los segmentos a lo largo de la línea, es decir, debemos integrar de $y = -a$ a $y = +a$. Los resultados son:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\int_{-a}^{+a}\frac{xdy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\int_{-a}^{+a}\frac{ydy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

o en forma vectorial:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x\sqrt{x^2 + a^2}}\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

$\vec{\boldsymbol{E}}$ se aleja de la línea de carga si λ es positiva, y se acerca si λ es negativa.

Usando un argumento de simetría, habríamos deducido que E_y sería igual a cero, si se coloca una carga prueba positiva en P, la mitad superior de la línea de carga empuja hacia abajo de ella, y la mitad inferior empuja hacia arriba con igual magnitud. La simetría también nos dice que las mitades superior e inferior del segmento contribuyen por partes iguales al campo total en P.

Si el segmento es muy pequeño (o el punto del campo está muy lejos del segmento) de modo que $x \gg a$, se puede despreciar **a** en el denominador de la ecuación. Entonces, el campo se vuelve igual al de una carga puntual:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x^2}\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Para ver qué pasa si el segmento es muy largo (o el punto del campo está muy cerca de él) de modo que $a \gg x$, primero replanteamos ligeramente la ecuación:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{x\sqrt{\left(\frac{x^2}{a^2}\right) + 1}}\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

En el límite $a \gg x$, podemos despreciar $\frac{x^2}{a^2}$ en el denominador de la ecuación, de manera

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Este es el campo de una línea de carga infinitamente larga. En cualquier punto P, a una distancia perpendicular r de la línea en cualquier dirección, $\vec{\boldsymbol{E}}$ tiene la magnitud

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

(línea infinita de carga)

Observe que este campo es proporcional a $\frac{1}{r}$, y no a $\frac{1}{r^2}$ como fue el caso de una carga puntual.

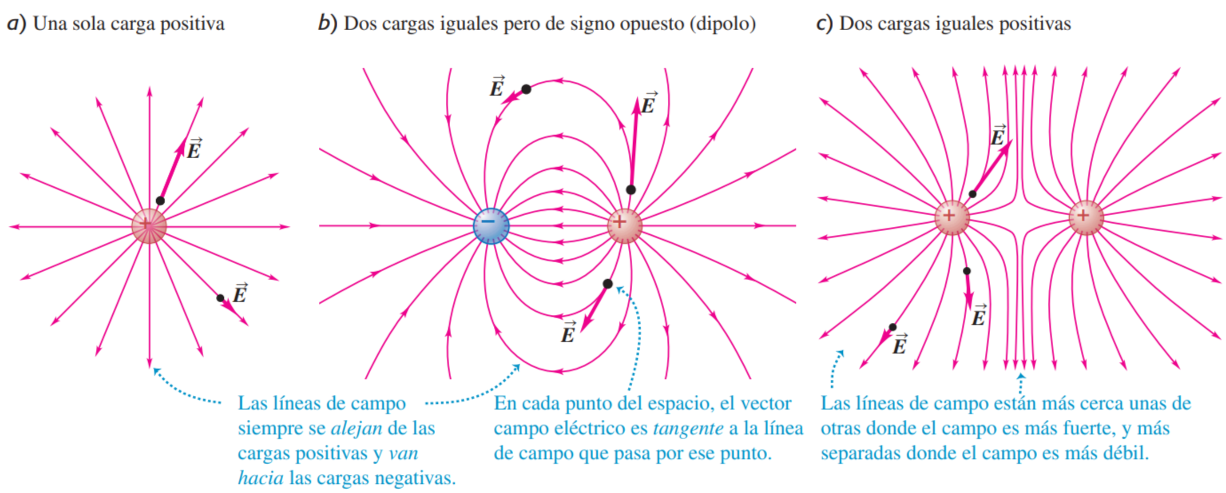
En la naturaleza no existe en realidad nada como una línea infinita de carga; no obstante, cuando el punto del campo está suficientemente cerca de la línea, hay muy poca diferencia entre el resultado para una línea infinita y el caso finito de la vida real. Por ejemplo, si la distancia r del punto del campo al centro de la línea es del 1% de la longitud de esta, el valor de E difiere menos del 0.02% del valor para la longitud infinita.

Líneas de campo eléctrico

El concepto de campo eléctrico es un tanto elusivo debido a que ningún campo eléctrico puede verse directamente. Para visualizarlo, las *líneas* de campo eléctrico son de gran ayuda y lo hace parecer más real.

Una **línea de campo eléctrico** es una recta o curva imaginaria trazada a través de una región del espacio, de modo que sea tangente a cualquier punto que esté en la dirección del vector del campo eléctrico en dicho punto.

Líneas de campo eléctrico de tres distribuciones diferentes de carga. En general, la magnitud de $\vec{E}$ es diferente en distintos puntos de una línea de campo determinada.



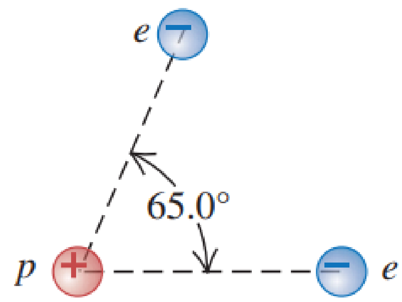
Las líneas de campo eléctrico no son trayectorias.

Es un error común suponer que si una partícula con carga q está en movimiento en presencia de un campo eléctrico, la partícula debe moverse a lo largo de una línea de campo eléctrico.

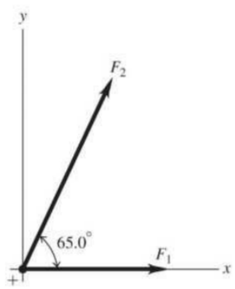
Debido a que $\vec{E}$ en cualquier punto es tangente a la línea de campo que pasa por ese punto, es cierto que la fuerza sobre la partícula $\vec{F} = q\vec{E}$ y, por lo tanto, la aceleración de la partícula es tangentes a la línea de campo.

Taller en Clase

1. Si dos electrones se encuentran, cada uno, a $1.50\ X\ 10^{-10}\ m$ de un protón, como se muestra en la figura, obtenga la magnitud y dirección de la fuerza eléctrica neta que ejercerán sobre el protón.



Las fuerzas que las cargas ejercen entre sí están dadas por la ley de Coulomb. La fuerza neta sobre el protón es la suma vectorial de las fuerzas debidas a los electrones. Donde $q_e = -1.60\ \mathrm{X}\ 10^{-19} C,\ q_p = +1.60\ \mathrm{X}\ 10^{-19} C$



Cada fuerza tiene magnitud:

$$\mathrm{F} = \mathrm{k}\frac{|q_1 q_2|}{r^2} = k\frac{e^2}{r^2}$$

La cual se dirige hacia el electrón que la ejerce.

$$F_1 = F_2 = \mathrm{k}\frac{|q_1 q_2|}{r^2} = k\frac{e^2}{r^2} = \frac{(8.988\ x\ 10^9\ \mathrm{N}\ \cdot m^2/\mathrm{C}^2)(1.60\ X\ 10^{-19}\mathrm{C})^2}{(1.5\ \mathrm{x}\ 10^{-10}\mathrm{m})^2}$$
$$= 1.023\ \mathrm{x}\ 10^{-8}\ \mathrm{N}$$

La fuerza resultante vectorial:

Tomando componentes, obtenemos:

$$F_{1x} = 1.023\ \mathrm{X}\ 10^{-8}\mathrm{N}, \quad F_{1y} = 0$$

$$F_{2x} = F_2\ \cos 65.0\,° = 4.32\ \mathrm{X}\ 10^{-9}\ \mathrm{N}$$

$$F_{2y} = F_2 \sin 65.0° = 9.27\ \mathrm{X}\ 10^{-9}\mathrm{N}$$

Entonces

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} = 1.46\ \mathrm{X}\ 10^{-8}\mathrm{N}$$

$$F_y = F_{1y} + \mathrm{F}_{2y} = 9.27\ \mathrm{X}\ 10^{-9}\mathrm{N}$$

La magnitud de la fuerza neta es:

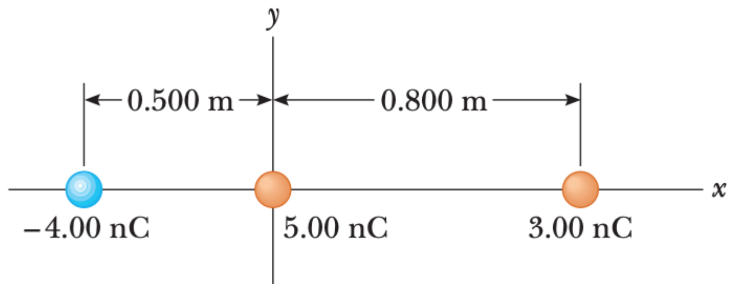
$$\mathrm{F} = \sqrt{\mathrm{F}_\mathrm{x}^2 + \mathrm{F}_\mathrm{y}^2} = 1.73\ \mathrm{X}\ 10^{-8}\ \mathrm{N}$$

El ángulo se obtiene como:

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{9.27\ \mathrm{x}\ 10^{-9}\mathrm{N}}{1.46\ \mathrm{X}\ 10^{-8}\mathrm{N}} = \tan^{-1} 0.6349$$

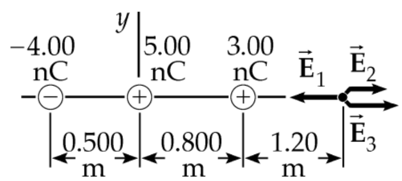
$$\theta = 32.4°$$

2. Tres partículas con carga están alineadas a lo largo del eje x, según se muestra en la figura. Determine el campo eléctrico en a) la posición $(2.00, 0)$ y b) la posición $(0, 2.00)$.



a) El campo, E_1, debido a una carga de $4.00 \times 10^{-9} C$ en dirección $-x$.

$$\vec{\boldsymbol{E}}_1 = \frac{kq}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\left(9.0 \times 10^9 \, \frac{Nm^2}{C^2}\right)(-4.00 \times 10^{-9} C)}{(2.50m)^2}\hat{\boldsymbol{\imath}}$$



$$\vec{\boldsymbol{E}}_1 = -5.75\frac{N}{C}\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Asimismo, E_2 y E_3, debido a una carga de 5.00×10^{-9}C y otra carga de 3.00×10^{-9}C son:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_2 = \frac{kq}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\left(9.0 \times 10^9 \, \frac{Nm^2}{C^2}\right)(5.00 \times 10^{-9} C)}{(2.50m)^2}\hat{\boldsymbol{\imath}} = 11.2\frac{N}{C}\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

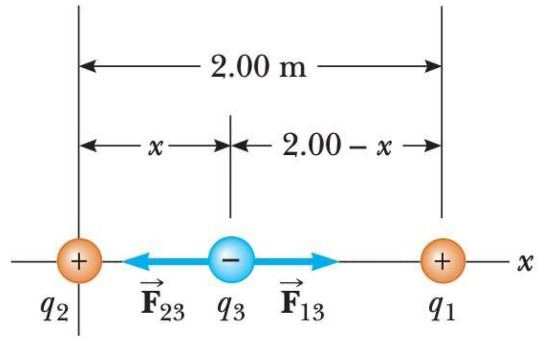
$$\vec{\boldsymbol{E}}_3 = \frac{kq}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\left(9.0 \times 10^9 \, \frac{Nm^2}{C^2}\right)(3.00 \times 10^{-9} C)}{(2.50m)^2}\hat{\boldsymbol{\imath}} = 18.7\frac{N}{C}\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}_R = \vec{\boldsymbol{E}}_1 + \vec{\boldsymbol{E}}_2 + \vec{\boldsymbol{E}}_3 = 24.2\frac{N}{C}\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

En dirección $+x$

¿Dónde es cero la fuerza neta?

3. Tres cargas puntuales se encuentran a lo largo del eje x, como se muestra en la figura 23.8. La carga positiva $q_1 = 15.0\mu C$ está en $x = 2.00\,m$, la carga positiva $q_2 = 6.0\mu C$ está en el origen y la fuerza neta que actúa sobre q_3 es cero. ¿Cuál es la coordenada x de q_3?



Ya que q_3 está cerca de otras dos cargas, experimenta dos fuerzas eléctricas. Como q_3 es negativa, mientras que q_1 y q_2 son positivas, las fuerzas $\vec{\boldsymbol{F}}_{13}$ y $\vec{\boldsymbol{F}}_{23}$ son de atracción. Ya que la fuerza neta sobre q_3 es cero, la carga puntual se modela como una partícula en equilibrio.

Expresión para la fuerza neta sobre la carga q_3 cuando está en equilibrio:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_3 = \vec{\boldsymbol{F}}_{13} + \vec{\boldsymbol{F}}_{23} = k\frac{|q_2||q_3|}{x^2}\hat{\boldsymbol{\imath}} - k\frac{|q_1||q_3|}{(2.00-x)^2}\hat{\boldsymbol{\imath}} = 0$$

Igualando los coeficientes del vector unitario $\hat{\boldsymbol{\imath}}$:

$$k\frac{|q_2||q_3|}{x^2} = k\frac{|q_1||q_3|}{(2.00-x)^2}$$

Reordenando la ecuación:

$$|q_2|(2.00-x)^2 = |q_1|x^2$$

$$(4.00 - 4.00x + x^2)(6.0 \times 10^{-6}C) = x^2(15.0 \times 10^{-6}C)$$

$$24.00 - 24.00x + 6.00x^2 = 15.0x^2$$

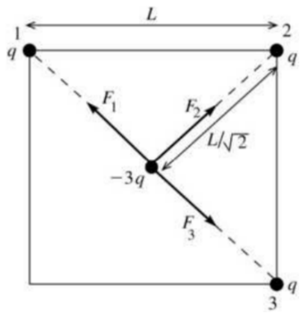
Reduciendo la ecuación cuadrática a una forma más simple:

$$3.00x^2 + 8.00x - 8.00 = 0$$

$$x_1 = 0.775\,m$$

La segunda raíz de la ecuación cuadrática es $x_2 = -3.44\,m$, otra posición donde las magnitudes de las fuerzas sobre q_3 son iguales, aunque dichas fuerzas están en la misma dirección.

4. Se colocan tres cargas puntuales idénticas q en cada una de tres esquinas de un cuadrado de lado L. Obtenga la magnitud y la dirección de la fuerza neta sobre una carga puntual de −3q que se sitúa a) en el centro del cuadrado y b) en la esquina vacía del cuadrado. En cada caso, dibuje un diagrama de cuerpo libre que muestre las fuerzas ejercidas sobre la carga de −3q por cada una de las otras tres cargas.



a) $\vec{F_1} + \vec{F_3} = 0$

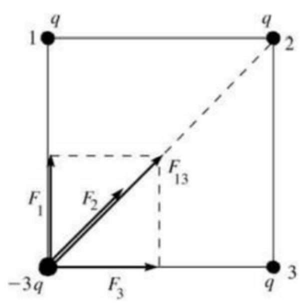
Por lo tanto, la fuerza neta es:

$$\vec{F_1} = \vec{F_2}$$

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(3q)}{\left(L/\sqrt{2}\right)^2} = \frac{6q^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2}$$

Dirigida en dirección opuesta a la esquina vacía.

b)



$$F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(3q)}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0(2L^2)}$$

$$F_1 = F_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(3q)}{L^2} = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0(L^2)}$$

La suma vectorial de F1 y F3 es:

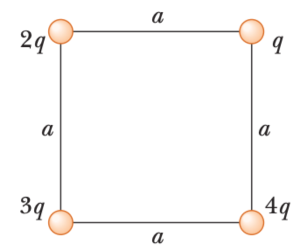
$$F_{13} = \sqrt{F_1^2 + F_3^2}$$

$$F_{13} = \sqrt{2}F_1 = \frac{3\sqrt{2}q^2}{4\pi\varepsilon_0\, L^2};\ \overrightarrow{F_{13}}\, y\, \vec{F_2}\ en\ la\ misma\ dirección$$

$$F = F_{13} + F_2 = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0(2L^2)}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)\ y\ está\ dirigida\ hacia\ el\ centro\ del\ cuadrado.$$

Por simetría, la fuerza neta queda a lo largo de la diagonal del cuadrado. La fuerza neta es solo ligeramente mayor cuando la carga −3q está en el centro. En este caso, la carga −3q está más cerca de la carga en el punto 2, pero las otras dos fuerzas se cancelan.

5. En las esquinas de un cuadrado de lado a, como se muestra en la figura, existen cuatro partículas con carga.



a) Determine la magnitud y dirección del campo eléctrico en la ubicación de la carga q.

b) ¿Cuál es la fuerza eléctrica total ejercida sobre q?

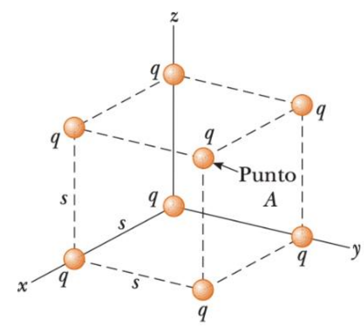
$$a)\,\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{kq_1}{r_1^2}\hat{\boldsymbol{r}}_1 + \frac{kq_2}{r_2^2}\hat{\boldsymbol{r}}_2 + \frac{kq_3}{r_3^2}\hat{\boldsymbol{r}}_3$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{k(2q)}{a^2}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{k(3q)}{2a^2}(\cos(45.0°)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin(45.0°)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}) + \frac{k(4q)}{a^2}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = 3.06\frac{kq}{a^2}\hat{\boldsymbol{\imath}} + 5.91\frac{kq}{a^2}\hat{\boldsymbol{\jmath}} = 5.91\frac{kq}{a^2}\ a\ 58.8°$$

$$b)\,\vec{\boldsymbol{F}} = q\vec{\boldsymbol{E}} = 5.91\frac{kq^2}{a^2}\ a\ 58.8°$$

6. Ocho partículas con carga, cada una de magnitud q, están situadas en las esquinas de un cubo de arista s, como se observa en la figura.



a) Determine las componentes en x, y y z de la fuerza total ejercida por las demás cargas sobre la carga ubicada en el punto A.

b) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de esta fuerza total?

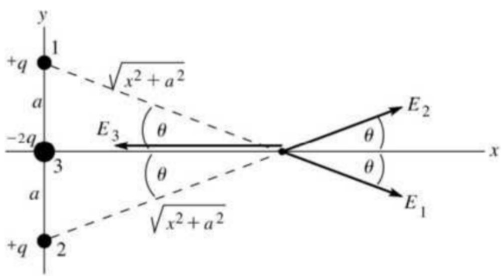
a) Hay 7 términos que contribuyen:
- 3 están a una distancia s (a lo largo de los lados)
- 3 están a una distancia $\sqrt{2}s$ (a lo largo de las diagonales de la cara) y $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\theta$
- 1 está a una distancia $\sqrt{3}s$ (a lo largo de la diagonal del cuerpo) y $\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{3}}$

El componente en cada dirección es el mismo por simetría.

$$\vec{F} = \frac{kq^2}{s^2}\left[1 + \frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\right](\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}) = \frac{kq^2}{s^2}(1.90)(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})$$

b) $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = 3.29\frac{kq^2}{s^2}\ alejandose\ del\ origen$

7. Se colocan tres cargas puntuales sobre el eje y: una carga q en $y = ay = a$, una carga $-2q$ en el origen, y una carga q en $y = -a$. Este arreglo se denomina cuadripolo eléctrico. a) Calcule la magnitud y la dirección del campo eléctrico en los puntos sobre la parte positiva del eje x. b) Use la expansión binomial para obtener una expresión aproximada para el campo eléctrico, válida para $x \gg a$. Compare este comportamiento con el del campo eléctrico de una carga puntual y con el del campo eléctrico de un dipolo.



a) Los campos debidos a cada carga:

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{a^2 + x^2}\right)$$

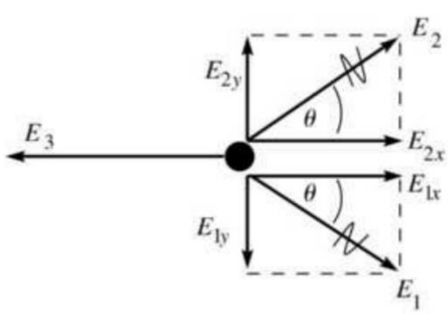
$$E_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2q}{x^2}\right)$$

$$E_{1y} = -E_1 \sin\theta, \quad E_{2y} = E_2 \sin\theta, \quad E_y = E_{1y} + E_{2y} = 0$$

$$E_{1x} = E_{2x} = E_1 \cos\theta = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{a^2 + x^2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right)\right), E_{3x} = E_3$$

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} + E_{3x} = 2\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{a^2 + x^2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right)\right) - \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

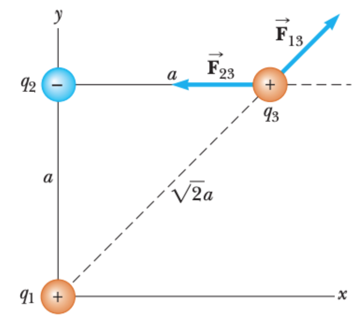
$$E_x = -\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\right) En\ la\ dirección - x$$



b) $x \gg a$ implica que $(1 + a^2/x^2)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3a^2}{2x^2}$

$$E = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\left(1 - \left(1 - \frac{3a^2}{2x^2}\right)\right) = \frac{3qa^2}{4\pi\varepsilon_0 x^4}$$

8. Considere tres cargas puntuales ubicadas en las esquinas de un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura, donde $q_1 = q_3 = 5.0\ \mu C,\ q_2 = -2.0\ \mu C$ y $a = 0.10\ m$. Encuentre la fuerza resultante que se ejerce sobre q_3.



Piense en la fuerza neta sobre q_3. Ya que la carga q_3 está cerca de otras dos cargas, experimentará dos fuerzas eléctricas.

Las direcciones de las fuerzas individuales ejercidas por q_1 y q_2 sobre q_3 se muestran en la figura. La fuerza $\vec{F}_{23}$ que q_2 ejerce sobre q_3, es de atracción porque q_2 y q_3 tienen signos opuestos. En el sistema coordenado que se muestra, la fuerza de atracción $\vec{F}_{23}$ es hacia la izquierda (en la dirección x negativa). La fuerza $\vec{F}_{13}$ que q_1 ejerce sobre q_3 es de repulsión porque ambas cargas son positivas. La fuerza de repulsión $\vec{F}_{13}$ forma un ángulo de 45° con el eje x.

Magnitud de $\vec{F}_{23}$

$$F_{23} = k\frac{|q_2||q_3|}{a^2} = \left(9.0\times10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}\right)\frac{(2.0\times10^{-6}C)(5.0\times10^{-6}C)}{(0.10m)^2} = 9.0N$$

Magnitud de la fuerza $\vec{F}_{13}$

$$F_{13} = k\frac{|q_1||q_3|}{\left(\sqrt{2}a\right)^2} = \left(9.0\times10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}\right)\frac{(5.0\times10^{-6}C)(5.0\times10^{-6}C)}{2(0.10m)^2} = 11.0N$$

Componentes x y y de la fuerza $\vec{F}_{13}$:

$$F_{13x} = F_{13}\cos 45° = 7.9N$$

$$F_{13y} = F_{13}\sin 45° = 7.9N$$

Componentes de la fuerza resultante que actúa sobre q_3:

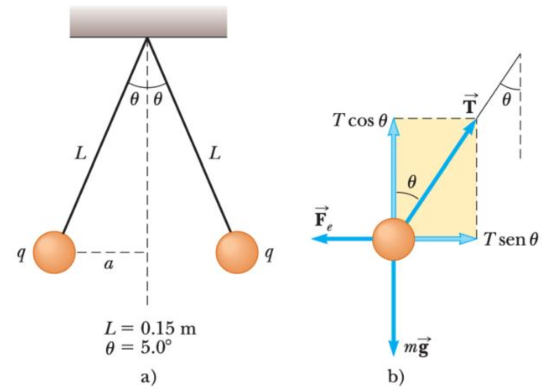
$$F_{3x} = F_{13x} + F_{23x} = 7.9N + (-9.0N) = -1.1N$$

$$F_{3y} = F_{13y} + F_{23y} = 7.9N + (0) = 7.9N$$

Fuerza resultante que actúa sobre q_3 en forma de vectores unitarios:

$$\vec{F}_3 = (-1.1\hat{\imath} + 7.9\hat{\jmath})N$$

9. Dos pequeñas esferas idénticas cargadas, cada una con una masa de 3.0×10^{-2} kg, cuelgan en equilibrio como se muestra en la figura. La longitud de cada cuerda es $0.15\ m$ y el ángulo θ es 5.0°. Encuentre la magnitud de la carga sobre cada esfera.



La frase clave "en equilibrio" ayuda a modelar cada esfera como una partícula en equilibrio.

En la figura se muestra el diagrama de cuerpo libre para la esfera de la izquierda. La esfera está en equilibrio bajo la aplicación de las fuerzas $\vec{\boldsymbol{T}}$ de la cuerda, la fuerza eléctrica $\vec{\boldsymbol{F}}_e$ de la otra esfera y la fuerza gravitacional $\vec{w}$.

Escriba la segunda ley de Newton para la esfera de la izquierda en forma de componentes:

$$\sum F_x = T\sin\theta - F_e = 0 \rightarrow T\sin\theta = F_e$$

$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0 \rightarrow T\cos\theta = mg$$

Despejando T en la ecuación para las fuerzas en y

$$\tan\theta = \frac{F_e}{mg} \rightarrow F_e = mg\tan\theta$$

Evaluando numéricamente la fuerza eléctrica:

$$F_e = (3.0 \times 10^{-2} kg)(9.8 m/s^2)\tan(5.0°) = 2.6 \times 10^{-2} N$$

Use la trigonometría para encontrar la correspondencia entre a, L y θ:

$$\sin\theta = \frac{a}{L} \rightarrow a = L\sin\theta = (0.15\text{ m})\sin(5.0°) = 0.013m$$

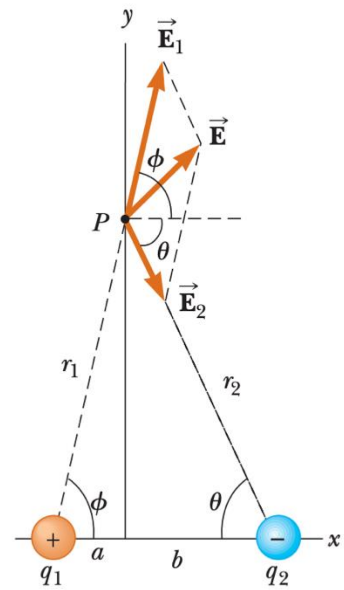
Ahora:

$$F_e = k\frac{|q|^2}{r^2} \rightarrow |q| = \sqrt{\frac{F_e(2a)^2}{k}} = \sqrt{\frac{(2.6 \times 10^{-2} N)[2(0.013m)]^2}{\left(9.0 \times 10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}\right)}} = 4.4 \times 10^{-8} C$$

No es posible determinar el signo de la carga a partir de la información que se proporciona. De hecho, el signo de la carga no es importante. La situación es la misma ya sea que ambas esferas tengan carga positiva o carga negativa.

10. Las cargas q_1 y q_2, se ubican en el eje x, a distancias a y b respectivamente, del origen, como se muestra en la figura.

a) Encuentre las componentes del campo eléctrico neto en el punto P, que está sobre el eje y.



En este caso, sume los vectores de campo eléctrico para encontrar el campo eléctrico neto en un punto en el espacio.

Encuentre la magnitud del campo en P debido a la carga q_1:

$$E_1 = k\frac{|q_1|}{{r_1}^2} = k\frac{|q_1|}{(a^2+y^2)}$$

Encuentre la magnitud del campo en P debido a la carga q_2:

$$E_2 = k\frac{|q_2|}{{r_2}^2} = k\frac{|q_2|}{(b^2+y^2)}$$

Escriba los vectores de campo eléctrico para cada carga en forma de vector unitario:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_1 = k\frac{|q_1|}{(a^2+y^2)}\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + k\frac{|q_1|}{(a^2+y^2)}\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}_2 = k\frac{|q_2|}{(b^2+y^2)}\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\imath}} - k\frac{|q_2|}{(b^2+y^2)}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

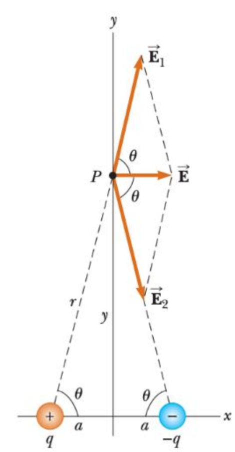
Escriba las componentes del vector de campo eléctrico neto:

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = k\frac{|q_1|}{(a^2+y^2)}\cos\phi + k\frac{|q_2|}{(b^2+y^2)}\cos\theta$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} = k\frac{|q_1|}{(a^2+y^2)}\sin\phi - k\frac{|q_2|}{(b^2+y^2)}\sin\theta$$

b) Evalué el campo eléctrico en el punto P si $|q_1| = |q_2|$ y $a = b$

Este es un caso especial del caso general que se muestra en la figura anterior, este ejemplo se clasifica como uno en el que se puede toman el resultado del inciso anterior y sustituir los valores apropiados de las variables.



Evalúe las ecuaciones de las componentes del inciso anterior con $a = b, |q_1| = |q_2| = q$, y $\phi = \theta$

$$E_x = k\frac{q}{(a^2+y^2)}\cos\theta + \frac{q}{(a^2+y^2)}\cos\theta = 2k\frac{q}{(a^2+y^2)}\cos\theta$$

$$E_y = k\frac{q}{(a^2+y^2)}\sin\theta - k\frac{q}{(b^2+y^2)}\sin\theta = 0$$

De la geometría en la figura, evalúe $\cos\theta$:

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{(a^2+y^2)^{1/2}}$$

Sustituya la ecuación de la componente x:

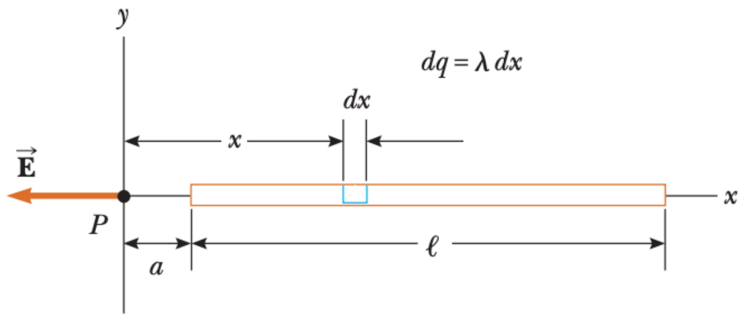
$$E_x = 2k\frac{q}{(a^2+y^2)}\frac{a}{(a^2+y^2)^{1/2}} = k\frac{2qa}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

c) Encuentre el campo eléctrico debido al dipolo eléctrico cuando el punto P está a una distancia $y \gg a$ desde el origen.

En la solución al inciso anterior, porque $y \gg a$, ignore a^2 en comparación con y^2 y escriba la expresión para E en este caso:

$$E \approx k\frac{2qa}{y^3}$$

11. Una barra de longitud ℓ tiene una carga positiva uniforme por unidad de longitud λ y una carga total Q. Calcule el campo eléctrico en un punto P que se ubica a lo largo del eje largo de la barra y a una distancia a desde un extremo.



El campo $d\vec{\boldsymbol{E}}$ en P debido a cada segmento de carga sobre la barra está en la dirección x negativa, porque cada segmento porta una carga positiva.

Ya que la barra es continua, se evalúa el campo debido a una distribución de carga continua en lugar de a un grupo de cargas individuales. Ya que cada segmento de la barra produce un campo eléctrico en la dirección x negativa, la suma de sus aportaciones se puede manejar sin la necesidad de sumar vectores.

Suponga que la barra se encuentra a lo largo del eje x, dx es la longitud de un segmento pequeno y dq es la carga sobre dicho segmento. Como la barra tiene una carga por unidad de longitud λ, la carga dq sobre el pequeño segmento es $dq = \lambda dx$.

Encuentre la magnitud del campo eléctrico en P debido a un segmento de la barra que tenga una carga dq:

$$dE = k\frac{dq}{x^2} = k\frac{\lambda dx}{x^2}$$

Encuentre el campo total en P:

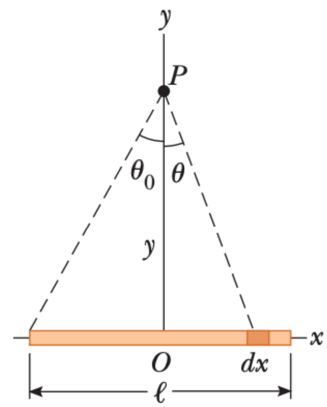
$$E = \int_a^{\ell+a} k\frac{\lambda dx}{x^2}$$

Al notar que k y $\lambda = Q/\ell$ son constantes y se pueden verificar de la integral, evalúe la integral:

$$E = k\lambda\int_a^{\ell+a}\frac{dx}{x^2} = k\lambda\left[-\frac{1}{x}\right]_a^{\ell+a}$$

$$E = k\frac{Q}{\ell}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\ell+a}\right) = \frac{kQ}{a(\ell+a)}$$

12. Una varilla delgada de longitud ℓ y con carga uniforme por unidad de longitud λ yace a lo largo del eje x, como se muestra en la figura P23.29.



a) Demuestre que el campo eléctrico en P, a una distancia y de la varilla a lo largo de su bisectriz. perpendicular, no tiene componente en x y está dado por $E = 2k\lambda \ \sin\theta_0 \,/y$.

b) ¿Qué pasaría sí? Utilice el resultado obtenido en el inciso a), demuestre que el campo de una varilla de longitud infinita es igual a $= 2k\lambda/y$.

(Sugerencia: primero calcule el campo en P debido a un elemento de longitud dx con una carga $\lambda\, dx$. A continuación, cambie las variables de x a θ mediante las correspondencias $x = y\tan\theta$ y $dx = y\sec^2\theta\, d\theta$ e integre a través de θ.)

1. El campo eléctrico en el punto P debido a cada elemento de longitud dx es $dE = \frac{kdq}{x^2+y^2}$ y está dirigido a lo largo de la línea que une el elemento al punto P por simetría,

$$E_x = \int dE_x = 0 \text{ donde } dq = \lambda\, dx$$

$$E_y = \int dE_y = \int dE\cos\theta \text{ donde } \cos\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

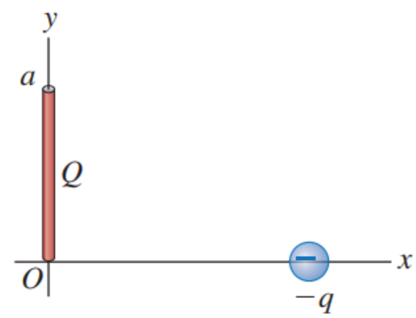
Por lo tanto:

$$E = 2k\lambda y \int_0^{\ell/2} \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{2k\lambda\sin\theta_0}{y}$$

2. Para una barra de longitud infinita .

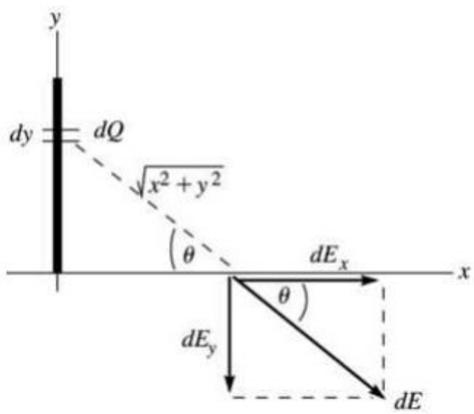
$$\theta_0 = 90 \ y \ E_y = \frac{2k\lambda}{y}$$

13. Una carga positiva Q está distribuida de manera uniforme en el eje y positivo entre $y = 0$ y $y = a$. Una carga puntual negativa -q se encuentra sobre la parte positiva del eje x, a una distancia x del origen.



a) Calcule las componentes x y y del campo eléctrico producido por la distribución de carga Q en puntos sobre la parte positiva del eje x.

b) Calcule las componentes x y y de la fuerza que la distribución de carga Q ejerce sobre q.



a)

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{dQ}{x^2+y^2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{dy}{x^2+y^2}\right)$$

$$dE_x = dE\cos\theta = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$dE_y = -dE\sin\theta = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{ydy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

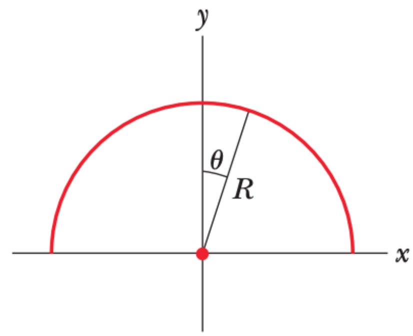
$$E_x = \int d\,E_x = -\frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a \frac{dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_0^a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$E_y = \int d\,E_y = -\frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a \frac{ydy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_0^a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

b)

$$F_x = -qE_x = \frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ;\ F_y = -qE_y = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

14. Una línea de cargas positivas se distribuye en un semicírculo de radio $R = 60.0\ cm$, como se observa en la figura. La carga por unidad de longitud a lo largo del semicírculo queda descrita por la expresión $\lambda = \lambda_0 \cos\theta$. La carga total del semicírculo es de $12.0\ \mu C$. Calcule la fuerza total sobre una carga de $3.00\ \mu C$ colocada en el centro de curvatura.



$$Q = \int \lambda d\ell = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lambda_0 \cos\theta\, Rd\theta = \lambda_0 R \sin\theta|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \lambda_0 R[1-(-1)] = 2\lambda_0 R$$

$$Q = 12\mu C = (2\lambda_0)(0.600)m = 12\mu C \text{ entonces } \lambda_0 = 10.0\mu C/m$$

$$dF_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{(3.00\mu C)(\lambda d\ell)}{R^2}\right)\cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{(3.00\mu C)(\lambda_0 \cos^2\theta\, Rd\theta)}{R^2}\right)$$

$$F_y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(9.0\times 10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}\right)\frac{(3.00\times 10^{-6}C)(10.0\times 10^{-6}C/m)}{(0.600m)}\cos^2\theta\, d\theta$$

$$F_y = \frac{9.0(30.0)}{0.600}(10^{-3})\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

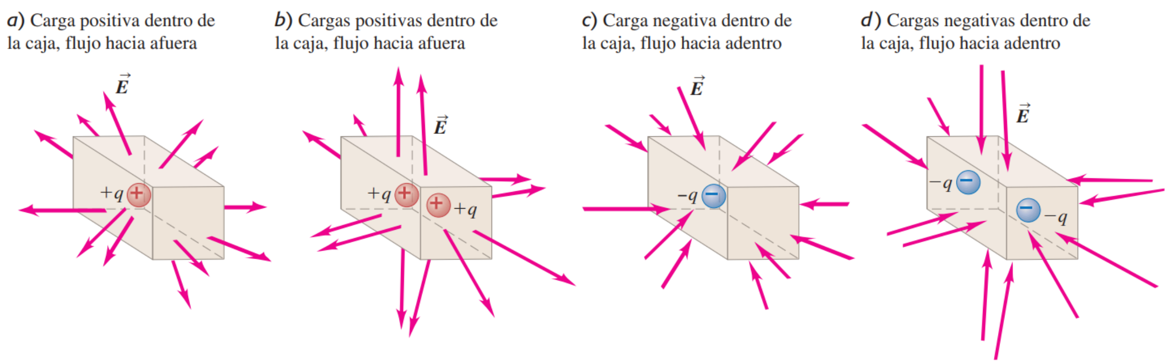
$$F_y = (0.450N)\ (\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0.707N$$

$$en\ direccion - y$$

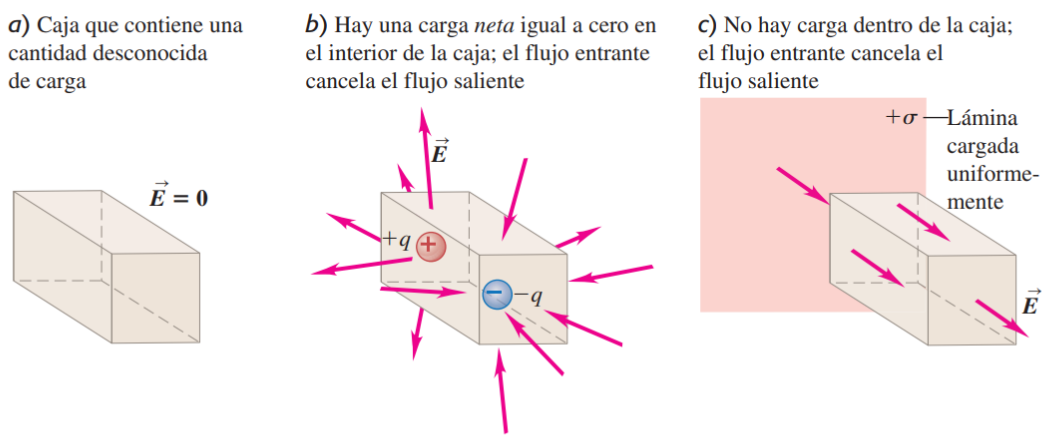
Dado que las fuerzas hacia la izquierda y hacia la derecha debidas a las dos mitades del semicírculo se cancelan, entonces $F_x = 0$.

Flujo eléctrico y carga encerrada

Los campos eléctricos no "fluyen" en realidad. Pero si los vectores campo eléctrico apuntan hacia afuera de la superficie, decimos que existe un flujo eléctrico saliente, si es lo contrario, el flujo eléctrico es entrante. Entonces la carga positiva dentro de la caja corresponde a un flujo eléctrico saliente a través de la superficie de la caja y la carga negativa en el interior correspondiente a un flujo eléctrico entrante.



Aunque también pueden existir casos en los que hay una carga neta igual a cero en el interior de la caja, y no hay flujo eléctrico neto a través de la superficie de esta.



Resumiendo, para los casos especiales de una superficie cerrada en forma de caja rectangular y distribuciones de carga debidas a cargas puntuales o láminas infinitas con carga, se tiene lo siguiente:

1. La existencia de un flujo eléctrico neto hacia el exterior o hacia el interior de una superficie cerrada depende del signo de la carga encerrada.
2. Las cargas afuera de la superficie no provocan un flujo eléctrico neto a través de la superficie.
3. El flujo eléctrico neto es directamente proporcional a la cantidad neta de carga contenida dentro de la superficie, pero es independiente del tamaño de la superficie cerrada.

Flujo de un campo eléctrico uniforme

El símbolo que se usa para el flujo que se usa para el flujo eléctrico es Φ_E. En primer lugar, considere un área plana A perpendicular a un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$, se define el flujo eléctrico a través de esta área como el producto de la magnitud E del campo por el área A:

$$\Phi_E = EA$$

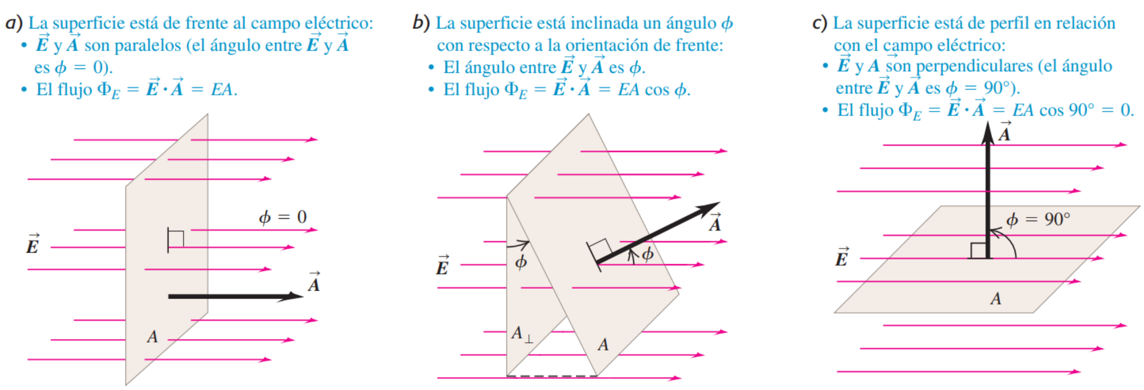
El incremento del área significa que más líneas de $\vec{E}$ pasan a través del área, lo que aumenta el flujo; un campo más intenso significa mayor densidad de líneas de $\vec{E}$ y por lo tanto más líneas por unidad de área, lo que también incrementa el flujo.

Si el área A es plana pero no perpendicular al campo $\vec{\boldsymbol{E}}$**,** entonces son menos las líneas de campo que la atraviesan. En este caso, el área perpendicular es igual a $A = A\cos\emptyset$, quedando así:

$$\Phi_E = EA\cos\emptyset$$

En términos del vector área de $\vec{A}$ perpendicular al área, el flujo eléctrico se expresa como el producto escalar de $\vec{E}$ por $\vec{A}$:

$$\Phi_E = E \cdot A$$



Flujo de un campo eléctrico no uniforme

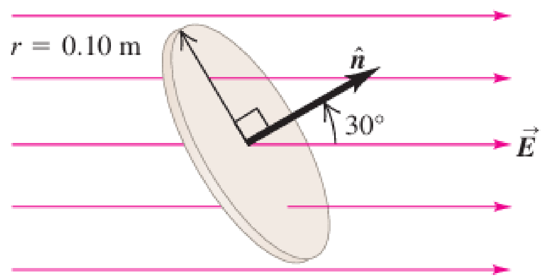
¿Qué ocurre si el campo eléctrico $\vec{E}$ no es uniforme, sino que varía de un punto a otro en el área? ¿qué sucede si A es parte de una superficie curva? En estos casos se divide el área en muchos elementos pequeños dA, cada uno de los cuales tiene un vector unitario $\hat{n}$ perpendicular a él y un vector área $d\vec{A} = \hat{n}dA$. Se calcula el flujo eléctrico a través de cada elemento y los resultados se integran para obtener el flujo total:

$$\Phi_E = \int E\cos\emptyset\, dA = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Ejemplo

Flujo eléctrico a través de un disco

Un disco de radio igual 0.10 m está orientado con su vector unitario normal ($\hat{n}$) a un ángulo de 30° respecto a un campo eléctrico uniforme $\vec{\boldsymbol{E}}$ con magnitud de $2.0X\ 10^3$ N/C. a) ¿Cuál es el flujo eléctrico s través del disco? b) ¿Cuál sería el flujo que pasaría a través del disco si se girara de manera que $\hat{n}$ fuera perpendicular a $\vec{E}$? c) Cuál sería el flujo que pasaría a través del disco si $\hat{n}$ fuera paralela a $\vec{E}$?



a) El área es $A = \pi(0.10\ m)^2 = 0.0314\ m^2$ y el ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{A} = 30°$

$$\Phi_E = EA\cos\emptyset = \left(2.0\ \ X\ 10^3\frac{N}{C}\right)(\ 0.0314\ m^2)(\cos 30°) = 54\ N\ \cdot\frac{m^2}{C}$$

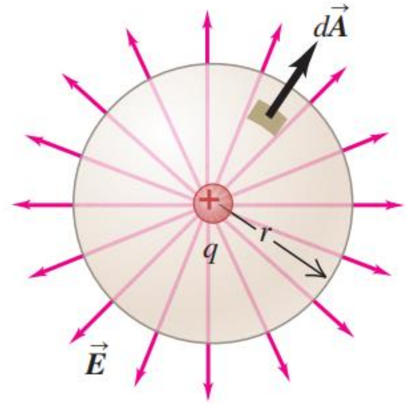
b) Ahora la normal al disco es perpendicular a $\vec{E}$, de manera que $\emptyset =\ 90°, \Phi_E = 0$

c) La norma al disco es paralela $\vec{E}$, por lo que $\emptyset =\ 0°, \cos\emptyset = 1$:

$$\Phi_E = EA\cos\emptyset = \left(2.0\ \ X\ 10^3\frac{N}{C}\right)(\ 0.0314\ m^2)(1) = 63\ N\ \cdot\frac{m^2}{C}$$

Flujo eléctrico a través de una esfera

Una carga puntual $q = 3.0\ \mu C$ está rodeada por una esfera imaginaria centrada en la carga y cuyo radio mide $0.20m$. Determine el flujo eléctrico a través de la esfera.



En este caso la superficie no es plana y el campo eléctrico no es uniforme, por lo que se debe usar la definición general de la ecuación. Como la esfera tiene su centro en la carga puntual, en cualquier punto sobre la superficie de la esfera $\vec{E}$ está dirigido hacia el exterior en forma perpendicular a la superficie.

Se debe resolver la integral $\Phi_E = \int E \cos \emptyset\ dA$. En cualquier punto de la esfera de radio r, el campo eléctrico tiene la misma magnitud $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Por lo tanto, E se puede sacar de la integral, la cual se convierte en $\Phi_E = \int E\ dA = EA$, donde A es área de la superficie esférica: $A = 4\pi r^2$. Asi, el flujo total que sale de la esfera es

$$\Phi_E = EA = \frac{q}{4\pi\ \varepsilon 0 r^2}(4\pi r^2) = \frac{\mathrm{q}}{\varepsilon_0} = \frac{3.0 \cdot 10^{-6}\ C}{8.85X\ 10^{-12}\ \frac{C^2}{Nm^2}} = 3.4\ X\ 10^5\ N \cdot \frac{m^2}{C}$$

Ley de Gauss

La ley de Gauss es otra alternativa de la ley de Coulomb. Aunque es exactamente equivalente a la ley de Coulomb, la ley de Gauss es una forma distinta se de expresar la relación entre la carga y el campo eléctrico.

Carga puntual dentro de una superficie esférica

La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada (una superficie que encierra un volumen definido) es proporcional a la carga eléctrica total dentro de la superficie. Comenzaremos con el campo de una sola carga puntual positiva q. las líneas de campo se extienden en forma radial hacia afuera en todas direcciones por igual. Colocamos esta carga en el centro de la superficie esférica imaginaria con radio R. La magnitud E del campo eléctrico en cada punto de la superficie está dada por

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{\mathrm{q}}{R^2}$$

En cada punto de la superficie, $\vec{\boldsymbol{E}}$ es perpendicular a esta y su magnitud es la misma en todos los puntos. El flujo eléctrico total es el producto de la magnitud E del campo por el área total $A = \pi R^2$ de la esfera:

$$\Phi_E = EA = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{q}}{R^2}\,(4\pi R^2) = \frac{\mathrm{q}}{\varepsilon_0}$$

El flujo es independiente del radio R de la esfera; solo depende de la carga q encerrada.

Forma general de la ley de Gauss

Supongamos que la superficie encierra no solo una carga puntual q. Sino varias cargas $q_1 + q_2$ ... El campo eléctrico total $\vec{E}$ en cualquier punto es la suma vectorial de los campos $\vec{E}$ de las cargas individuales. Sea q_{enc} la carga total encerrada por la superficie: $q_{enc} = q_1 + q_2$ ... Sea también $\vec{E}$ el campo total en la posición del elemento de área $d\vec{A}$ de la superficie y sea E la componente perpendicular al plano de ese elemento. Al hacerlo, se obtiene el enunciado general de la ley de Gauss:

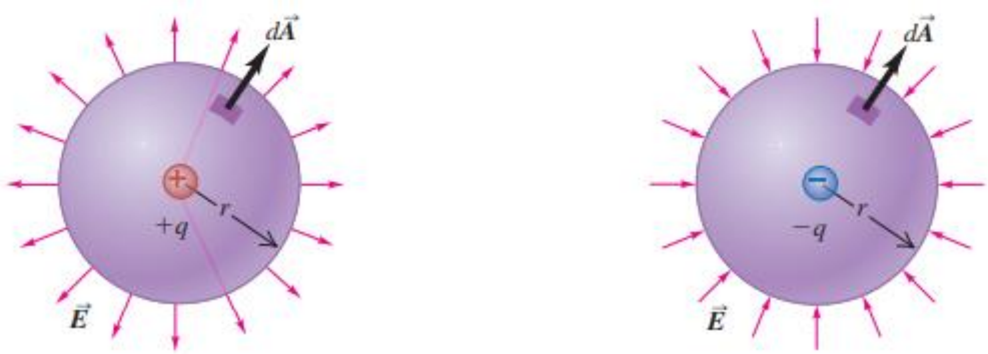
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

El flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada es igual a la carga eléctrica total dentro de la superficie, dividida entre ε_0.Las superficies gaussianas son superficies imaginarias.

En ocasiones conviene más una forma que las otras. Como ejemplo, se muestra una superficie esférica gaussiana de radio r alrededor de una carga puntual $+q$. El campo eléctrico apunta hacia afuera de la superficie gaussiana, de modo que, en cada punto de la superficie, $\vec{E}$ tiene la misma dirección que $d\vec{A}$, $\Phi = 0$ y E es igual a la magnitud del campo $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, Como E es igual en todos los puntos de la superficie, es válido sacarlo de la integral

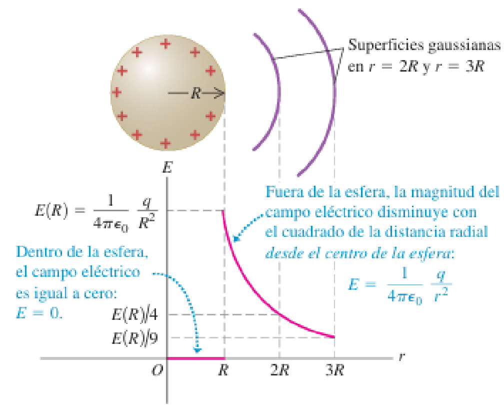
a) Superficie gaussiana alrededor de una carga positiva: flujo positivo (saliente)

b) Superficie gaussiana alrededor de una carga negativa: flujo negativo (entrante)



Campo de una esfera conductora con carga

Se coloca una carga positiva total q en una esfera conductora sólida de radio R. Determine $\vec{E}$ en cualquier punto en el interior o en el exterior de la esfera.



Cálculo del campo eléctrico de una esfera conductora con carga positiva q. Fuera de la esfera, el campo es el mismo como si toda la carga estuviera concentrada en el centro de la esfera

Toda la carga debe encontrarse en la superficie de la esfera. La carga es libre de moverse sobre el conductor y no hay una posición preferida sobre la superficie; por lo tanto, la carga está distribuida de manera uniforme en la superficie y el sistema tiene simetría esférica. Para aprovechar la simetría, se toma como la superficie gaussiana una esfera imaginaria de radio r con centro en el conductor. Se puede calcular el campo adentro o afuera del conductor tomando $r < R$ o $r > R$, respectivamente. En cualquier caso, el punto en que se desea calcular $\vec{E}$ se encuentra en la superficie gaussiana.

La magnitud E del campo sólo depende de la distancia *r* desde el centro y debe tener el mismo valor en todos los puntos sobre la superficie gaussiana.

- Para $r > R$ todo el conductor se encuentra dentro de la superficie gaussiana, de manera que la carga encerrada es q, el área de la superficie gaussiana es $4\pi r^2$ y $\vec{E}$ es uniforme sobre la superficie y perpendicular a ella a cada uno de sus puntos. Entonces:

$$E\,(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

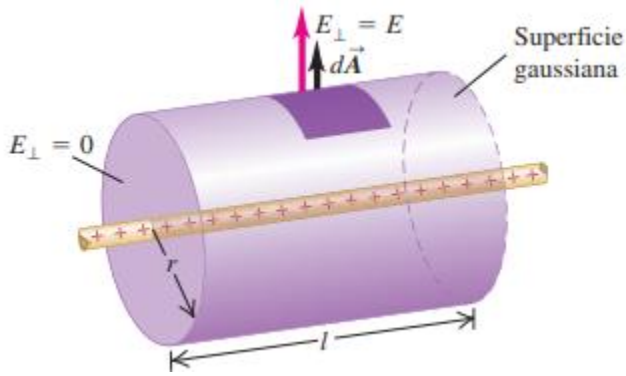
Recuerde que se eligió que la carga q fuera positiva. Si fuera negativa, el campo eléctrico estaría dirigido radialmente hacia el interior y no hacia el exterior y el flujo eléctrico a través de la superficie gaussiana sería negativo.

- Para $r < R$, de nuevo tenemos que $E\,(4\pi r^2) = \frac{Q\ enc}{\varepsilon_0}$. Pero ahora la superficie gaussiana (que esta dentro del conductor) no encima ninguna carga, por lo que $q_{enc} = 0$ y el campo eléctrico en el interior del conductor es igual a cero.

Ya se sabe que dentro de un conductor sólido (sea esférico o no), $\vec{E} = 0$ cuando las cargas están en reposo.

Campo para una carga continua lineal uniforme

Una carga eléctrica está distribuida de manera uniforme a lo largo de un alambre delgado de longitud infinita. La carga por unidad de longitud es λ. Calcule el campo usando la ley de Gauss.



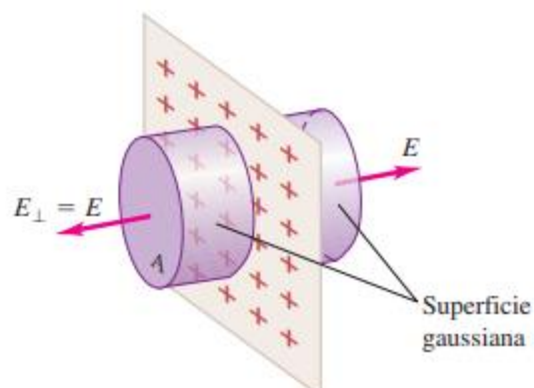
El campo de un alambre infinito, cargado uniformemente, está dirigido en forma radial hacia afuera y que la magnitud E del campo depende solo de la distancia radial del alambre. Esto sugiere el uso de una superficie gaussiana cilíndrica, de radio r y una longitud l cualquiera, coaxial con el alambre.

Sobre la parte cilíndrica de la superficie tenemos que $\vec{E} \cdot \hat{n} = E$ en todas partes. El área de la superficie cilíndrica es $2\pi rl$ y por lo tanto el flujo total Φ_E a través de la superficie gaussiana, es $EA = 2\pi rl$. La carga total encerrada es $Q = \lambda l$ y así, a partir de la ley de Gauss:

$$\Phi_E = 2\pi rlE = \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \rightarrow \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}$$

Campo para una lámina plana infinita cargada

Use la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico que genera una lámina delgada, plana e infinita, en la que hay una densidad de carga superficial uniforme σ.



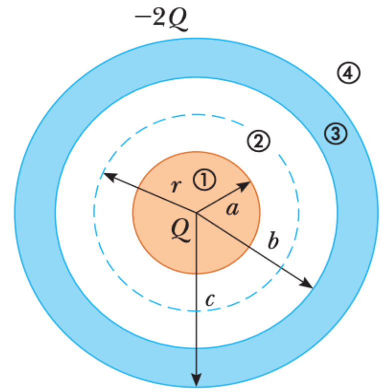
El flujo a través de la parte cilíndrica de la superficie gaussiana es cero porque $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$.

El flujo a través de cada cara de la superficie es $+EA$ porque $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0 \; donde \; E_{perpendicular} = E$.

La carga encerrada es $Q = \sigma A$ y por Gauss:

$$2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Una esfera dentro de un cascarón esférico



Una esfera aislante sólida, de radio a, tiene una carga positiva neta Q. Un cascarón esférico conductor, con radio interior b y radio exterior c, es concéntrico con la esfera sólida y tiene una carga neta $-2Q$. Encuentre el campo eléctrico en las regiones marcadas $(1), (2), (3)$ y (4) y la distribución de carga en el cascarón, cuando todo el sistema está en equilibrio electrostático. La esfera con carga de la figura ahora está rodeada por un cascarón que tiene una carga de $-2Q$.

En la región (2), entre la superficie de la esfera sólida y la superficie interna del cascarón, se construye una superficie gaussiana esférica de radio r, donde $a < r < b$, y observe que la carga dentro de esta superficie es $+Q$. La carga sobre el cascarón conductor crea campo eléctrico cero en la región $r < b$, así que el cascarón no tiene efecto sobre el campo debido a la esfera. En consecuencia, escriba una expresión para el campo en la región (2)

$$E_2 = k\frac{Q}{r^2}\ (para\ a < r < b)$$

Puesto que el cascarón conductor crea un campo cero en su interior, tampoco tiene efecto sobre el campo adentro de la esfera. Por lo tanto, escriba una expresión para el campo en la región (1)

$$E_1 = k\frac{Q}{a^3}r\ (para\ r < a)$$

En la región (4), donde $r > c$ construya una superficie gaussiana esférica; esta superficie rodea una carga total de $q_{in} = Q + (-2Q) = -Q$. Por lo tanto, una expresión para el campo en (4)

$$E_4 = -k\frac{Q}{r^2}(para\ r > c)$$

En (3), el campo eléctrico debe ser cero porque el cascarón esférico es un conductor en equilibrio:

$$E_3 = 0\ (para\ b < r < c)$$

Construya una superficie gaussiana de radio r, donde $b < r < c$ y observe que q_{in} debe ser cero porque $E_3 = 0$. Encuentre la cantidad de carga $q_{interior}$ en la superficie interior del cascarón:

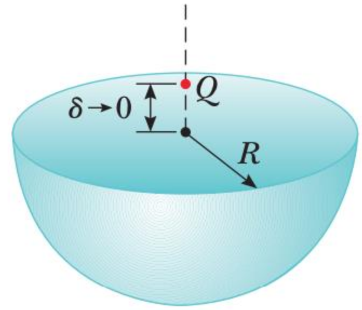
$$q_{int} = q_{esfera} + q_{interior}$$

$$q_{interior} = q_{int} - q_{esfera} = 0 - Q = -Q$$

La carga sobre la superficie interior del cascarón esférico debe ser $-Q$ para cancelar la carga $+Q$ sobre la esfera sólida y dar un campo eléctrico cero en el material del cascarón. Ya que la carga neta en el cascarón es $-2Q$ su superficie exterior debe tener una carga $-Q$.

Campo con carga puntual

Una carga puntual Q se localiza justo por encima del centro de la cara plana de un hemisferio de radio R, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el flujo eléctrico que pasa a) a través de la superficie curva y b) a través de la cara plana?



(a) Como δ es muy pequeño, todos los puntos en el hemisferio están casi a una distancia R de la carga, por lo que el campo en toda la superficie curva es $\frac{kQ}{R^2}$ radial hacia fuera (normal a la superficie). Por lo tanto, el flujo es esta intensidad de campo multiplicada por el área de media esfera:

$$\phi_{curva} = \int \vec{\boldsymbol{E}}\, d\vec{\boldsymbol{A}} = E_{local}\, A_{hemisferio}$$

$$\phi_{curva} = \left(\frac{kQ}{R^2}\right)\left(\frac{1}{2}4\pi R^2\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}Q(2\pi) = \frac{+Q}{2\epsilon_0}$$

(b) La superficie cerrada no encierra ninguna carga, asi que la Ley de Gauss da:

$$\phi_{curva} + \phi_{plana} = 0 \qquad \text{O} \qquad \phi_{plana} = -\phi_{curva} = \frac{-Q}{2\epsilon_0}$$