UNIVERSIDAD
TECNOLÓGICA
DE PANAMÁ

CÁLCULO I MODULO 1

DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN Y TEOREMAS DE LÍMITES

Definición de límite de una función

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en el número a mismo. El **límite de $f(x)$ conforme x se aproxima a a es L,** lo que se escribe como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Teorema 1, Límite de una función lineal

Si m y b son dos constantes cualesquiera, entonces

$$\lim_{x \to a}(mx + b) = ma + b$$

Problema ejemplo

$$\lim_{x \to 2}(3x + 5) = (3 \cdot 2) + 5$$

$$\lim_{x \to 2}(3x + 5) = 11$$

Teorema 2, Límite de una función constante

Si c es una constante, entonces para cualquier número a

$$\lim_{x \to a} c = c$$

Problema ejemplo

$$\lim_{x \to 5} 7 = 7$$

Teorema 3, Límite de una función identidad

$$\lim_{x \to a} x = a$$

Problema ejemplo

$$\lim_{x \to -6} x = -6$$

Teorema 4, Límite de la suma y de la diferencia de dos funciones

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$$

Teorema 5, Límite de la suma y de la diferencia de n funciones

Si $\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x \to a} f_2(x) = L_2$, …, y $\lim_{x \to a} f_n(x) = L_n$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)] = L_1 \pm L_2 \pm \cdots \pm L_n$$

Teorema 6, Límite del producto de dos funciones

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

Problema ejemplo

$$\lim_{x \to 4} [x(2x + 1)] = \lim_{x \to 4} x \cdot \lim_{x \to 4} (2x + 1) = 4 \cdot 9 = 36$$

Teorema 7, Límite del producto de n funciones

Si $\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x \to a} f_2(x) = L_2$, …, y $\lim_{x \to a} f_n(x) = L_n$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)] = L_1 \cdot L_2 \cdot \ldots \cdot L_n$$

Teorema 8, Límite de la n-ésima potencia de una función

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y n es cualquier número entero positivo, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = L^n$$

Problema ejemplo

$$\lim_{x \to -2} (5x + 7)^4 = \left[\lim_{x \to -2} (5x + 7)\right]^4 = (-3)^4 = 81$$

Teorema 9, Límite del cociente de dos funciones

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad si \;\; M \neq 0$$

Problema ejemplo

$$\lim_{x \to 4} \frac{x}{-7x+1} = \frac{\lim_{x \to 4} x}{\lim_{x \to 4} -7x+1} = \frac{4}{-27} = -\frac{4}{27}$$

Teorema 10, Límite de la raíz n-ésima de una función

Si n es un número entero positivo $\lim_{x \to a} f(x) = L$ entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

con la restricción de que si n es par, $L > 0$

Problema ejemplo

$$\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{\frac{x}{-7x+1}} = \sqrt[3]{\lim_{x \to 4} \frac{x}{-7x+1}} = \sqrt[3]{-\frac{4}{27}} = -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$$

Teorema

Si a es cualquier número real diferente de cero, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$$

Teorema

Si $a > 0$ y n es un número entero positivo, o si $a \leq 0$ y n es un número entero impar, entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

Practica en clase

Determine el límite

1) $\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x+1}+2}-2}{x^2-49}$
2) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$
3) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+3x^2-x-3}{x^3+5x^2+2x-8}$
4) $\lim_{x\to 5}(3x-7)$
5) $\lim_{x\to 2}(x^2+2x-1)$
6) $\lim_{x\to 2} \frac{3x+4}{8x-1}$
7) $\lim_{s\to 4} \frac{3s^2-8s-16}{2s^2-9s+4}$
8) $\lim_{y\to -2} \frac{y^3+8}{y+2}$
9) $\lim_{y\to -3} \sqrt{\frac{y^2-9}{2y^2+7y+3}}$
10) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
11) $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+2}-\sqrt{2}}{h}$
12) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3-x^2-x+10}{x^2+3x+2}$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Solucionario de la practica en clase

1) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{\sqrt[3]{x+1}+2}-2}{x^2-49}=\lim\limits_{x\to 7}\frac{\left(\sqrt{\sqrt[3]{x+1}+2}-2\right)}{(x^2-49)}\cdot\frac{\left[\sqrt{\sqrt[3]{x+1}+2}+2\right]}{\left[\sqrt{\sqrt[3]{x+1}+2}+2\right]}$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{x+1}+2-4}{(x^2-49)\left[\sqrt{\sqrt[3]{x+1}+2}+2\right]}$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}-2\right)}{(x+7)(x-7)\left[\sqrt{\sqrt[3]{x+1}+2}+2\right]}\cdot\frac{\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}+2(x+1)^{\frac{1}{3}}+4\right]}{\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}+2(x+1)^{\frac{1}{3}}+4\right]}$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{(x+1)-8}{(x+7)(x-7)\left[\sqrt{\sqrt[3]{x+1}+2}+2\right]\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}+2(x+1)^{\frac{1}{3}}+4\right]}$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{\cancel{(x-7)}}{(x+7)\cancel{(x-7)}\left[\sqrt{\sqrt[3]{x+1}+2}+2\right]\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}+2(x+1)^{\frac{1}{3}}+4\right]}$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{1}{(x+7)\left[\sqrt{\sqrt[3]{x+1}+2}+2\right]\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}+2(x+1)^{\frac{1}{3}}+4\right]}$$

$$=\frac{1}{(14)\left[\sqrt{\sqrt[3]{7+1}+2}+2\right]\left[(7+1)^{\frac{2}{3}}+2(7+1)^{\frac{1}{3}}+4\right]}$$

$$=\frac{1}{(14)(4)(4+4+4)}=\frac{1}{672}$$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1\right)}{\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1\right)}\cdot\frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\cancel{(x-1)}\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1+1}{1+1+1} = \frac{2}{3}$$

Otro Método: Cambio de Variable

$y = \sqrt[6]{x} \to x = y^6$

$si: x \to 1 => y \to 1$

$$= \lim_{y\to 1} \frac{\sqrt[3]{y^6}-1}{\sqrt{y^6}-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y^2-1}{y^3-1}$$

$$= \lim_{y\to 1} \frac{(y+1)\cancel{(y-1)}}{\cancel{(y-1)}(y^2+y+1)} = \lim_{y\to 1} \frac{y+1}{y^2+y+1}$$

$$= \frac{1+1}{1+1+1} = \frac{2}{3}$$

3) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+3x^2-x-3}{x^3+5x^2+2x-8}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x+3}{x^2+6x+8} \cdot \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} (*)$$

(*)**USAR DIVISIÓN SINTÉTICA** los polinomios son divisibles entre el factor "$(x-1)$"

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x+3}{x^2+6x+8} = \frac{(1)^2+4(1)+3}{(1)^2+6(1)+8} = \frac{8}{15}$$

4) $\lim\limits_{x\to 5}(3x-7) = 3(5)-7 = 8$

5) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-1) = \lim\limits_{x\to 2} x^2 + \lim\limits_{x\to 2}(2x-5) = (\lim\limits_{x\to 2} x)^2 + [2(2)-1]$

$$= (2)^2 + 3 = 7$$

6) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x+4}{8x-1} = \frac{\lim_{x\to 2}(3x+4)}{\lim_{x\to 2}(8x-1)} = \frac{3(2)+4}{8(2)-1} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

7) $\lim\limits_{s\to 4} \frac{3s^2-8s-16}{2s^2-9s+4} = \lim\limits_{s\to 4} \frac{(3s+4)(s-4)}{(2s-1)(s-4)} = \lim\limits_{s\to 4} \frac{3s+4}{2s-1} = \frac{\lim_{s\to 4}(3s+4)}{\lim_{s\to 4}(2s-1)} = \frac{3(4)+4}{2(4)-1} = \frac{16}{7}$

8) $\lim\limits_{y\to -2} \frac{y^3+8}{y+2} = \lim\limits_{y\to -2} \frac{(y+2)(y^2-2y+4)}{y+2} = \lim\limits_{y\to -2}(y^2-2y+4)$

$$= \lim_{y\to -2} y^2 + \lim_{y\to -2}(-2y+4) = (\lim_{y\to -2} y)^2 + [(-2)(-2)+4] = (-2)^2 + 8 = 12$$

9) $\lim\limits_{y\to -3} \sqrt{\frac{y^2-9}{2y^2+7y+3}} = \lim\limits_{y\to -3} \sqrt{\frac{(y-3)(y+3)}{(2y+1)(y+3)}} = \lim\limits_{y\to -3} \sqrt{\frac{y-3}{2y+1}} = \sqrt{\lim\limits_{y\to -3} \frac{y-3}{2y+1}}$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{y\to -3}(y-3)}{\lim_{y\to -3}(2y+1)}} = \sqrt{\frac{-6}{-5}} = \sqrt{\frac{6}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{30}$$

10) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\lim_{x\to 1} 1}{\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\lim_{x\to 1}\sqrt{x}+\lim_{x\to 1} 1} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{x\to 1} x}+1}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

11) $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h+2}-\sqrt{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{h+2}-\sqrt{2})(\sqrt{h+2}+\sqrt{2})}{h(\sqrt{h+2}+\sqrt{2})} = \lim_{h\to 0}\frac{(h+2)-2}{h(\sqrt{h+2}+\sqrt{2})}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h+2}+\sqrt{2}} = \frac{\lim_{h\to 0} 1}{\lim_{h\to 0}(\sqrt{h+2}+\sqrt{2})} = \frac{1}{\lim_{h\to 0}\sqrt{h+2}+\lim_{h\to 0}\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

12) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3-x^2-x+10}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-3x+5)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x\to -2}\frac{x^2-3x+5}{x+1} = \frac{\lim_{x\to -2} x^2+\lim_{x\to -2}(-3x+5)}{\lim_{x\to -2}(x+1)} =$

$$\frac{\left(\lim_{x\to -2} x\right)^2+\lim_{x\to -2}(-3x+5)}{\lim_{x\to -2}(x+1)} = \frac{(-2)^2-3(-2)+5}{-2+1} = \frac{15}{-1} = -15$$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Tarea

1) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x^2-4}$
2) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{h+a}-\sqrt[3]{a}}{h}$
3) $\lim_{z\to -2}(z^3+8)$
4) $\lim_{y\to -1}(y^3-2y^2+3y-4)$
5) $\lim_{x\to -1}\frac{2x+1}{x^2-3x+4}$
6) $\lim_{r\to 1}\sqrt{\frac{8r+1}{r+3}}$
7) $\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{\frac{x^2-3x+4}{2x^2-x-1}}$
8) $\lim_{z\to -5}\frac{z^2-25}{z+5}$
9) $\lim_{x\to 1/3}\frac{3x-1}{9x^2-1}$
10) $\lim_{x\to 4}\frac{3x^2-17x+20}{4x^2-25x+36}$
11) $\lim_{s\to 1}\frac{s^3-1}{s-1}$
12) $\lim_{t\to 3/2}\sqrt{\frac{8t^3-27}{4t^2-9}}$
13) $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$
14) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$
15) $\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-x-3}{x^3+2x^2+6x+5}$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Solucionario de la tarea

1) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+6)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)(x-2)}\cdot\frac{\left[(x+6)^{\frac{2}{3}}+2(x+6)^{\frac{1}{3}}+4\right]}{\left[(x+6)^{\frac{2}{3}}+2(x+6)^{\frac{1}{3}}+4\right]}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+6)-8}{(x+2)(x-2)\left[(x+6)^{\frac{2}{3}}+2(x+6)^{\frac{1}{3}}+4\right]}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}\left[(x+6)^{\frac{2}{3}}+2(x+6)^{\frac{1}{3}}+4\right]}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)\left[(x+6)^{\frac{2}{3}}+2(x+6)^{\frac{1}{3}}+4\right]}$$

$$=\frac{1}{(4)[4+2(2)+4]}=\frac{1}{48}$$

2) $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h+a}-\sqrt[3]{a}}{h}\cdot\frac{\left[(h+a)^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}(h+a)^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right]}{\left[(h+a)^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}(h+a)^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right]}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(h+\cancel{a})-\cancel{a}}{h\left[(h+a)^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}(h+a)^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left[(h+a)^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}(h+a)^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right]}=\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3a^{\frac{2}{3}}}$$

3) $\lim_{z\to -2}(z^3+8)=\lim_{z\to -2}z^3+\lim_{z\to -2}8=\left(\lim_{z\to -2}z\right)^3+8=(-2)^3+8=0$

4) $\lim_{y\to -1}(y^3-2y^2+3y-4)=\lim_{y\to -1}y^3-\lim_{y\to -1}2y^2+\lim_{y\to -1}(3y-4)=\lim_{y\to -1}y\cdot\lim_{y\to -1}y\cdot\lim_{y\to -1}y-\lim_{y\to -1}2\cdot\lim_{y\to -1}y\cdot\lim_{y\to -1}y+\lim_{y\to -1}(3y-4)=(-1)^3-2(-1)^2+3(-1)-4=-10$

5) $\lim_{x\to -1}\frac{2x+1}{x^2-3x+4}=\frac{\lim_{x\to -1}(2x+1)}{\lim_{x\to -1}(x^2-3x+4)}=\frac{\lim_{x\to -1}(2x+1)}{\lim_{x\to -1}x^2+\lim_{x\to -1}(-3x+4)}=\frac{\lim_{x\to -1}(2x+1)}{\left(\lim_{x\to -1}x\right)^2+\lim_{x\to -1}(-3x+4)}=\frac{2(-1)+1}{(-1)^2+(-3)(-1)+4}=\frac{-1}{8}$

6) $\lim\limits_{r\to1}\sqrt{\frac{8r+1}{r+3}} = \sqrt{\lim\limits_{r\to1}\frac{8r+1}{r+3}} = \sqrt{\frac{\lim\limits_{r\to1}(8r+1)}{\lim\limits_{r\to1}(r+3)}} = \sqrt{\frac{8(1)+1}{1+3}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

7) $\lim\limits_{x\to4}\sqrt[3]{\frac{x^2-3x+4}{2x^2-x-1}} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-3x+4}{2x^2-x-1}} = \sqrt[3]{\frac{\lim\limits_{x\to4}(x^2-3x+4)}{\lim\limits_{x\to4}(2x^2-x-1)}} = \sqrt[3]{\frac{\lim\limits_{x\to4}x^2+\lim\limits_{x\to4}(-3x+4)}{\lim\limits_{x\to4}2x^2+\lim\limits_{x\to4}(-x-1)}} =$
$\sqrt[3]{\frac{(\lim_{x\to4}x)^2+(-8)}{2\left(\lim\limits_{x\to4}x\right)^2+(-5)}} = \sqrt[3]{\frac{(4)^2-8}{2(4)^2-5}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$

8) $\lim\limits_{z\to-5}\frac{z^2-25}{z+5} = \lim\limits_{z\to-5}\frac{(z-5)(z+5)}{z+5} = \lim\limits_{z\to-5} z-5 = -5-5 = -10$

9) $\lim\limits_{x\to1/3}\frac{3x-1}{9x^2-1} = \lim\limits_{x\to1/3}\frac{3x-1}{(3x-1)(3x+1)} = \lim\limits_{x\to1/3}\frac{1}{3x+1} = \frac{1}{3\left(\frac{1}{3}\right)+1} = \frac{1}{2}$

10) $\lim\limits_{x\to4}\frac{3x^2-17x+20}{4x^2-25x+36} = \lim\limits_{x\to4}\frac{(x-4)(3x-5)}{(x-4)(4x-9)} = \lim\limits_{x\to4}\frac{(3x-5)}{(4x-9)} = \frac{\lim\limits_{x\to4}3x-5}{\lim\limits_{x\to4}4x-9} = \frac{3*4-5}{4*4-9} = \frac{7}{7} = 1$

11) $\lim\limits_{s\to1}\frac{s^3-1}{s-1} = \lim\limits_{s\to1}\frac{(s-1)(s^2+s+1)}{(s-1)} = \lim\limits_{s\to1}s^2+s+1 = \lim\limits_{s\to1}s^2+\lim\limits_{s\to1}(s+1) = (\lim\limits_{s\to1}s)^2 +$
$\lim\limits_{s\to1}(s+1) = 1^2+1+1 = 3$

12) $\lim\limits_{t\to3/2}\sqrt{\frac{8t^3-27}{4t^2-9}} = \lim\limits_{t\to3/2}\sqrt{\frac{(2t-3)(4t^2+6t+9)}{(2t-3)(2t+3)}} = \lim\limits_{t\to3/2}\sqrt{\frac{4t^2+6t+9}{2t+3}} = \sqrt{\frac{\lim\limits_{t\to3/2}(4t^2+6t+9)}{\lim\limits_{t\to3/2}(2t+3)}} =$
$\sqrt{\frac{\lim\limits_{t\to3/2}4*\lim\limits_{t\to3/2}t*\lim\limits_{t\to3/2}t+\lim\limits_{t\to3/2}(6t+9)}{\lim\limits_{t\to3/2}(2t+3)}} = \sqrt{\frac{4\left(\frac{3}{2}\right)^2+6*\frac{3}{2}+9}{2*\frac{3}{2}+3}} = \sqrt{\frac{27}{6}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6}}*\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{18}}{6} = \frac{3(3\sqrt{2})}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

13) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}*\frac{\sqrt{x+5}+2}{\sqrt{x+5}+2} = \lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+5)-4}{(x+1)(\sqrt{(x+5)}+2)} = \lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+1)}{(x+1)(\sqrt{(x+5)}+2)} = \lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{\sqrt{x+5}+2} =$
$\frac{1}{\sqrt{-1+5}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$

14) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{(\sqrt[3]{x})^3-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{(\sqrt[3]{x}-1)((\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1)} = \lim\limits_{x\to1}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1} =$
$\frac{\lim\limits_{x\to1}1}{\lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\lim\limits_{x\to1}\sqrt[3]{x}+\lim\limits_{x\to1}1} = \frac{\lim\limits_{x\to1}1}{(\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to1}x})^2+\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to1}x}+\lim\limits_{x\to1}1} = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$

15) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^2-x-3}{x^3+2x^2+6x+5} = \lim\limits_{x\to-1}\frac{(2x-3)(x+1)}{(x+1)(x^2+x+5)} = \lim\limits_{x\to-1}\frac{2x-3}{x^2+x+5} = \frac{\lim\limits_{x\to-1}2x-3}{\lim\limits_{x\to-1}x^2+x+5} =$
$\frac{-5}{\lim\limits_{x\to-1}x^2+\lim\limits_{x\to-1}(x+5)} = \frac{-5}{\left(\lim\limits_{x\to-1}x\right)^2+4} = \frac{-5}{(-1)^2+4} = -1$

CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTICAS Y TEOREMA DE ESTRICCIÓN

El teorema de estricción

Suponga que las funciones f, g y h están definidas en algún intervalo abierto I que contiene a a, y que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para toda x en I para la cual $x \neq a$. También suponga que $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} h(x)$ existen y son iguales a L.

Teorema

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Teorema

La función seno es continua en 0.

Teorema

La función coseno es continua en 0.

Teorema

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$$

Teorema

Las funciones seno y coseno son continuas en cada número real.

Teorema

Las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante son continuas en sus dominios.

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Practica en clase

Determine el $\lim_{x \to 0} f(x)$ de las siguientes funciones

1) $f(x) = \frac{2x}{\sin 3x}$
2) $f(x) = \frac{\sin 3x}{\sin 6x}$
3) $f(x) = \frac{\sin^3 3x}{x^2}$
4) $f(x) = \frac{\sin^5 2x}{4x^5}$
5) $f(x) = \frac{1-\cos x}{1+\sin x}$
6) $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{4x}$
7) $f(x) = \frac{1-\cos^2 x}{2x^2}$
8) $f(x) = \frac{\tan^4 2x}{4x^4}$
9) $f(x) = \frac{\sin x}{3x^2+2x}$
10) $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$

Solucionario de la practica en clase

1) $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)}{\frac{\sin 6x}{6}}=\frac{\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\sin x\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2=0\cdot 1=0$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^5 2x}{4x^5}=8\lim_{x\to 0}\frac{\sin^5 2x}{32x^5}=8\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)^5=8\cdot 1=8$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1+\sin x}=\frac{1-1}{1+0}=0$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{4x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2x}=\frac{1}{2}\cdot 0=0$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x^2}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2=\frac{1}{2}(1)^2=\frac{1}{2}$

8) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^4 2x}{4x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^4 2x}{4x^4\cos^4 2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4}{\cos^4 2x}\right)\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^4=\left[\frac{4}{(1)^4}\right](1)^4=4$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x(3x+2)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\left[\frac{1}{(3x+2)}\right]=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

10) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{1}{2}x}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}\right)^2=\frac{1}{2}(1)^2=\frac{1}{2}$

UNIVERSIDAD
TECNOLÓGICA
DE PANAMÁ

Tarea

1) $f(x) = \frac{\sin 4x}{x}$
2) $f(x) = \frac{\sin 9x}{\sin 7x}$
3) $f(x) = \frac{3x}{\sin 5x}$
4) $f(x) = \frac{x^2}{\sin^2 3x}$
5) $f(x) = \frac{x}{\cos x}$
6) $f(x) = \frac{1-\cos 4x}{x}$
7) $f(x) = \frac{3x^2}{1-\cos^2\frac{1}{2}x}$
8) $f(x) = \frac{\tan x}{2x}$
9) $f(x) = \frac{x^2+3x}{\sin x}$

Solucionario de Tarea

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=4\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=4\cdot 1=4$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{\sin 7x}=\frac{9}{7}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 9x}{9x}}{\frac{\sin 7x}{7x}}=\frac{9}{7}\cdot 1=\frac{9}{7}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 5x}=\frac{3}{5}\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}=\frac{3}{5}\cdot 1=\frac{3}{5}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 3x}=\frac{1}{9}\lim\limits_{x\to 0}\frac{9x^2}{\sin^2 3x}=\frac{1}{9}\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\right)^2=\frac{1}{9}(1)^2$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\cos x}=\frac{0}{1}=0$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x}=4\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{4x}=4\cdot 0=0$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos^2\frac{1}{2}x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{12\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{\sin^2\frac{1}{2}x}=12\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{\sin^2\frac{1}{2}x}=12(1)^2$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{2x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+3)x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}(x+3)\left(\frac{x}{\sin x}\right)=3\cdot 1=3$

LÍMITES LATERALES

Definición de límite por la derecha

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto (a, c). Entonces, el **límite de $f(x)$, conforme x tiende a a por la derecha, es L,** lo que se denota por

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Definición de límite por la izquierda

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto (d, a). Entonces, el **límite de $f(x)$, conforme x tiende a a por la izquierda, es L,** lo que se denota por

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

Problema ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

Teorema

El $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y es igual a L si y solo si $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existen y son iguales a L.

Problemas ejemplo

a)

$$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \leq 1 \\ 2 + x^2, & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} (4 - x^2)$$

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = 3$$

$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} (2 + x^2)$$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Como $\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^+} h(x)$ y ambos son iguales a 3, se concluye, por el teorema anterior, que
$\lim_{x\to 1} h(x) = 3.$

b)

$$C(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1.8x, & x > 10 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 10^-} C(x) = \lim_{x\to 10^-} 2x$$

$$\lim_{x\to 10^-} C(x) = 20$$

$$\lim_{x\to 10^+} C(x) = \lim_{x\to 10^+} 1.8x$$

Puesto que $\lim_{x\to 10^-} C(x) \neq \lim_{x\to 10^+} C(x)$, se concluye, por el teorema anterior, que $\lim_{x\to 1} C(x)$ no existe.

Practica en clase

Dibuje la gráfica de la función, determine si existe o no, el límite indicado

1) $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \\ -1, & x = 1 \\ -3, & x = x \end{cases}$

(a) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$; (b) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$; (c) $\lim_{x\to 1} f(x)$

2) $h(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 3 \\ 10 - x, & 3 \le x \end{cases}$

(a) $\lim_{x\to 3^+} h(x)$; (b) $\lim_{x\to 3^-} h(x)$; (c) $\lim_{x\to 3} h(x)$

3) $S(x) = |sgn\, x|$ (la función $sgn\, x$ se definió en el ejemplo ilustrativo 1)

(a) $\lim_{x\to 0^+} S(x)$; (b) $\lim_{x\to 0^-} S(x)$; (c) $\lim_{x\to 0} S(x)$

4) $\mathrm{g}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x}, & x \le 0 \\ \sqrt[3]{x}, & 0 < x \end{cases}$

(a) $\lim_{x\to 0^+} \mathrm{g}(x)$; (b) $\lim_{x\to 0^-} \mathrm{g}(x)$; (c) $\lim_{x\to 0} \mathrm{g}(x)$

Resuelve los siguientes problemas

5) Si existen, determine: (a) $\lim_{x\to 2^+} [\![x]\!]$; (b) $\lim_{x\to 2^-} [\![x]\!]$; (c) $\lim_{x\to 2} [\![x]\!]$

6) Sea $h(x) = (x-1)\ \ sgn\, x$. Dibuje la grafica de h. Si existen, determine:

(a) $\lim_{x\to 0^+} h(x)$; (b) $\lim_{x\to 0^-} \mathrm{h}(x)$; (c) $\lim_{x\to 0} h(x)$

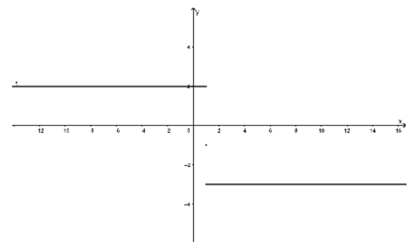
7) Dada $f(x) = \begin{cases} 3x+2, & x < 4 \\ 5x - k, & 4 \le x \end{cases}$, determine el valor de k, tal que $\lim_{x\to 4} f(x)$ exista.

8) Dada $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le -2 \\ ax + b, & -2 < x < 2 \\ 2x - 6, & 2 \le x \end{cases}$, determine valores de a y b tales que

$\lim_{x\to -2} f(x)$ y $\lim_{x\to 2} f(x)$ existan.

Solucionario de la practica en clase

1) $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \\ -1, & x = 1 \\ -3, & x = x \end{cases}$

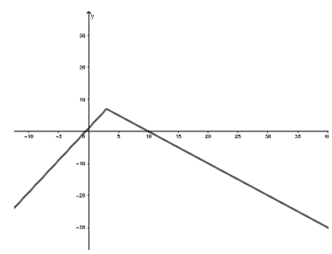


(a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (-3) = -3$

(b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 2 = 2$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe porque $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

2) $h(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 3 \\ 10 - x, & 3 \leq x \end{cases}$

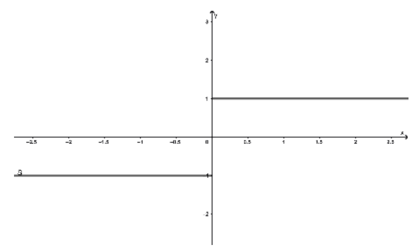


(a) $\lim\limits_{x\to 3^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (10 - x) = 10 - 3 = 7$

(b) $\lim\limits_{x\to 3^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (2x + 1) = 2(3) + 1 = 7$

(c) $\lim\limits_{x\to 3} F(x) = 7$ Teorema 1.6.3.

3) $S(x) = |sgn\, x|$, donde $sgn\, x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$



$$S(x) = |sgn\, x| = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

(a) Porque $sgn\, x = 1$ si $x > 0$, entonces $|sgn\, x| = 1$ si $x > 0$, y

$$\lim_{x\to 0^+} S(x) = \lim_{x\to 0^+} |sgn\, x| = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

(b) Porque $sgn\, x = -1$ si $x < 0$, entonces $|sgn\, x| = 1$ si $x < 0$, y

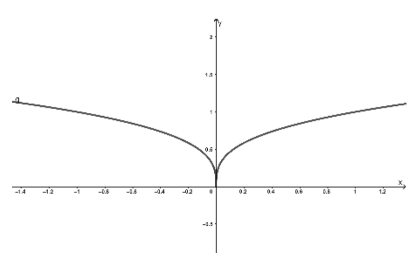
$$\lim_{x\to 0^-} S(x) = \lim_{x\to 0^-} |sgn\, x| = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1$$

(c) Porque $\lim\limits_{x\to 0^+} S(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} S(x) = 1$, por Teorema 1.6.3 $\lim\limits_{x\to 0} S(x) = 1$

4) $g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x}, & x \leq 0 \\ \sqrt[3]{x}, & 0 < x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x} = 0$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt[3]{-x} = 0$



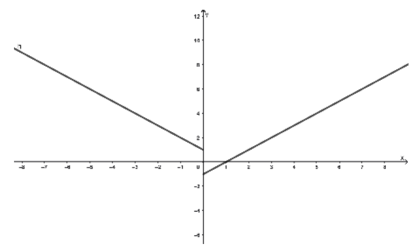
(c) Porque $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = 0$, entonces por Teorema 1.6.3 $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

5) (a) $\lim\limits_{x \to 2^+} [\![x]\!] = 2$

(b) $\lim\limits_{x \to 2^-} [\![x]\!] = 1$

(c) $\lim\limits_{x \to 2} [\![x]\!]$ no existe porque $\lim\limits_{x \to 2^-} [\![x]\!] \neq \lim\limits_{x \to 2^+} [\![x]\!]$

6) $h(x) = (x-1)\ sgn\, x = \begin{cases} 1-x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & 0 < x \end{cases}$



(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x-1) = -1$

(b) $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (1-x) = 1$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ no existe porque $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$

7) $f(x) = \begin{cases} 3x+2, & x < 4 \\ 5x - k, & 4 \leq x \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ existe si y solo si $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = (3x+2) = 14$

Por lo tanto $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ existe si y solo si $20 + k = 14$; por lo tanto $k = -6$

8) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq -2 \\ ax+b, & -2 < x < 2 \\ 2x - 6, & 2 \leq x \end{cases}$

Si $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ existe entonces $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$; eso es, $4 = -2a + b$

Si $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ existe entonces $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; eso es, $2a + b = -2$

Resolviendo estas ecuaciones, obtenemos $a = -\frac{3}{2}, b = 1$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Tarea

Dibuje la gráfica de la función, determine si existe o no, el límite indicado

1) $f(t) = \begin{cases} t+4, & t \leq -4 \\ 4-t, & 4 < t \end{cases}$

(a) $\lim_{x\to -4^+} f(t)$; (b) $\lim_{x\to -4^-} f(t)$; (c) $\lim_{x\to -4} f(t)$.

2) $g(t) = \begin{cases} 3+t^2, & t < -2 \\ 0, & t = -2 \\ 11-t^2, & -2 < t \end{cases}$

(a) $\lim_{x\to -2^+} g(t)$; (b) $\lim_{x\to -2^-} g(t)$; (c) $\lim_{x\to -2} g(t)$.

3) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < -1 \\ x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \end{cases}$

(a) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$; (b) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$; (c) $\lim_{x\to -1} f(x)$; (d) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$; (e) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$;
(f) $\lim_{x\to 1} f(x)$.

4) $G(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{t+1}, & t \leq -1 \\ \sqrt{1-t^2}, & -1 < x < 1 \\ \sqrt[3]{t-1}, & 1 \leq x \end{cases}$

(a) $\lim_{x\to -1^-} G(t)$; (b) $\lim_{x\to -1^+} G(t)$; (c) $\lim_{x\to -1} G(t)$; (d) $\lim_{x\to 1^-} G(t)$; (e) $\lim_{x\to 1^+} G(t)$;
(f) $\lim_{x\to 1} G(t)$.

Resuelva los siguientes problemas

5) Si existen, determine: (a) $\lim_{x\to 4^+} [\![x-3]\!]$; (b) $\lim_{x\to 4^-} [\![x-3]\!]$; (c) $\lim_{x\to 1} [\![x-3]\!]$.

6) Sea $G(x) = [\![x]\!] + [\![4-x]\!]$. Dibuje la grafica de G. Si existen, determine:
(a) $\lim_{x\to 3^+} G(x)$; (b) $lim_{x\to 3^-} G(x)$; (c) $\lim_{x\to 3} G(x)$.

7) Dada $f(x) = \begin{cases} kx-3, & x \leq -1 \\ x^2+k, & -1 < x \end{cases}$, determine el valor de k tal que $\lim_{x\to -1} f(x)$ exista.

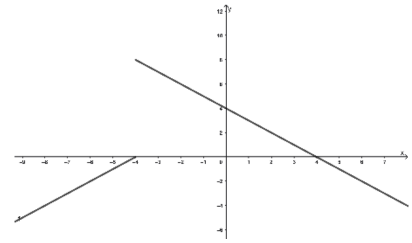
8) Dada $f(x) = \begin{cases} 2x - a, & x < -3 \\ ax + 2b, & -3 \leq x \leq 3, \\ b - 5x, & 3 < x \end{cases}$ determine los valores de a y b tales que $\lim_{x \to -3} f(x)$ y $\lim_{x \to 3} f(x)$ existan.

9) Sea $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & 0 < x \end{cases}$, demuestre que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe, y que $\lim_{x \to 0} |f(x)|$ existe.

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Solucionario de la tarea

1) $f(t) = \begin{cases} t+4, & t \leq -4 \\ 4-t, & 4 < t \end{cases}$

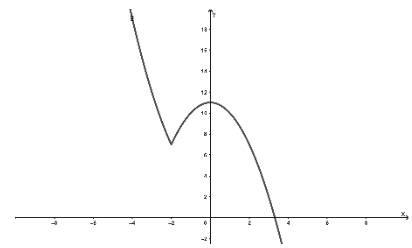


(a) $\lim\limits_{x \to -4^+} f(t) = \lim\limits_{x \to -4^+} (4-t) = 8$

(b) $\lim\limits_{x \to -4^-} f(t) = \lim\limits_{x \to -4^-} f(t)\,(t+4) = 0$

(c) $\lim\limits_{x \to -4} f(t)$ no existe porque $\lim\limits_{x \to -4^-} f(t) \neq \lim\limits_{x \to -4^+} f(t)$.

2) $g(t) = \begin{cases} 3+t^2, & t < -2 \\ 0, & t = -2 \\ 11-t^2, & -2 < t \end{cases}$



(a) Porque $g(t) = 11 - t^2$ si $t > -2$, entonces

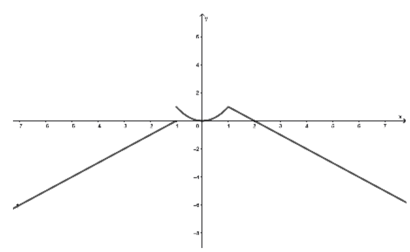
$\lim\limits_{x \to -2^+} g(t) = \lim\limits_{x \to -2^+} (3+t^2) = 7.$

(b) Porque $g(t) = 3 + t^2$ si $t < -2$, entonces

$\lim\limits_{x \to -2^-} g(t) = \lim\limits_{x \to -2^-} (3+t^2) = 7.$

(c) Porque $\lim\limits_{x \to -2^+} g(t) = \lim\limits_{x \to -2^-} g(t) = 7$, entonces por teorema 1.6.3 $\lim\limits_{x \to -2} (3+t^2) = 7.$

3) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < -1 \\ x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \end{cases}$



(a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x+1) = -1+1 = 0.$

(b) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} x^2 = (-1)^2 = 1.$

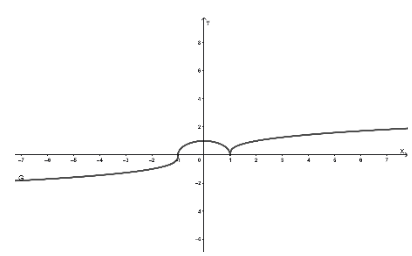
(c) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ no existe porque $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$.

(d) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1^2 = 1.$

(e) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2-x) = 2-1 = 1.$

(f) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$ por teorema 1.6.3.

4) $G(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{t+1}, & t \leq -1 \\ \sqrt{1-t^2}, & -1 < x < 1 \\ \sqrt[3]{t-1}, & 1 \leq x \end{cases}$



(a) $\lim\limits_{x \to -1^-} G(t) = \lim\limits_{x \to -1^-} - \sqrt[3]{t+1} = \sqrt[3]{-1+1} = 0$

(b) $\lim\limits_{x \to -1^+} G(t) = \lim\limits_{x \to -1^+} \sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-(-1)^2} = 0$

(c) $\lim\limits_{x \to -1} G(t) = 0$ por teorema 1.6.3.

(d) $\lim\limits_{x \to 1^-} G(t) = \lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-1^2} = 0$

(e) $\lim\limits_{x \to 1^+} G(t) = \lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt[3]{t-1} = \sqrt[3]{1-1} = 0$

(f) $\lim\limits_{x\to 1} G(t) = 0$ por teorema 1.6.3.

5) (a) $\lim\limits_{x\to 4^+} [\![x-3]\!] = [\![1^+]\!] = 1$

(b) $\lim\limits_{x\to 4^-} [\![x-3]\!] = [\![1^-]\!] = 0$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} [\![x]\!]$ no existe porque $\lim\limits_{x\to 4^-} [\![x]\!] \neq \lim\limits_{x\to 4^+} [\![x]\!]$.

6) Sea $G(x) = [\![x]\!] + [\![4-x]\!]$.

Sea n sea cualquier número entero. Si $z = n$, entonces $G(x) = n + (4-n) = 4$

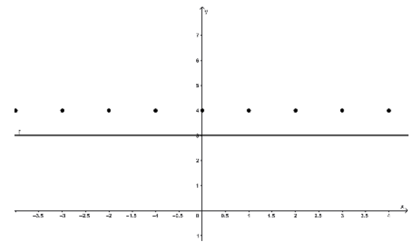
Si $n < x < n < n+1$ entonces $4-n > 4-x > 4-(n+1) = 3-n$

Entonces $G(x) = n + (3-n) = 3$

(a) $\lim\limits_{x\to 3^+} G(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} 3 = 3$

(b) $\lim\limits_{x\to 3^-} = \lim\limits_{x\to 3^-} 3 = 3$

(c) $\lim\limits_{x\to 3^+} G(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} G(x) = 3$ por teorema 1.6.3. $\lim\limits_{x\to 3} G(x) = 3$



7) $f(x) = \begin{cases} kx-3, & x \leq -1 \\ x^2+k, & -1 < x \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ existe si y solo si $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to -1^-} = \lim\limits_{x\to -1^-} (kx-3) = -k-3$ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x^2+k) = 1+k$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$existe si y solo si $-k-3 = 1+k$; entonces $k = -2^{x\to -1^+}$

8) $f(x) = \begin{cases} 2x-a, & x < -3 \\ ax+2b, & -3 \leq x \leq 3 \\ b-5x, & 3 < x \end{cases}$

- Encuentra los valores a y b para que $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ existan.

  Debido a los valores de los dos limites laterales

  $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^-} (2x-a) = -6-a$.

  $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^+} (ax+2b) = -3a+2b$.

  Si $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ existe, por teorema 1.6.3. tenemos que

  $-6-a = -3a+2b$

  a −b=3

- Debido a los dos limites laterales

  $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (ax+2b) = 3a+2b$.

  $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (b-5x) = b-15$.

  Si $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ existe, por teorema 1.6.3 tenemos que

  $3a+2b = b-15$.

$3a + b = -15.$
Resolviendo estas ecuaciones simultáneamente, obtenemos $a = -3$ y $b = -6$.

9) $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & 0 < x \end{cases}$; $|f(x)| = 1$ si $x \neq 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$ $\qquad$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (1) = 1$

Porque $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe, pero $\lim_{x \to 0} |f(x)| = \lim 1 = 1$

LÍMITES INFINITOS

Definición de valores de función que crecen sin limite

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto I que contiene a a, excepto posiblemente en a mismo. **Conforme x se aproxima a a, $f(x)$ crece sin límite,** lo cual se escribe como

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Definición de valores de función que crecen sin limite

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto I que contiene a a, excepto posiblemente en a mismo. **Conforme x se aproxima a a, $f(x)$ decrece sin límite,** lo cual se escribe como

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Teorema 11 de límites

Si r es cualquier número entero positivo, entonces

i)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty;$$

ii)

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty, & r\ es\ impar \\ +\infty, & r\ es\ par \end{cases}$$

Teorema 12 de límites

Si a es cualquier número real y si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$, donde c es una constante diferente de 0, entonces

i) si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

ii) si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

iii) si $c < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

iv) si $c < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

El teorema también es válido si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

Teorema

i) Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante, entonces $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = +\infty$

ii) Si $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante, entonces $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = -\infty$

Estos teoremas también se cumplen si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

Teorema

Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante de 0, entonces

i) si $c > 0$, $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$;

ii) si $c < 0$, $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$;

Estos teoremas también se cumplen si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

Teorema

Si $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante de 0, entonces

i) si $c > 0$, $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$;

ii) si $c < 0$, $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$;

Estos teoremas también se cumplen si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

Definición de asíntota vertical

La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de la función f si al menos uno de los siguientes enunciados es verdadero:

i) $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

ii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

iii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

iv) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Practica en clase

1) $\lim\limits_{t\to 2^-} \frac{-t+2}{(t-2)^2}$
2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x}$
3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2}$
4) $\lim\limits_{x\to 4^-} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x-4}$
5) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2-3}{x^3+x^2}$
6) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2-4x^3}{5x^2+3x^3}$
7) $\lim\limits_{t\to -4^-} \left(\frac{2}{t^2+3t-4} - \frac{3}{t+4}\right)$
8) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{[\![x]\!]-x}{3-x}$
9) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x^3+9x^2+20x}{x^2+x-12}$
10) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1}$

Determine la asintota vertical de la grafica de la funcion y dibujela

11) (a) $f(x) = \frac{1}{x}$ (b) $f(x) = \frac{1}{x^3}$

En los ejercicios 12 a 15 determine la(s) asíntota(s) vertical(es) de la gráfica de la función, y aplique la respuesta del inciso para dibujar la gráfica.

12) $f(x) = \frac{2}{x-4}$
13) $f(x) = \frac{-2}{x+3}$
14) $f(x) = \frac{-2}{(x+3)^2}$
15) $f(x) = \frac{5}{x^2+8x+15}$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Tarea

1) $\lim_{t\to 2^+} \frac{t+2}{t^2-4}$
2) $\lim_{t\to 2^-} \frac{t+2}{t^2-4}$
3) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x}$
4) $\lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$
5) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$
6) $\lim_{s\to 2^-} \left(\frac{1}{s-2} - \frac{3}{s^2-4}\right)$
7) $\lim_{x\to 1^-} \frac{2x^3-5x^2}{x^2-1}$
8) $\lim_{x\to 1^-} \frac{[\![x^2]\!]-1}{x^2-1}$
9) $\lim_{x\to -2^+} \frac{6x^2+x-2}{2x^2+3x-2}$
10) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{2-\sqrt{4x-x^2}}$

Determine la asintota vertical de la grafica de la funcion y dibujela

11) (a) $g(x) = \frac{1}{x^2}$ (b) $G(x) = \frac{1}{x^4}$

En los ejercicios 12 a 15 determine la(s) asíntota(s) vertical(es) de la gráfica de la función, y aplique la respuesta del inciso para dibujar la gráfica.

12) $f(x) = \frac{3}{x+1}$
13) $f(x) = \frac{-4}{x-5}$
14) $f(x) = \frac{4}{(x-5)^2}$
15) $f(x) = \frac{1}{x^2+5x-6}$

Solucionario

1) $\lim\limits_{t\to 2^+}\frac{t+2}{t^2-4}=\lim\limits_{t\to 2^+}\frac{t+2}{(t+2)(t-2)}=\lim\limits_{t\to 2^+}\frac{t+21}{t-2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

2) $\lim\limits_{t\to 2^-}\frac{t+2}{t^2-4}=\lim\limits_{t\to 2^-}\frac{t+2}{(t+2)(t-2)}=\frac{-1}{(t-2)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{3+x^2}=\sqrt{3}$ y $\lim\limits_{x\to 0^-}x=0$ tomando valores negativos. Por lo tanto,

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{3+x^2}}{x}=-\infty$

4) $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x-3}\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}\sqrt{x-3}}=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}$; $\lim\limits_{x\to 3^+}\sqrt{x+3}=\sqrt{6}$ y $\lim\limits_{x\to 3^+}\sqrt{x-3}=-\infty$.

5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=-1$ y $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0$ por valores positivos.

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x^2}=-\infty$

6) $\lim\limits_{s\to 2^-}\left(\frac{1}{s-2}-\frac{3}{s^2-4}\right)=\lim\limits_{s\to 2^-}\left(\frac{s+2}{(s-2)(s+2)}-\frac{3}{(s-2)(s+2)}\right)=\lim\limits_{s\to 2^-}\left(\frac{s-1}{(s-2)(s+2)}\right)$

Además $\lim\limits_{s\to 2^-}(s-1)$ y $\lim\limits_{s\to 2^-}(s-2)(s+2)=0$. Porque $s\to 2^-$, entonces $s-2<0$; por lo tanto $(s-2)(s+2)$ tiende a 0 por la izquierda. Por teorema

$\lim\limits_{s\to 2^-}\left(\frac{1}{s-2}-\frac{3}{s^2-4}\right)=-\infty$.

7) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x^3-5x^2}{x^2-1}=\frac{-3}{0^-}=+\infty$

8) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{[\![x^2]\!]-1}{x^2-1}$

Ya que $x\to 1^-$, entonces $x<1$, si $0<x<1$, entonces $[\![x^2]\!]=0$.

entonces $\lim\limits_{x\to 1^-}[\![x^2]\!]$-1=-1.

Porque $x<1$ y $x^2-1<0$ si $-1<x<1$, entonces $\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-1)=0$

Y x^2-1 tiende a 0 por la izquierda. Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{[\![x^2]\!]-1}{x^2-1}=+\infty$

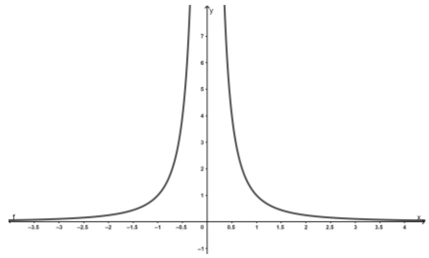
9) $\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{6x^2+x-2}{2x^2+3x-2}=\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{6x^2+x-2}{(x+2)(2x-1)}==\frac{20}{0^+(-5)}=-\infty$

10) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x-2}{2-\sqrt{4x-x^2}}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x-2}{2-\sqrt{4x-x^2}}\cdot\frac{2+\sqrt{4x-x^2}}{2+\sqrt{4x-x^2}}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{(x-2)\left(2+\sqrt{4x-x^2}\right)}{4-(4x-x^2)}=$

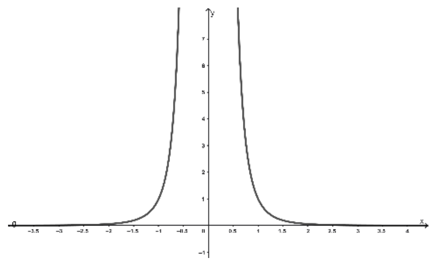
$\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{(x-2)\left(2+\sqrt{4x-x^2}\right)}{(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{4x-x^2}}{x-2}$

Ahora $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(2+\sqrt{4x-x^2}\right)=4$ y $\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)=0$. Además, $x-2$ tiende a 0 por la izquierda. Entonces por teorema concluimos que $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x-2}{2-\sqrt{4x-x^2}}=-\infty$

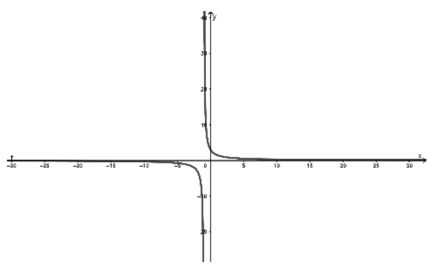
11) (a) Porque $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, x = 0$ es una asíntota vertical.



(b) Porque $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty, x = 0$ es una asíntota vertical.



12) Porque $\lim_{x \to -1^-} \frac{3}{x+1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$ o porque $\lim_{x \to -1^+} \frac{3}{x+1} = +\infty, x = -1$ es una asíntota vertical.



13) $f(x) = \frac{-4}{x - 5}$

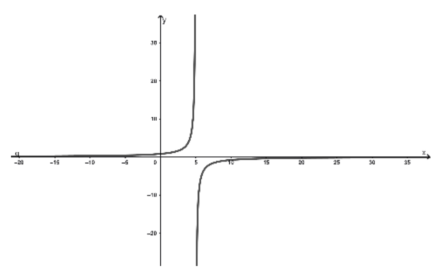
Si $x - \ 5$, entonces $x - 5 = 0$. Además, porque $x - 5 > 0$ si $x > 5$, y $-4 < 0$

$\lim_{x \to -5^+} f(x) = \lim_{x \to -5^+} \frac{-4}{x-5} = -\infty.$

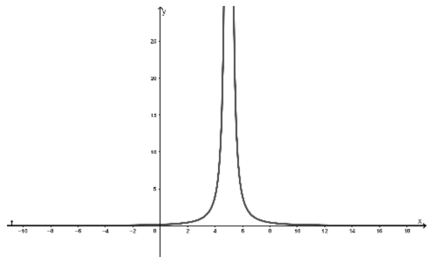
O porque $x - 5 < 0$ si $x < 5$

$\lim_{x \to -5^-} f(x) = \lim_{x \to -5^-} \frac{-4}{x-5} = -\infty.$

Por lo tanto, $x = 5$ es una asíntota vertical.



14) Porque $\lim_{x \to 5} = \frac{4}{(x - 5)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty, x = 5$ es una asíntota vertical.

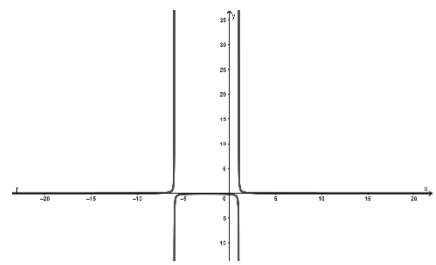


15) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x - 6}$

$f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x - 6}$.

$\lim_{x \to -6^-} (x + 6) = 0$ y $\lim_{x \to -6^-} (x - 1) = -7$. Porque $x \to 6^-$, entonces $x + 6 < 0$; Por lo tanto $(x + 6)(x - 1)$ tiende a 0 por la izquierda. Entonces por Teorma del limite $\lim_{x \to -6^-} \frac{1}{x^2 + 5x - 6} = -\infty$. Entonces $x = -6$ es una asíntota vertical.

$\lim_{x \to 1^+} (x + 6) = 7$ y $\lim_{x \to 1^+} (x - 1) = 0$. Porque $x \to 1^+$, entonces $x - 1 > 0$; Por lo tanto $(x + 6)(x - 1)$ tiende a 0 por la izquierda. Entonces por Teorema de limite $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x^2 + 5x - 6} = +\infty$. Entonces $x = 1$ es una asíntota vertical.



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

LÍMITES AL INFINITO

Definición del límite de $f(x)$ cuando x crece sin límite

Sea f una función que está definida en todo número de algún intervalo abierto $(a, +\infty)$. **El límite de $f(x)$ cuando x crece sin límite, es L** lo que se escribe como

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Definición del límite de $f(x)$ cuando x decrece sin límite

Sea f una función que está definida en todo número de algún intervalo abierto $(a, +\infty)$. **El límite de $f(x)$ cuando x decrece sin límite, es L** lo que se escribe como

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Teorema 13 de límites

Si r es cualquier número entero positivo, entonces

i) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

ii) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

Definición de asíntota horizontal

La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de la función f si al menos una de las proposiciones siguientes es verdadera:

i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$, y para algún número N si $x > N$, entonces $f(x) \neq b$;

ii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$, y para algún numero N si $x < N$, entonces $f(x) \neq b$.

Ejemplo ilustrativo 1

Cada una de las figuras 7 a 10 muestra la gráfica de una función para la cual la recta $y = b$ es una asíntota horizontal. En las figuras 7 y 8, se aplica el inciso (i) de la definición 3.7.4, y para las figuras 9 y 10, el inciso (ii) es verdadero. Los dos incisos (i) y (ii) se cumplen para la función de la figura 11.

La figura 12 muestra la gráfica de una función f para la cual $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$, pero no existe ningún número N tal que si $x > N$, entonces $f(x) \neq b$. En consecuencia, la recta $y = b$ no es una asíntota horizontal de la gráfica de f. Un ejemplo de este tipo de funciones se presenta en el ejercicio 63 de la sección 5.4.

Ejemplo ilustrativo 2

Al principio de esta sección se motivó la definición de límites al infinito con la función definida por

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

y se mostro que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ son igual a 2. Por lo tanto, la recta $y = 2$ es una asintota horizontal de la grafica f. La grafica trazada junto a la recta $y = 2$ en la figura 1 y 2 apoyan el hecho.

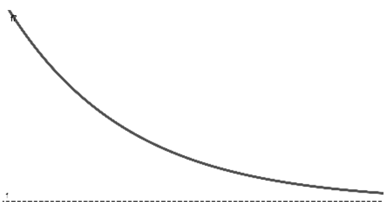


Figura 7

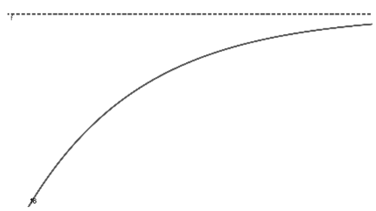


Figura 8

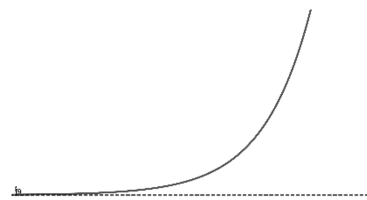


Figura 9

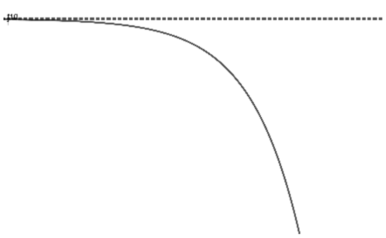


Figura 10

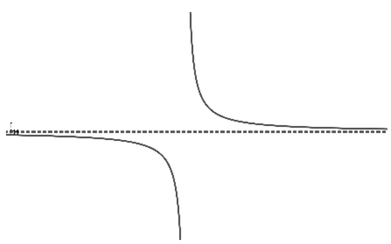


Figura 11

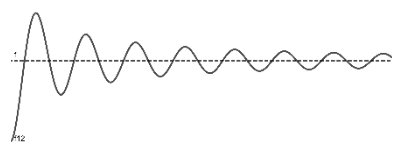


Figura 12

Ejemplo 7

Obtenga las asíntotas horizontales de la gráfica de la función definida por

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Y utilícelas para dibujar a grafica de f. Apoye los resultados trazando la gráfica de f y las asíntotas en el mismo rectángulo de inspección.

Solución Primero se considera el limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Al dividir el numerador y el denominador entre $\sqrt{x^2}$ se tiene

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2}}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{|\,x\,|}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

Puesto que $x\to+\infty$, entonces $x>0$; por tanto, $|\,x\,|=x$. Así,

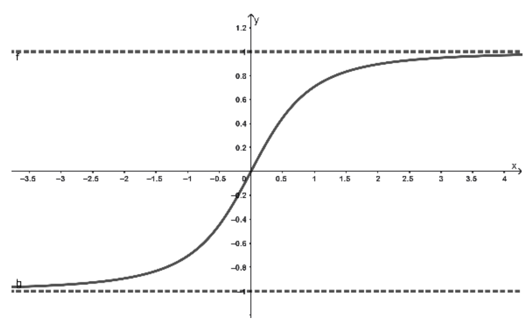
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to+\infty}1}{\sqrt{\lim_{x\to+\infty}1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+0}}$$

$$=1$$

En consecuencia, por la definición (i), la recta $y=1$es una asíntota horizontal de la gráfica de f.



$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Figura 13

Ahora se considerará el límite $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, de nuevo se dividirá el numerador y el denominador entre $\sqrt{x^2}$, que equivale a $|\,x\,|$. Como $x\to-\infty$, $x<0$; por lo que

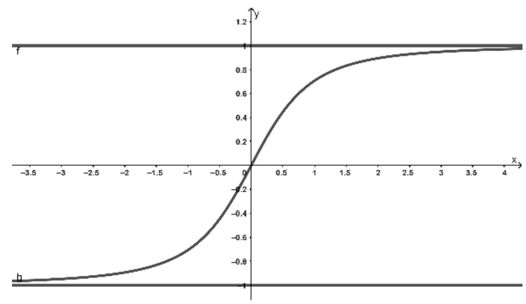
$|\,x\,|=-x$. Entonces se tiene.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{-x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to-\infty}(-1)}{\sqrt{\lim_{x\to-\infty} 1 + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1+0}} = -1$$

De acuerdo con la definición (ii), la recta $y = -1$es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

Con las dos asíntotas horizontales como guías, se dibuja la gráfica de $f$obteniéndose la figura 13. Con el fin de apoyar los resultados obtenidos, se traza la gráfica de fy las rectas $y = 1$ y $y = -1$ en el rectángulo de inspección de $[-3,3]$ por $[-2,2]$, como se muestra en la figura 14.



$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$y = 1$ y $y = -1$

Figura 14

Definición de asíntota oblicua

La gráfica de la función $f$tiene la recta $y = mx + b$como una asíntota oblicua si alguna de las proposiciones siguientes es verdadera:

(i) $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (mx + b)] = 0$, y para algún número $M > 0$, $f(x) \neq mx + b$ siempre que $x > M$.

(ii) $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (mx + b)] = 0$ y para algún número $M < 0$, $f(x) \neq mx + b$ siempre que $x < M$.

EJEMPLO 8

Sea

$$h(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

Determine las asíntotas de la gráfica de h. Apoye los resultados trazando la gráfica de h y sus asíntotas en el mismo rectángulo de inspección.

Solución

Como

$\lim_{x\to1^-} h(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to1^+} h(x) = +\infty$

la recta $x = 1$ es una asíntota vertical. No existen asíntotas horizontales porque si el numerador y el denominador de $h(x)$ se dividen entre x^2, se obtiene

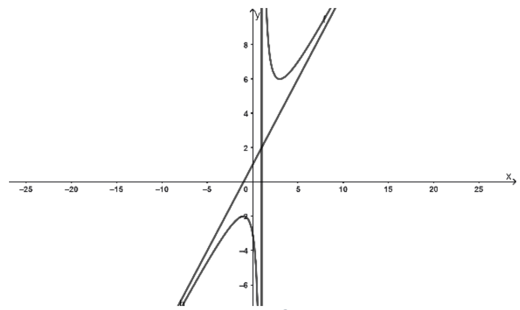
$$\frac{1+\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$$

y conforme $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$, el límite del numerador es 1 y el límite del denominador es 0. Sin embargo, el grado del numerador de $h(x)$ es mayor en 1 que el grado del denominador, y cuando se divide el numerador entre el denominador se obtiene

$$h(x) = x + 1 + \frac{4}{x-1}$$

Por tanto, la recta $y = x + 1$ es una asíntota oblicua.

La figura 15, que muestra la gráfica de hy las asíntotas trazadas en el rectángulo de inspección de $[-10,13.5]$ por $[-6,9.7]$, apoya los resultados obtenidos.



$h(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$

$x = 1y = x + 1$

Figura 15

Problemas

En los ejercicios 1 a 9 determine el limite y apoye la respuesta gráficamente.

1) $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{2t+1}{5t-2}$
2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{6x-4}{3x+1}$
3) $\lim\limits_{s \to -\infty} \frac{4s^2+3}{2s^2-1}$
4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+4}{3x^2-5}$
5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2-x+5}{7x^3+x+1}$
6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x^3+2x^2-5}{8x^3+x+2}$
7) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5x^3-12x+7}{4x^2-1}$
8) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+4}$
9) $\lim\limits_{w \to -\infty} \frac{\sqrt{w^2-2w+3}}{w+5}$

En los ejercicios 10 a 12, realice lo siguiente: (a) trace la gráfica de la función f y haga una proposición acerca del comportamiento aparente de $f(x)$ conforme x crece sin límite. (b) Confirme analíticamente la respuesta del inciso (a) calculando $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

10) $f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$
11) $f(x) = \sqrt{3x^2+x} - 2x$
12) $f(x) = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

En los ejercicios 13 a 19, determine las asíntotas de la gráfica de la función y utilícelas para dibujar la gráfica. Apoye los resultados trazando la gráfica y las asíntotas en el mismo rectángulo de inspección.

13) $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$
14) $g(x) = 1 - \frac{1}{x}$
15) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}$
16) $G(x) = \frac{4x^2}{x^2-9}$
17) $h(x) = \frac{2x}{6x^2+11x-10}$
18) $f(x) = \frac{4x^2}{\sqrt{x^2-2}}$
19) $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+5x+6}}$

En los ejercicios 20 a 22, determine las asíntotas de la gráfica de la función. Apoye los resultados trazando la gráfica y las asíntotas en el mismo rectángulo de inspección.

20) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x+4}$

21) $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

22) $f(x) = \frac{x^3+2x^2+4}{x^2}$

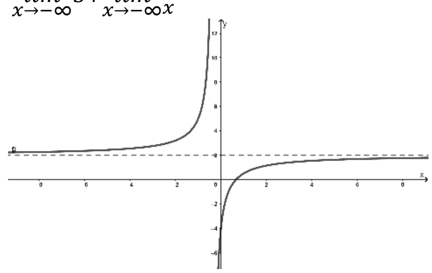
Solucionario

1) $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{2t+1}{5t-2} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{2+\frac{1}{t}}{5-\frac{2}{t}} = \frac{2}{5}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{6x-4}{3x+1}$

Aplicar Teorema de limite dividimos el numerador y denominador por x.

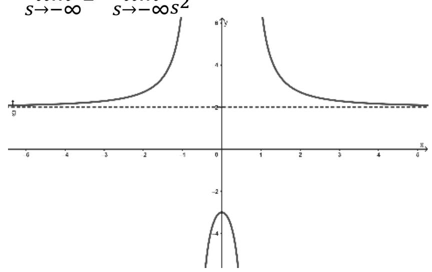
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{6x-4}{3x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6-\frac{4}{x}}{3+\frac{1}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} 6 - \lim\limits_{x\to-\infty} 4 \cdot \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to-\infty} 3 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}} = \frac{6-4(0)}{3+0} = 2.$$



3) $\lim\limits_{s\to-\infty} \frac{4s^2+3}{2s^2-1}$

Dividimos el numerador y denominador por s^2. Entonces

$$\lim_{s\to-\infty} \frac{4s^2+3}{2s^2-1} = \lim_{s\to-\infty} \frac{4+\frac{3}{s^2}}{2-\frac{1}{s^2}} = \frac{\lim\limits_{s\to-\infty} 4 + \lim\limits_{s\to-\infty} 3 \cdot \lim\limits_{s\to-\infty} \frac{1}{s^2}}{\lim\limits_{s\to-\infty} 2 - \lim\limits_{s\to-\infty} \frac{1}{s^2}} = \frac{4+3(0)}{2-0} = 2.$$



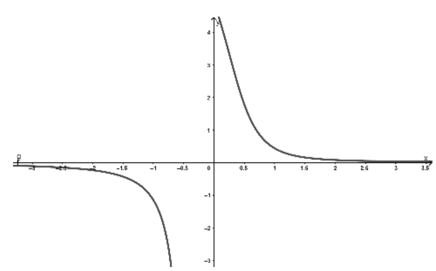
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+4}{3x^2-5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}{3-\frac{5}{x^2}} = 0$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+5}{7x^3+x+1}$

Dividimos el numerador y denominador por x^3, la mayor potencia de x que aparece, tenemos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+5}{7x^3+x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{7+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}.$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - 2\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} + 5\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3}}{7 + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3}} = \frac{0-2(0)+5(0)}{7+0+0} = 0.$$



6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^3+2x^2-5}{8x^3+x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^3}}{8+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}} = \frac{1}{2}$

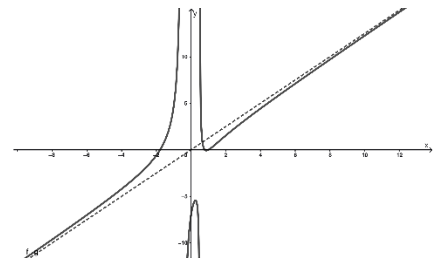
7) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x^3-12x+7}{4x^2-1}$

Dado el numerador tiene mayor grado, factorizamos x en el numerador. Posteriormente, dividimos numerador y denominador x^2.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x^3-12x+7}{4x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x^2-12+\frac{7}{x}}{4x^2-1}\cdot x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5-\frac{12}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{4-\frac{1}{x^2}}\cdot \lim\limits_{x\to-\infty} x.$

$= \frac{5-12\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}+7\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}}{4-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}\cdot \lim\limits_{x\to-\infty} x = \frac{5-12(0)+7(0)}{4-0}\cdot \lim\limits_{x\to-\infty} x = \frac{5}{4}\cdot$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty.$



8) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+4}$

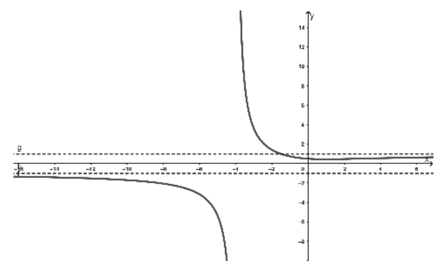
Tenemos que dividir el numerador y denominador por x.

Dado que $x \to -\infty$, entonces $x < 0$ y $\sqrt{x^2} = -x$ o, equivalentemente $x = -\sqrt{x^2}$.

$\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+4} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{-\sqrt{x^2}} = -\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2}} = -\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}.$

Por ecuación (1) tenemos que

$\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+4} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}}{\frac{x+4}{x}} = \frac{-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{1+\frac{4}{x}} = \frac{-\sqrt{1+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}}{1+4\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}} = \frac{-\sqrt{1+4(0)}}{1+4(0)} = -1.$



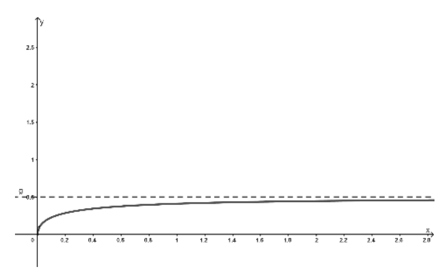
9) $\lim\limits_{w\to-\infty} \frac{\sqrt{w^2-2w+3}}{w+5} = \lim\limits_{w\to-\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{2}{w}+\frac{3}{w^2}}}{2} = -1$

10) $f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$

Como ambos términos presentan limites infinitos, se racionaliza la expresión.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}-x}{1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}.$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\frac{1}{x}}{(\sqrt{x^2+x}+x)}.$ (1)



Porque $x \to +\infty$, entonces $x > 0$ y $x = \sqrt{x^2}$ entonces

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}+x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} + \frac{x}{x} = \frac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2}} + 1 = \sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}} + 1 = \sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1.$ (2)

Por ecuación (1) y (2) tenemos que

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}.$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2+x}-2x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{3+\frac{1}{x}}-2\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\left(\sqrt{3}-2\right) = -\infty$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\left(1+x^{-1}\sqrt{x+x^{1/2}}\right)}}{\sqrt{x(1+x^{-1})}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x^{-1}+x^{-3/2}}}}{\sqrt{x}\sqrt{1+x^{-1}}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1}\sqrt{1+\sqrt{x^{-1}+x^{-3/2}}}}{\sqrt{1+x^{-1}}} = \frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+0}} = 1.$

13) $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

Como $\lim\limits_{x\to3^+} \frac{2x+1}{x-3} = +\infty$ o $\lim\limits_{x\to3^-} \frac{2x+1}{x-3} = -\infty, x = 3$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+1/x}{x-3/x} = 2$ o $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2, y = 2$ es una asíntota horizontal.

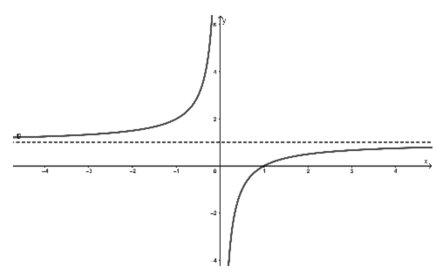
La grafica es simétrica con respecto (3,2)

14) $g(x) = 1-\frac{1}{x}$

Como $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1-\frac{1}{x}\right) = -\infty$ o $\lim\limits_{x\to0^-}\left(1-\frac{1}{x}\right) = +\infty, x = 0$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1$ o $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1, y = 1$ es una asíntota horizontal.

La grafica es simétrica con respecto (0,1)

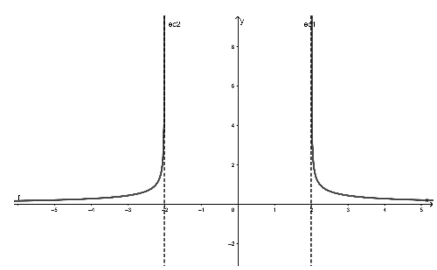


15) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}$ Dominio$\{x: |x| > 2\}$. Porque $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty, x = 2$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = +\infty, x = -2$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ o $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0, y = 0$ es una asíntota horizontal.

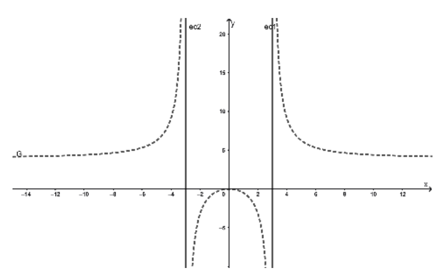
Como $f(x)$ es una función par, por lo tanto, su grafica es simétrica con respecto al eje y.



16) $G(x) = \frac{4x^2}{x^2-9} = \frac{4x^2}{(x-3)(x+3)}$

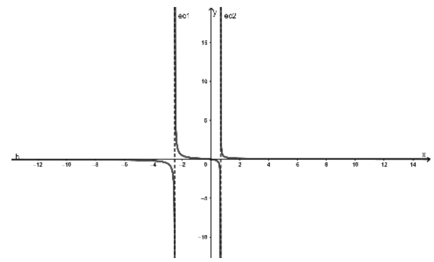
Como $\lim\limits_{x\to3^+} G(x) = +\infty$ o $\lim\limits_{x\to3^-} G(x) = -\infty, x = 3$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to-3^+} G(x) = -\infty$ o $\lim\limits_{x\to-3^-} G(x) = +\infty, x = -3$ es una asíntota vertical.



Como $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{1-9/x^2} = 4$ o $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = 4, y = 4$ es una asíntota horizontal.
Como $f(x)$ es una función par, por lo tanto, su grafica es simétrica con respecto al eje y.

17) $h(x) = \frac{2x}{6x^2+11x-10} = \frac{2x}{(2x+5)(3x-2)}$

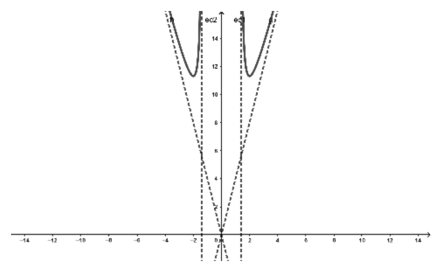


Como $\lim\limits_{x\to-5/2^+} h(x) = +\infty$ o $\lim\limits_{x\to-5/2^-} h(x) = -\infty, x = -\frac{5}{2}$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to2/3^+} h(x) = +\infty$ o $\lim\limits_{x\to2/3^-} h(x) = -\infty, x = \frac{2}{3}$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \text{Como} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2/x}{6+11/x-10/x^2}$ o $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0, y = 0$ es una asíntota horizontal.

18) $f(x) = \frac{4x^2}{\sqrt{x^2-2}}$ Dominio$\{x \,|\, |x| > \sqrt{2}\}$



Como $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} f(x) = +\infty, x = \sqrt{2}$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}_-} f(x) = +\infty, x = -\sqrt{2}$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 4 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^2}{\sqrt{x^2-2}} - 4x$

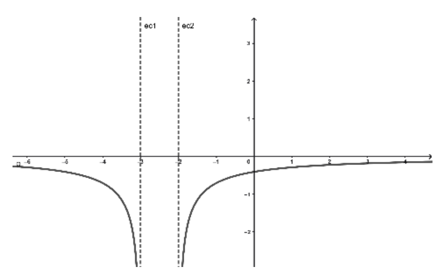
$= \lim\limits_{x\to+\infty} 4x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-2}} - 1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} 4x \cdot \frac{x-\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2-2}} \cdot \frac{x+\sqrt{x^2-2}}{x+\sqrt{x^2-2}}.$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{8x}{\sqrt{x^2-2}\left(x+\sqrt{x^2-2}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{8/x}{\sqrt{1-2}\left(1+\sqrt{1-2/x^2}\right)} =$

$\frac{0}{1}$ y por lo tanto $y = 4x$ es una asíntota oblicua.

Como $f(-x) = f(x)$, la grafica es simétrica respecto al eje y. Por lo tanto, $y = -x$ también es una asíntota oblicua.

19) $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+5x+6}} = \frac{-1}{\sqrt{(x+2)(x+3)}}$ Dominio: $(-\infty, -3) \cup (-2, +\infty)$



Como $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = -\infty, x = -3$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty, x = -2$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, o $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0, y = 0$ es una asíntota horizontal.

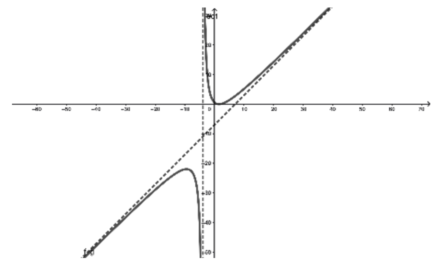
La grafica es simétrica con respecto a la recta $x = -\frac{5}{2}$.

20) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x+4}$

Como $\lim_{x\to -4^+} f(x) = +\infty$y $\lim_{x\to -4^-} f(x) = -\infty$, la recta $x = -4$ es una asíntota vertical. Dado que el grado del numerador es uno mayor que el grado del denominador, existe una asíntota oblicua. Al efectuar la división de polinomios, se obtiene:

$f(x) = x - 7 + \frac{30}{x+4}$.

Por lo tanto, la recta $y = x - 7$ es una asíntota oblicua. La gráfica se encuentra por encima de la asíntota cuando$30/(x+4) > 0$, es decir cuando $x > -4$, y por debajo de la asíntota cuando $x < -4$.



21) $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

Como $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, la recta $x = 1$es una asíntota vertical, y la curva se aproxima a ella hacia arriba tanto por la derecha como por la izquierda. Desarrollando:

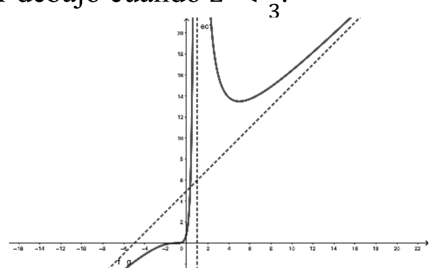
$f(z) = \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-2x+1}$.

Como el grado del numerador es uno mayor que el del denominador, dividimos y obtenemos:

$f(x) = x + 5 + \frac{12x-4}{(x-1)^2}$.

Por consiguiente, la recta $y = z + 5$ es una asíntota oblicua.

La gráfica está por encima de esta asíntota cuando $(12z-4)/(z-1)^2 > 0$ es decir, cuando $z > \frac{1}{3}$, y por debajo cuando $z < \frac{1}{3}$.



22) $f(x) = \frac{x^3+2x^2+4}{x^2} = x + 2 + \frac{4}{x^2} = x + 2 + g(x)$

Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $x = 0$ es una asíntota vertical.

Además, como $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$ o $\lim_{x\to -\infty} g(x) = 0$, $y = x + 2$ es una asíntota oblicua.

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN NÚMERO

Definición de función continua en un número

Se dice que la función f es **continua** en el número a si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

i) $f(a)$ existe;

ii) $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existe;

iii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Si una o más de estas tres condiciones no se cumplen en a, entonces se dice que la función f es **discontinua** en a.

Teorema

Si f y g son dos funciones continuas en el número a, entonces

i) $f + g$ es continua en a;

ii) $f - g$ es continua en a;

iii) f/g es continua en a, considerando que $g(a) \neq 0$.

Teorema

Una función polinomial es continua en todo número.

Teorema

Una función racional es continua en todo número de su dominio.

Teorema

Si n es un número entero positivo y

$f(x) = \sqrt[n]{x}$

entonces

i) si n es impar, entonces f es continua en todo número,

ii) si n es par, entonces f es continua en todo número positivo.

Teorema

La función de f es continua en el número a si f está definida en algún intervalo abierto que contenga a y si para cual quiera $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

si $|x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon$

Problemas

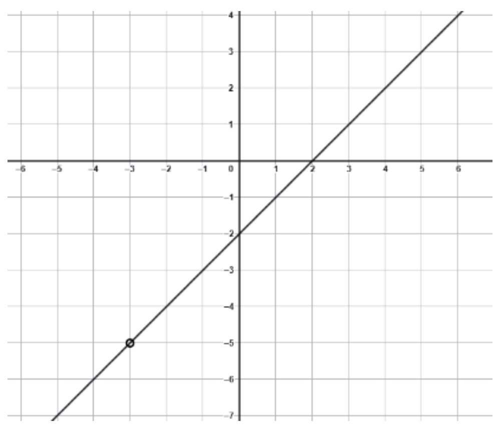
En los ejercicios 1 a 9, dibuje la gráfica de la función. Observe donde la gráfica se rompe, determine el numero en el que la función es discontinua, y muestre por que la definición. 1.8.1 no se satisface en este número.

1. $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x+3}}$

Solución

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \frac{(x+3)(x-2)}{x+3} = x - 2 \ \ si\ x \neq -3$$

Hay una ruptura en la gráfica en −3. $f(-3)$ no existe. Por lo tanto, la condición (1) de la definición 1.8.1 falla en −3.



2. $\boldsymbol{G(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} \\ 2 \end{cases}}$

Solución

$$G(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} & si\ x \neq 4 \\ 2 & si\ x = 4 \end{cases}$$

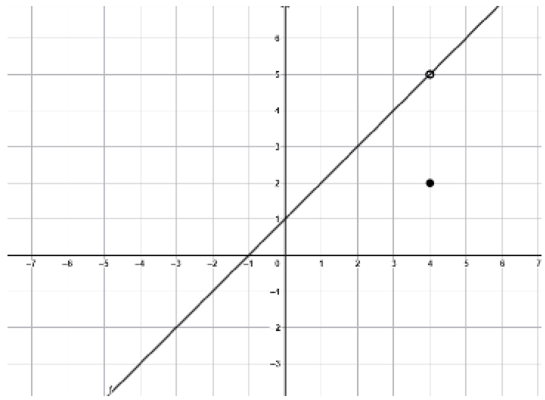
Porque $\frac{x^2 - 3x - 4}{x-4} = \frac{(x-4)(x+1)}{x-4} = x + 1$ si $x \neq 4$

Entonces

$$G(x) = \begin{cases} x + 1 & si\ x \neq 4 \\ 2 & si\ x = 4 \end{cases}$$

Hay un "agujero" en la recta en el punto (4,5) porque $G(x) \neq x + 1$ si x=4, y por lo tanto G es discontinua en 4. Mostramos como no se satisface la definición 1.8.1. Porque $\lim_{x \to 4} G(x) = \lim_{x \to 4} (x + 1) = 5$ y $G(4) = 2$

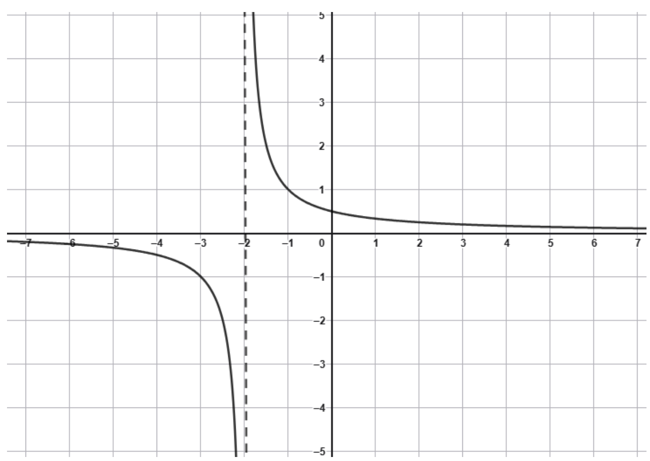
Entonces $\lim_{x \to 4} G(x) \neq G(4)$ y por lo tanto la condición (iii) de la definición 1.8.1 no se satisface.



3. $\boldsymbol{H(x) = \frac{1}{x+2}}$

Solución Hay una ruptura en la gráfica en -2.

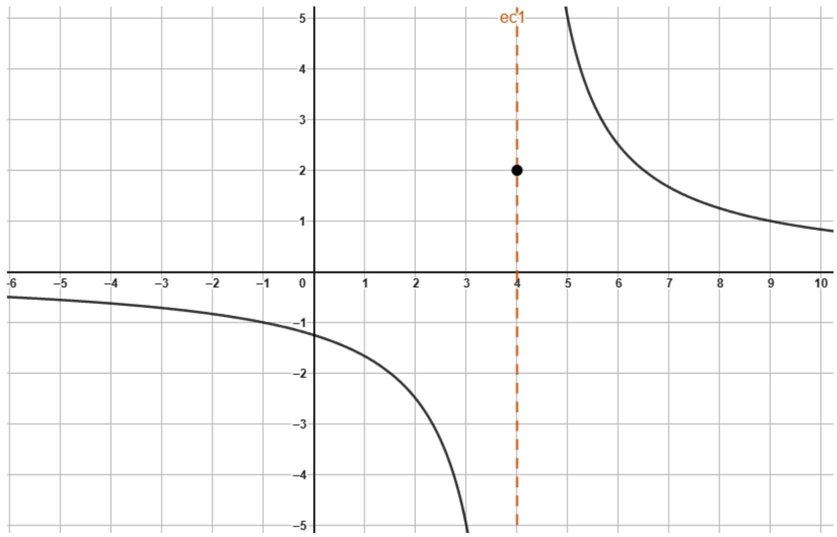
h (-2) no existe. Por lo tanto, la condición (i) de la definición 1.8.1 falla en -2. Por lo tanto, f es discontinua en -2.



4. $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x-4} & si\ x \neq 4 \\ 2 & si\ x = 4 \end{cases}}$

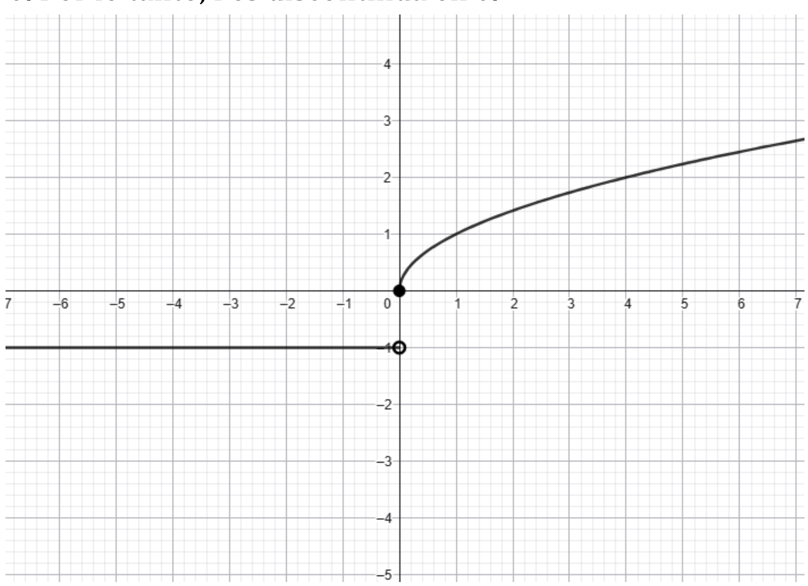
Solución Hay una ruptura en el grafico en 4. $\lim_{x\to 4} f\,(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to 4^-} f\,(x) = -\infty$.

Por lo tanto, la condición (ii) de la definición 1.8.1 falla en 4. Por lo tanto, *f* es discontinua en 4.



5. $f(x) = \begin{cases} -1 & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ \sqrt{x} & si\ 0 < x \end{cases}$

solución Hay una ruptura en la gráfica en 0. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-1) = -1$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0$; Por lo tanto, $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe. Por lo tanto, la condición (ii) de la definición 1.8.1 falla en 0. Por lo tanto, $f$es discontinua en 0.

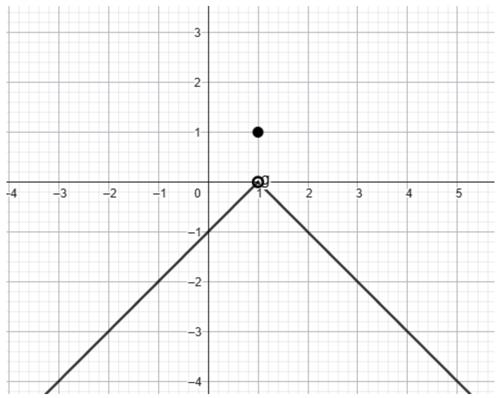


6. $f(x) = \begin{cases} x-1 & si\ x < 1 \\ 1 & si\ x = 1 \\ 1-x & si\ 1 < x \end{cases}$

solución Hay una ruptura en el grafico en 1. (i) $f(1) = 1$;

(ii) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x - 1) = 0$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (1 - x) = 0$. Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

(iii) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$ Por lo tanto, la condición (iii) falla en 1. Por lo tanto, *f* es discontinua en 1.

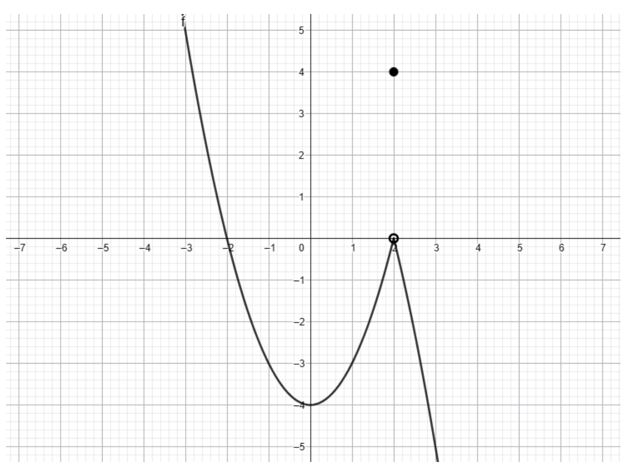


7. $\boldsymbol{g(t) = \begin{cases} t^2 - 4 & si\ t < 2 \\ 4 & si\ t = 2 \\ 4 - t^2 & si\ 2 < t \end{cases}}$

solución Hay una ruptura en el grafico en 2. (i) $g(2) = 4$;

(ii) $\lim\limits_{t \to 2^-} g\ (t) = \lim\limits_{t \to 2^-} (t^2 - 4) = 0$ y $\lim\limits_{t \to 2^+} g\ (t) = \lim\limits_{t \to 2^+} (4 - t^2) = 0$. Por lo tanto, $\lim\limits_{t \to 0} g(t) = 0$.

(iii) $\lim\limits_{t \to 2}$ g(t)≠*g* (2). Por lo tanto, la condición (iii) de la definición 1.8.1 falla en 2. Por lo tanto, *g* es discontinua en 2.



8. $\boldsymbol{H(x) = \begin{cases} 6 + x & si\ x \leq -2 \\ 2 - x & si\ -2 < x \leq 2 \\ 2x - 1 & si\ 2 < x \end{cases}}$

solución Hay ruptura en la gráfica en los puntos donde $x=-2$ y $x=2$.

Consideramos los puntos por separado. Dado que $H(-2) = 1-2=-1$, la condición (i) de la definición 1.8.1 se satisface cuando a$=-2$. Porque

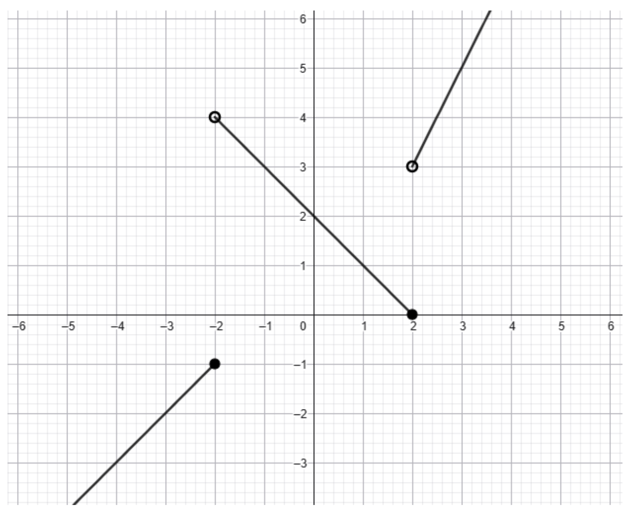
$$\lim_{x\to-2^+} H(x) = \lim_{x\to-2^+}(2-x) = 4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-2^-} H(x) = \lim_{x\to-2^-}(1+x) = -1$$

$\lim_{x\to-2^-} H(x)$ no existe. Por lo tanto, la condición (ii) de la definición 1.8.1 no se satisface cuando a$=-2$, y por lo tanto H es discontinua en -2.

Dado que $H(2)=2-2=0$, la condición (i) de la definición 1.8.1 se satisface cuando a=2. Porque

$$\lim_{x\to2^+} H(x) = \lim_{x\to2^+}(2x-1) = 3 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to2^-} H(x) = \lim_{x\to2^-}(2-x) = 0$$

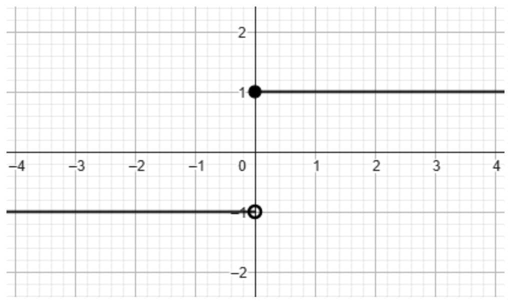
$\lim_{x\to2^+} H(x)$ no existe. La condición (ii) de la definición 1.8.1 no se satisface cuando a=2, y por lo tanto H es discontinua en 2.



9. $\boldsymbol{g(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & si\ \ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}}$

solución Hay ruptura en el gráfico en 0. (i) $f(0) = 1$

(ii) $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(-\frac{x}{x}\right) = -1$ y $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$. Por lo tanto, $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ no existe. La condición (ii) de la definición 1.8.1 no se cumple en 0, por lo que g es discontinua en 0.



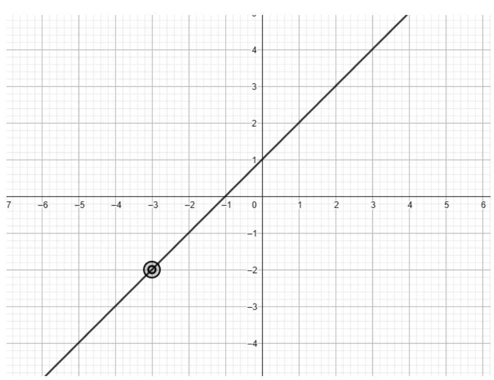
En los ejercicios 10 a 14, la función es discontinua en el número a. (a) Trace la gráfica de *f* en un rectángulo de inspección conveniente y determine que la gráfica se rompe en el punto donde *x* = a. ¿Parece ser removible o esencial esta discontinuidad? Si parece ser removible, especule sobre cómo debe redefinirse *f (*a*)* de modo que la discontinuidad sea eliminada. (b) Confirme analíticamente la respuesta del inciso (a).

10. $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2+4x+3}{x+3};\ a = -3}$

Solución

$f(x) = \frac{(x+3)(x+1)}{x+3} = x + 1$ si $x \neq -3$.

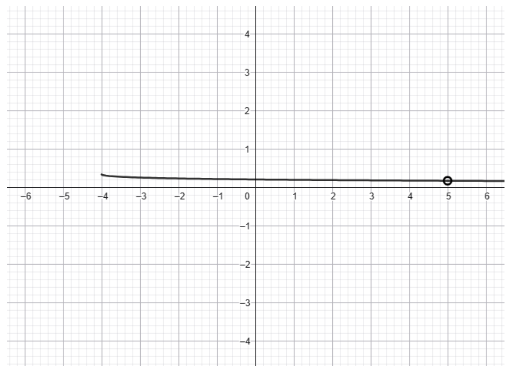
Para que *f* sea continua debemos definir $f(-3) = -3+1 = -2$.



11. $\boldsymbol{f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5};\ a = 5}$

Solución

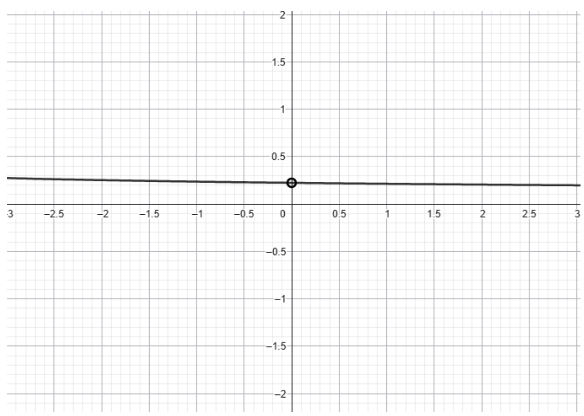
$f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-3}{(x+4)-9} = \frac{\sqrt{x+4}-3}{(\sqrt{x+4}-3)(\sqrt{x+4}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x+4}+3}$ si $\neq 5$. Define $f(5) = \frac{1}{\sqrt{x+4}+3} = \frac{1}{6}$.



12. $\boldsymbol{f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x};\ a = 0}$

Solución

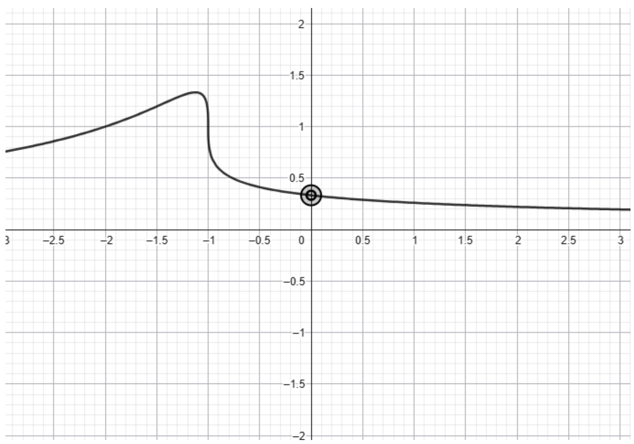
$f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{(x+5)-5} = \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{(\sqrt{x+5}-\sqrt{5})(\sqrt{x+5}+\sqrt{5})} = \frac{1}{\sqrt{x+5}+\sqrt{5}}$ si $x\neq 0$. Para que f sea continua, debemos definir $f(x) = \frac{1}{\sqrt{0+5}+\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$.



13. $\boldsymbol{f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x};\ a = 0}$

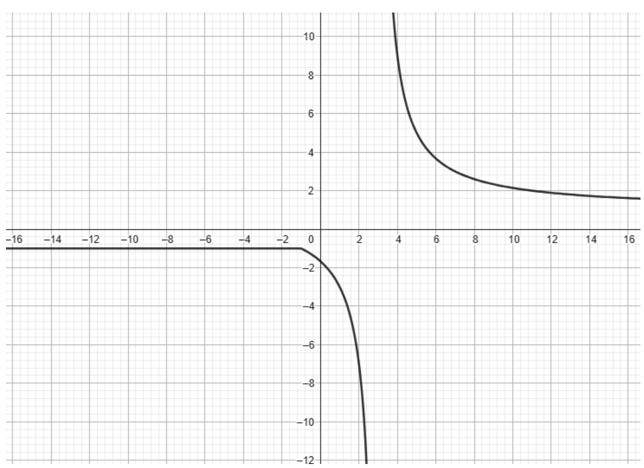
Solución $\quad f\ (x) = \frac{(x+1)^{1/3}-1}{[(x+1)^{1/3}]^3-1^3} = \frac{(x+1)^{1/3}-1}{[(x+1)^{1/3}-1][(x+1)^{2/3}+(x+1)^{1/3}+1]}$

$= \frac{1}{(x+1)^{2/3}+(x+1)^{1/3}+1}$ si $x \neq 0$. Para que f sea continua, debemos definir $f(0) = \frac{1}{(0+1)^{2/3}+(0+1)^{1/3}+1} = \frac{1}{3}$.



14. $\boldsymbol{f(x) = \frac{x+5}{|x+1|-4};\ a = 3}$

Solución $\quad \lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x+5}{(x+1)+4}$ No existe. Porque el denominador tiende a 0 y el numerador no. Por lo tanto, la discontinuidad es esencial.



En los ejercicios 15 a 20, determine los números en los que la función es continua e indique la razón.

15. $\boldsymbol{f(x) = (x-5)^3(x^2+4)^5}$

Solución Es un polinomio. Por lo tanto, *f* es continua para todos los números reales.

16. $\boldsymbol{g(x) = \frac{x}{x-3}}$

Solución Es una función racional. Por lo tanto, *g* es continua en su dominio: todos los números reales excepto el 3.

17. $\boldsymbol{G(x) = \frac{x-2}{x^2+2x-8}}$

Solución $G(x) = \frac{x-2}{x^2+2x-8} = \frac{x-2}{(x+4)(x-2)}$ es una función racional. Por lo tanto, *G* es continua en su dominio: todos los números reales excepto 2 y 4. La discontinuidad e 2 es removible.

18. $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 3x-1 & si \quad x < 2 \\ 4-x^2 & si \quad 2 \le x \end{cases}}$

Solución si x≠2, $f(x)$ es un polinomio. Por lo tanto, *f* es continua en número distinto de 2. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(3x-1) = 5$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(4-x^2) = 0$; por lo tanto, $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe. Por lo tanto, es discontinua en 2.

19. $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & si \;\; x < 3 \\ \frac{2}{9-x}, & si \;\; 3 \le x \end{cases}}$

Solución si $x≠3$, $f(x)$ es una función racional. Por lo tanto, *f* es continua si ≠0 o 9.

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{3}$ y $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{2}{9-x}\right) = \frac{1}{3} = f(3)$. Por lo tanto, *f* es continua en 3.

20. $\boldsymbol{g(x) = \begin{cases} 2x - \sqrt[3]{x}, & si \;\; x \le 1 \\ x\sqrt{x}, & si \;\; 1 < x \end{cases}}$

Solución los radicales son continuos según el teorema 1.8.5, 2x y x son polinomio y, por lo tanto, son continuos. Por lo tanto, si 2≠1, g es continua según el teorema 1.8.2 (ii) y (iii). Además,

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(2x - \sqrt[3]{x}\right) = 2 - 1 = 1 = g(1) \text{ y } \lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(x\sqrt{x}\right) = 1\cdot 1 = 1$$

Por lo tanto, g es continua para todos los números reales.

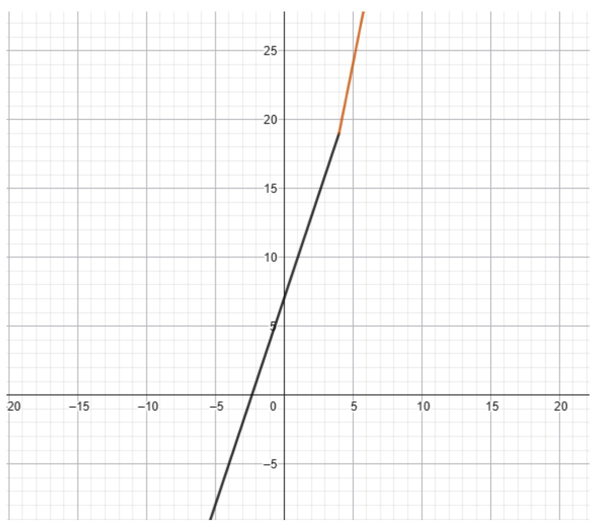
En los ejercicios 21 a 24, realice lo siguiente: (a) determine los valores de las constantes c y k que hagan a la función continua en todo número. (b) Dibuje la gráfica de la función resultante.

21. $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 3x + 7 & si\ x \le 4 \\ kx - 1, & si\ 4 < x \end{cases}}$

Solución.

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-}(3x+7) = 19 = f(4);$$
$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+}(kx-1) = 4k - 1$$

Por lo tanto, f es continua en 4 si y solo si $4k-1=19$; $k = 5$.

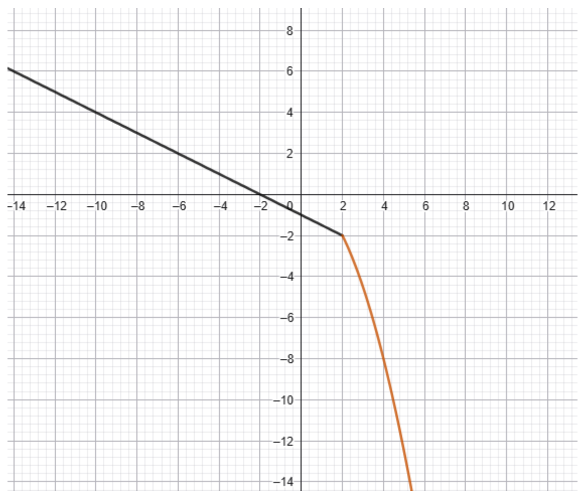


22. $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} kx - 1 & si\ x \le 2 \\ kx^2, & si\ 2 < x \end{cases}}$

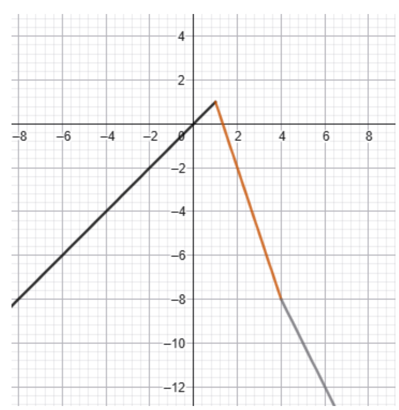
Solución.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} kx^2 = 4k = f(2)$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} kx - 1 = 2k - 1$$

Por lo tanto, f es continua en 2 si y solo si $4k = 2k - 1$; $2k = -1$; $k = -\frac{1}{2}$.



23. $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x & si\ x \le 1 \\ cx + k & si\ 1 < x < 4 \\ -2x & si\ 4 \le x \end{cases}}$



Solución.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1 = f(1);$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (cx + k) = c + k$$

Por lo tanto, f es continua en 1 si y solo si $c+k = 1$.

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (cx + k) = 4c + k;$$
$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} (-2x) = -8 = f(4)$$

Por lo tanto, f es continua en 4 si y solo si $4c+k = -8$.

Resolviendo $c + k = 1$ y $4c + k = -8$ simultáneamente, obtenemos $c = -3$ y $k = 4$.

24. $f(x) = \begin{cases} x + 2c & si\ x < -2 \\ 3cx + k & si\ -2 \leq x \leq 1 \\ 3x - 2k & si\ 1 < x \end{cases}$

Solución.

Para todos los valores de c y k la función f es continua en todos los valores de x, Si es continua en x = -2 y x =1.

Si f es continua en -2, entonces

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to -2^-} (x + 2c) = \lim_{x\to -2^+} (3cx + k)$$

$$-2 + 2c = -6c + k$$

Si f es continua en 1, entonces

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^-} (3cx + k) = \lim_{x\to 1^+} (3x - 2k)$$

$$3c + k = 3 - 2k.$$

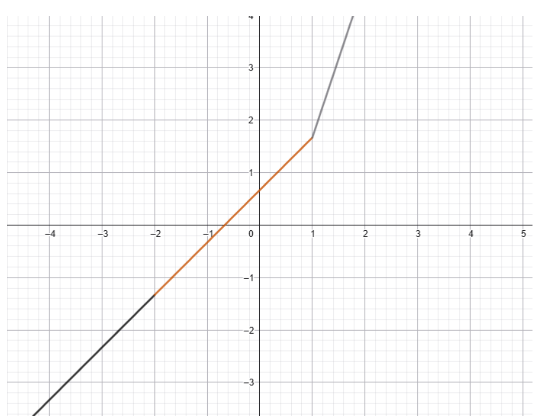
Resolviendo estas ecuaciones simultáneamente, obtenemos $c=\frac{1}{3}$ y $k=\frac{2}{3}$.

Sustituyendo estos valores de c y k en la ecuación (1), tenemos

$f(x) = \begin{cases} x + \frac{2}{3} & si\ x < -2 \\ x + \frac{2}{3} & si\ -2 \leq x \leq 1 \\ 3x - \frac{4}{3} & si\ 1 < x \end{cases}$ o equivalentemente $f(x) = \begin{cases} x + \frac{2}{3} & si\ x \leq 1 \\ 3x - \frac{4}{3} & si\ x > 1 \end{cases}$

Ahora, $f(1) = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$. Además, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(x + \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(3x - \frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3}$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{5}{3}\ f(1)$. Por lo tanto f es continua en 1 y f es continua de $(-\infty, \infty)$.



Continuidad de una función compuesta y continuidad en un intervalo

Ejemplo ilustrativo 1 si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 4 - x^2$, y si h es la función compuesta f o g, entonces

$h(x) = f(g(x))$

$= f(4 - x^2)$

$= \sqrt{4 - x^2}$

Debido a que el dominio de g es el conjunto de todos los números reales y el dominio de f es el conjunto de todos los números no negativos, el conjunto de h es el conjunto de todos los números tales que $4 - x^2 \geq 0$, esto es, todos los números del intervalo cerrado $[-2,2]$. La grafica de h se muestra en la figura 1.

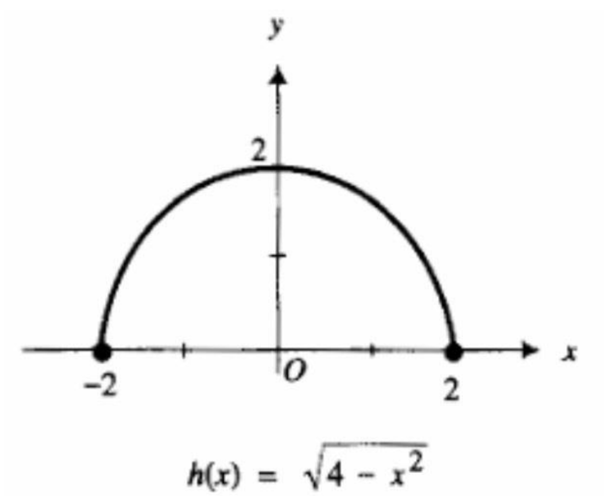


Figura 1

Teorema límite de una función compuesta

Si $\lim_{x \to a} g(x) = b$ y si la función f es continua en b, entonces

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = f(b)$$

o equivalentemente,

$$\lim_{x \to a} f\,(g(x)) \;=\; f(\lim_{x \to a} g(x))$$

Teorema continuidad de una función compuesta

Si la función g es continua en *a* y la función *f* es continua en *g*(*a*), entonces la función compuesta f o g es continua en a.

Ejemplo 1 Determinar los números en los que la función siguiente es continua:

$$h(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

Solución la función h es la que se obtuvo en el ejemplo ilustrativo1 como la función compuesta *f* o *g*, donde $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 4 - x^2$. Como g es una función polinomial, es continua en todos los números reales. Además, por el teorema 1.8.5(ii), *f* es continua en cada número real positivo. En consecuencia, por el teorema 1.9.2, *h* es continua en cada numero *x* para el cual *g*(*x*)>0. Esto es, cuando $4 - x^2 > 0$. Por tanto, *h* es continua en el intervalo abierto $(-2{,}2)$.

Definición de continuidad en un intervalo abierto

Se dice que una función es **continua en un intervalo abierto** si y sólo si es continua en cada número del intervalo abierto.

Definición de continuidad por la derecha

Se dice que la función *f* es **continua por la derecha en el numero *a*** si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

(i) $f(a)$ existe;

(ii) $\lim_{x \to a^+} f(x)\ existe;$

(iii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$

Definición de continuidad por la izquierda

Se dice que la función *f* es **continua por la izquierda en el número *a*** si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

(i) $f(a)$ existe;

(ii) $\lim_{x \to a^-} f(x)\ existe;$

(iii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$

Definición de continuidad en un intervalo cerrado

se dice que una función, cuyo dominio contiene al intervalo cerrado $[a, b]$, es **continua en el intervalo cerrado** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ sí y sólo si es continua en el intervalo abierto (*a, b*), así como continua por la derecha en *a* y continua por la izquierda en *b.*

Ejemplo 2 Demuestre que la función *h* del ejemplo 1 es continua en el intervalo cerrado$[-2,2]$.

Solución La función *h* está definida por

$h(x) = \sqrt{4 - x^2}$

y en el ejemplo 1 se mostro que h es continua en el intervalo abierto (−2,2).

Al aplicar el teorema 1.9.1 se calculan los límites $\lim_{x \to -2^+} h(x)$ y $\lim_{x \to 2^-} h(x)$.

$$\lim_{x \to -2^+} h(x) = \lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2}. \qquad \lim_{x \to 2^-} h(x) = \lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2}.$$
$$=0 \qquad\qquad =0$$
$$=h(-2) \qquad\qquad |=h(2)$$

De este modo, *h* es continua por la derecha en -2 y es continua por la izquierda en 2. En consecuencia, por la definición 1.9.6, *h* es continua en el intervalo cerrado $[-2,2]$. La gráfica de *h* se muestra en la figura 1.

Definición de continuidad en un intervalo semiabierto

(i) Una función cuyo dominio incluye al intervalo semiabierto [*a, b*) **es continua en [*a*, *b*)** si y solo si es continua en el intervalo abierto (*a, b*) y es continua por la derecha *a*.

(ii) Una función cuyo dominio incluye al intervalo semiabierto (*a, b*] **es continua en (a, b]** si y solo si es continua en el intervalo abierto (a, b) y es continua por la izquierda en b.

Ejemplo 3 Determine el intervalo más grande (o unión de intervalos) en el que la función siguiente es continua:

$$f(x) = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x - 3}$$

Solución Primero se determina el dominio de *f*. la función esta definida en todo numero excepto cuando x=3 o cuando $25-x^2 < 0$ (esto es, cuando x >5 o x <−5). Por tanto, el dominio de *f* es [-5,3) ∪ (3,5]. Como

$$\lim_{x \to -5^+} f(x) = 0 \qquad y \qquad \lim_{x \to 5^-} f(x) = 0$$

$$= f(-5) \qquad\qquad = f(5)$$

f es continua por la derecha en −5 y es continua por la izquierda en 5. Además, *f* es continua en los intervalos semiabiertos (−5,3) y (3,5). En consecuencia, *f* es continua en [−5,3) ∪ (3,5]. ◄

Teorema del valor intermedio

Si la función *f* es continua en el intervalo cerrado [*a, b*] y si *f* (*a*) ≠ *f* (*b*), entonces para cada valor *k* entre *f* (*a*) y *f* (*b*) existe un número *c* entre *a* y *b* tal que *f* (*c*) = *k*.

La demostración del teorema del valor intermedio esta más allá de los objetivos de este libro y puede encontrase en un texto de Cálculo avanzando.

En términos geométricos, el teorema del valor intermedio establece que la gráfica de una función continua en un intervalo cerrado debe intersectar a cada recta *y* = *k* entre las rectas *y* = *f* (*a*) y *y* = *f* (*b*) al menos una vez. Observe la figura 2, donde (0, *k*) es cualquier punto sobre el eje *y* entre los puntos (0, *f* (*a*)) y (0, *f*(*b*)); la recta *y* = *k* intersecta la gráfica de f en el punto (*c, k*), donde *c* esta entre *a* y *b*.

Para algunos valores de *k*, puede tenerse mas de un valor posible para *c*. El teorema establece que existe al menos un valor de *c* pero tal valor no es necesariamente único. La figura 3 muestra tres valores posibles para c (c_1, c_2 y c_3) para una *k* particular.

El teorema del valor intermedio afirma que si la función *f* es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces *f* (*x*) toma todos los valores entre *f* (*a*) y *f* (*b*) conforme *x* toma los valores entre *a* y *b*. Los dos ejemplos ilustrativos siguientes muestran la importancia de la continuidad de *f* en [*a*, *b*] para poder garantizar esta afirmación.

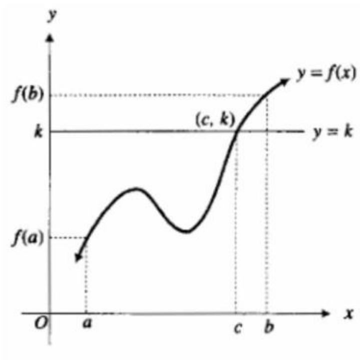


FIGURA 2

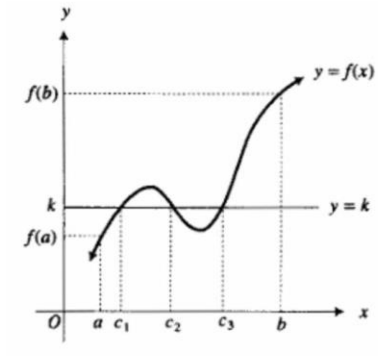


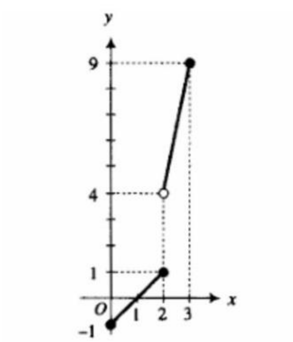
FIGURA 3

Ejemplo ilustrativo 3

Considere la función *f* definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ x^2, & si \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

La grafica de esta función se representa en la figura 4.



$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ x^2, & si \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Figura 4

La función *f* es discontinua en 2, el cual está en el intervalo cerrado [0, 3]; $f(0) = -1$ y $f(3) = 9$. Si k es cualquier número entre 1 y 4, entonces no hay ningún valor de c tal que $f(c) = k$ porque no existen valores de la función entre 1 y 4.

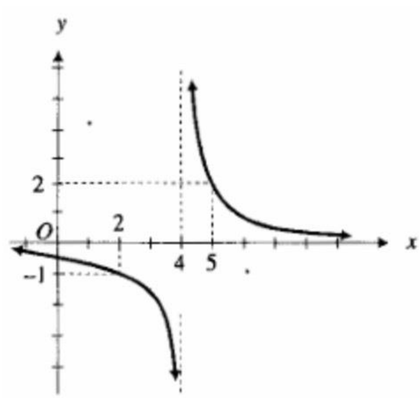
Ejemplo Ilustrativo 4 Sea g la función definida por

$$g(x) = \frac{2}{x-4}$$

La figura 5 muestra la gráfica de esta función.

La función g es discontinua en 4, el cual pertenece al intervalo cerrado [2, 5];

$g(2) = -1$ y $g(5) = 2$. Si k es cualquier numero entre -1 y 2, no hay ningún valor de c entre2 y 5, tal que $g(c) = k$. En particular, si k=1, entonces $g(6) = 1$, pero 6 no pertenece al intervalo (2,5).



$$g(x) = \frac{2}{x-4}$$

Figura 5

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Ejemplo 4 Dada la función f definida por

$$f(x) = 4 + 3x - x^2 \qquad 2 \leq x \leq 5$$

(a) Verifique que el teorema del valor intermedio se cumpla para $k = 1$ trazando la gráfica de f y la recta $y = 1$ estime, con cuatro cifras decimales, el número c del intervalo (2, 5), tal que $f(c) = 1$. **(b)** Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente. **(c)** Dibuje la gráfica de f en el intervalo [2, 5] y muestre el punto (c, 1).

Solución

(a) Como f es una función polinomial, es continua en todo número, en particular en [2, 5]. La figura 6 muestra la gráfica de f y la recta $y = 1$ trazadas en el rectángulo de inspección de [2, 5] por [−10, 10]. En la graficadora, se estima c = 3.7913.

(b) Se resuelve la ecuación cuadrática

$$4 + 3c - c^2 = 1$$

$$c^2 - 3c - 3 = 0$$

$$c = \frac{3 \pm \sqrt{9+12}}{2}$$

$$c = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

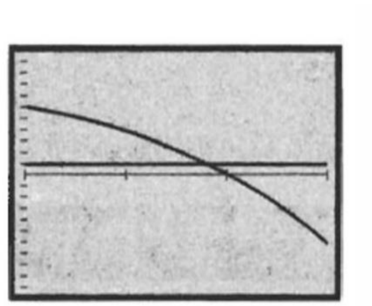
Se rechaza $\frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{21}\right)$ porque este numero es negativo y no pertenece al intervalo (2,5). El numero $\frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{21}\right)$ esta en el intervalo (2,5), y

$$f\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right) = 1$$

Como ($\frac{3+\sqrt{21}}{2} \approx 3.7913$, se confirma la estimación.

(c) la grafica requerida se muestra en la figura 7.

El teorema siguiente es una consecuencia directa, un corolario, del teorema del valor intermedio.

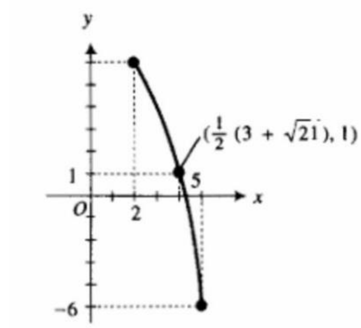


[2, 5] por [-10, 10]

$f(x) = 4 + 3x - x^2$

$y = 1$

Figura 6



$f(x) = 4 + 3x - x^2,\ x \in [2, 5]$

Figura 7

1.9.3 Teorema del cero intermedio

Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe un número c entre a y b, tal que $f(c) = 0$; es decir, c es un cero de f.

►**Ejemplo 5** **(a)** Aplique el teorema del cero intermedio para mostrar que la función definida por

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x + 1$$

Tiene tres ceros entre -2 y 2. **(b)** Estime en una graficadora estos ceros con dos cifras decimales.

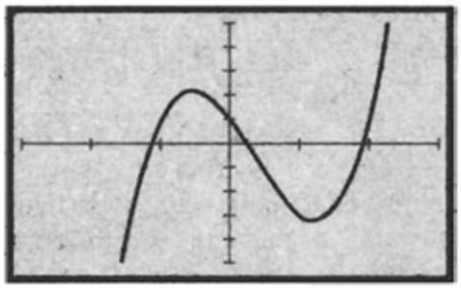
Solución

(a) Se calculan los valores de $f(x)$ para los valores enteros de -2 a 2 y se forma la tabla 1. Como $f(-2)$ y $f(-1)$ tienen signos opuestos, f tiene un cero entre -2 y -1; también f tiene un cero entre 0 y 1, y otro entre 1 y 2 por la misma razón.

(b) La gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [-3, 3] por [-5, 5] se muestra en la figura 8. En la graficadora se estima que los ceros son -1.14, 0.23 y 1.91. ◄

Tabla 1

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	−15	1	1	−3	1



$[-3,3]$ por [-5, 5]

$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x + 1$

Figura 8

Teorema 9 de limites Limite del cociente de dos funciones.

Sí $\lim_{x \to a} f(x) = L$ $\quad y \quad si$ $\lim_{x \to a} g(x) = M,$ entonces $lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ si $M \neq 0$

Teorema 10 Limites Limite de la raíz n-ésima de una función.

Si *n* es un numero entero positivo y $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

Con la restricción de que, si *n* es par, *L* > 0.

Problemas

En los ejercicios 1 a 4, defina f o g y determine los números en los que f o g es continua.

1. (a) $\mathbf{f(x) = \sqrt{x}; g(x) = 16 - x^2}$;
(b) $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}; g(x) = x^2 + 4}$

Solución.

(a) $f(x) = \sqrt{x}; g(x) = 16 - x^2$ ►$(f\ o\ g)(x) = \sqrt{16 - x^2}$

Por el teorema 1.8.5(ii), f o g es continua para $g(x) > 0$.
Por el teorema 1.8.3, g es continua para todo x y $g(x) > 0$ para $-4 < x < 4$.
Por lo tanto, por el teorema 1.9.2, f o g es continua para todo x en $(-4, 4)$.
Porque $\lim_{x\to 4^+}(f\ o\ g)(x) = 0 = (f\ o\ g)(-4)$ y $\lim_{x\to 4^-}(f\ o\ g)(x) = 0 = (f\ o\ g)(4)$, $f\ o\ g$ es continua en $[-4,4]$.

(b) $f(x) = \sqrt{x}; g(x) = x^2 + 4$ ►$(f\ o\ g)(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

Por el teorema 1.8.5(ii), f o g es continua para $g(x) > 0$.
Por el teorema 1.8.3, g es continua para todo x y $g(x) > 0$ para todo x.
Por lo tanto, por el teorema 1.9.2, f o g es continua para todo x, es decir, en $(-\infty, \infty)$.

2. (a) $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}; g(x) = \frac{1}{x-2}}$;
(b) $\boldsymbol{f(\mathrm{x}) = \frac{1}{x-2}; g(x) = \sqrt{x}}$

Solución.

(a) $f(x) = \sqrt{x}; g(x) = \frac{1}{x-2}$ ►$(f\ o\ g)(x) = \sqrt{\frac{1}{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

Por el teorema 1.8.5(ii), f o g es continua para $g(x) > 0$.
Por el teorema 1.8.4, g es continua excepto en 2 y $g(2) > 0$ para $x > 2$.
Por lo tanto, el teorema 1.9.2, f o g es continua en $(2, +\infty)$.
Porque $\lim_{x\to 2^+}(f\ o\ g)(x)\ no\ existe, f$ o g es continua solo en $(2, +\infty)$.

(b) $f(\mathrm{x}) = \frac{1}{x-2}; g(x) = \sqrt{x}$ ►$(f\ o\ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

Por el teorema 1.8.4, f o g es continua para $g(x) \neq 2$.
Por el teorema 1.8.5(ii), g es continua para $x > 0$ y $g(x)=2$ para $x=4$.
Por lo tanto, el teorema 1.9.2, f o g es continua para todos los números positivos excepto 4.
Porque

$\lim_{x\to 0^+}(f\ o\ g)(x) = \frac{-1}{2} = (f\ o\ g)(0), f\ o\ g$ es continua en $[0,4)\ \cup$ $(4,+\infty)$.

3. **(a)** $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[3]{x}}$; $\boldsymbol{g(x) = \sqrt{x+1}}$;
(b) $\boldsymbol{f(\mathrm{x}) = \sqrt{x+1}}$; $\boldsymbol{g(x) = \sqrt[3]{x}}$

Solución.

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $g(x) = \sqrt{x+1}$ ►$(f\ o\ g)(x) = \sqrt[6]{x+1}$

Por el teorema 1.8.5 (i), f o g es continua para toda g (x).

Por el teorema 1.8.5(ii), g es continua para $x > -1$.

Por lo tanto, el teorema 1.9.2, f o g es continua en $(-1, +\infty)$.

Porque $\lim_{x\to -1^+}(f\ o\ g)(x) = 0 = (f\ o\ g)(-1), f\ o\ g$ es continua en $[-1,+\infty)$.

(b) $f(\mathrm{x}) = \sqrt{x+1}$; $g(x) = \sqrt[3]{x}$ ►$(f\ o\ g)(x) = \sqrt{\sqrt[3]{x}+1}$

Por el teorema 1.8.5(ii), f o g es continua para g (x) > -1.

Por el teorema 1.8.5 (i), g es continua para toda x y g (x).>-1 para $x > -1$.

Por lo tanto, el teorema 1.9.2, f o g es continua en $(-1, +\infty)$.

Porque $\lim_{x\to -1^+}(f\ o\ g)(x) = 0 = (f\ o\ g)(-1), f$ o g es continua en $[-0,+\infty)$.

4. $\boldsymbol{f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x-1}}}$; $\boldsymbol{g(x) = |x|}$

Solución.

$f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x-1}}$; $g(x) = |x|$ ►$(f\ o\ g)(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{|x|-1}}$

$\sqrt{4-x^2}$ es continua para x en $(-2, 2)$; $\sqrt{|x|-1}$ es continua para x en $(-\infty, -1)$ $\cup$ $(1, +\infty)$.

Por el teorema 1.8.2 (iv), f o g es continua para x en $(-2, -1) \cup (1, 2)$.

Porque $\lim_{x\to -2^+}(f\ o\ g)(x) = 0 = (f\ o\ g)(-2)$ y $\lim_{x\to 2^-}(x) = 0 = (f\ o\ g)(2)$,

f o g es continua en $[-2, -1) \cup (1, 2]$.

En los ejercicios 5 a 10, determine el dominio de la función, y después determine para cual de los intervalos indicados es continua la función.

5. $\boldsymbol{f(x) = \frac{2}{x+5}; (3,7), [-6,4], (-\infty,0), (-5,+\infty), [-5,+\infty), [-10,-5).}$

Solución.

$f(x) = \frac{2}{x+5}$; el dominio de *f* son todos los números reales excepto −5.

f es continua en $(3,7), (-5,+\infty), [-10,-5)$; *f* es descontinua en $[-6,4], (-\infty,0), [-5,+\infty)$.

6. $\boldsymbol{f(r) = \frac{r+3}{r^2-4}; (0,4], (-2,2), (-\infty,-2], (2,+\infty), [-4,4], (-2,2].}$

Solución.

$f(r) = \frac{r+3}{r^2-4}$; el dominio de *f* son todos los números reales excepto 2 y −2.

f es continua en $(-2,2), (2,+\infty)$ **y** discontinua en $(0,4], (-\infty,-2], [-4,4], (-2,2]$.

7. $\boldsymbol{g(x) = \sqrt{x^2-9};\ (-\infty,-3), (-\infty,-3], (3,+\infty), [3,+\infty), (-3,3).}$

Solución.

$g(x) = \sqrt{x^2-9}$; el dominio de *g* es $\{\, x \mid x^2-9 \geq 0 \,\} = (-\infty,-3] \cup [3,+\infty)$.

g es continua en $(-\infty,-3), (3,+\infty)$; *g* es discontinua en $(-3,3)$.

Porque $\lim_{x\to -3^-} g(x) = \lim_{x\to -3^-} \sqrt{x^2-9} = 0 = g(-3)$ y $\lim_{x\to 3^+} g(x) = \lim_{x\to 3^+} \sqrt{x^2-9} = 0 = g(3)$, *g* es solo continua en $(-\infty,-3]$ y $[3,+\infty)$.

8. $\boldsymbol{f(t) = \frac{|t-1|}{t-1};\ (-\infty,1), (-\infty,1], [-1,1], (-1,+\infty), (1,+\infty).}$

Solución.

$f(t) = \frac{|t-1|}{t-1}$; el dominio de *f* son todos los números reales excepto 1.

f es continuo en $(-\infty,1)$ y $(1,+\infty)$; *f* es discontinua en $(-\infty,1], [-1,1], (-1,+\infty)$.

9. $\boldsymbol{h(x) = \begin{cases} 2x-3 & si\ x < -2 \\ x-5 & si\ -2 \leq x \leq 1 \\ 3-x & si\ 1 > x \end{cases};\ (-\infty,1), (-2,+\infty), (-2,1), [-2,1), [-2,1].}$

Solución.

$h(x) = \begin{cases} 2x-3 & si\ x < -2 \\ x-5 & si\ -2 \leq x \leq 1 \\ 3-x & si\ 1 > x \end{cases}$; el dominio de *h* son todos los números reales.

$\lim_{x\to -2^-} h(x) = \lim_{x\to -2^-} (2x-3) = -7$; $\lim_{x\to -2^+} h(x) = \lim_{x\to -2^+} (x-5) = -7 = h(-2)$ y por lo tanto *h* es continua −2.

$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-}(x-5) = -4 = h(1);\ \lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+}(3-x) = 2$ y por lo tanto h es continua desde la izquierda en 1.

h es continua en $(-\infty, 1), (-2, 1), [-2, 1), [-2,1]$; h es discontinua en $(-2, +\infty)$.

10. $\boldsymbol{f(y) = \frac{1}{3+2y-y^2};\ (-1, 3), [-1, 3], [-1, 3), (-1, 3]}$

Solución.

$$f(y) = \frac{1}{3+2y-y^2} = \frac{1}{(3-y)(1+y)}$$

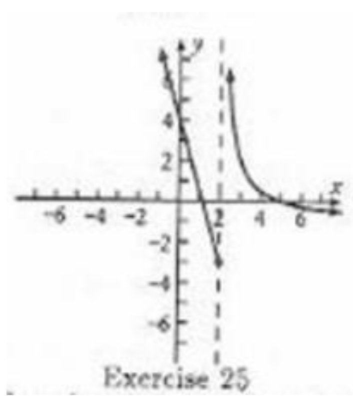
el dominio de *f* son todos los números reales excepto 3 y -1. Como *f* es una función racional, *f* es continua en su dominio. Por lo tanto, *f* es continua en $(-1, 3)$ y *f* es discontinua en $[-1, 3]$, $[-1, 3)$ y $(-1, 3)$.

17. Vea el ejemplo 1. 18. vea el ejemplo 2. 19. vea el ejemplo 3.

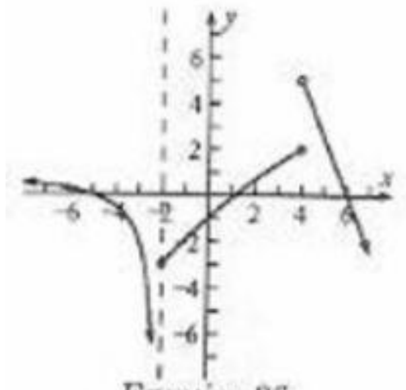
20. vea el ejemplo 4. 21. vea el ejemplo 5. 22.vea el ejemplo 6.

En los ejercicios 11 a 14, dibuje la gráfica de una función *f* que satisfaga las condiciones dadas.

11. ***f*** **es continua en** $\boldsymbol{(-\infty, 2]}$ **y** $\boldsymbol{(2, +\infty)}$; $\boldsymbol{\lim_{x\to 0} f(x) = 4;\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = -3;\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty;\ \lim_{x\to 5} f(x) = 0.}$



12. f **es continua en** $(-\infty,-2)$, $[-2,4]$ **y** $(4,+\infty)$; $\lim_{x\to -5} f(x) = 0$; $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to -2^+} f(x) = -3$; $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$; $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 2$; $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 5$; $\lim_{x\to 6} f(x) = 0$.



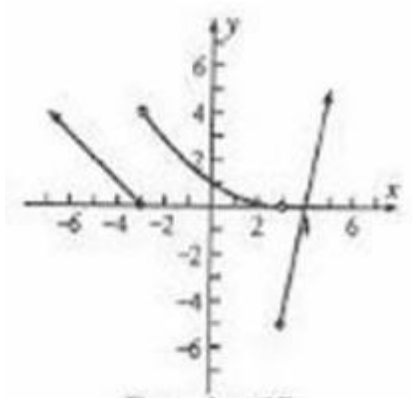
Exercise 26

13. f **es continua en** $(-\infty,-3]$, $(-3,3)$ **y** $[3,+\infty)$;

$\lim_{x\to -5} f(x) = 2$; $\lim_{x\to -3^-} f(x) = 0$; $\lim_{x\to -3^+} f(x) = 4$;

$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$; $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 0$; $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -5$;

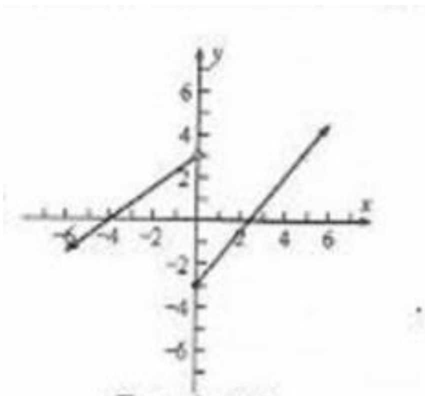
$\lim_{x\to 4} f(x) = 0$



Exercise 27

14. f **es continua en** $(-\infty, 0)$ **y** $[0, +\infty)$; $\lim_{x\to -4} f(x) = 0$;

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -3$; $\lim_{x\to 4} f(x) = 2$.



Exercise 28