

## Trabajo

Para recordar, en primer lugar, cuando una fuerza  $F$  actúa sobre una partícula que se mueve de un punto  $a$  a un punto  $b$ , el trabajo  $W_{a \rightarrow b}$  efectuado por la fuerza está dado por la siguiente integral de línea:

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b F \cos \phi dl$$

donde  $d\vec{l}$  es un desplazamiento infinitesimal a lo largo de la trayectoria de la partícula y  $\phi$  es el ángulo entre  $\vec{F}$  y  $d\vec{l}$  en cada punto de la trayectoria.

En segundo lugar, si la fuerza  $\vec{F}$  es conservativa, el trabajo realizado por  $\vec{F}$  siempre se puede expresar en términos de una energía potencial  $U$ . Cuando la partícula se mueve de un punto donde la energía potencial es  $U_a$  a otro donde es  $U_b$ , el cambio en la energía es  $\Delta U = U_b - U_a$  y el trabajo  $W_{a \rightarrow b}$  que realiza la fuerza es

$$W_{a \rightarrow b} = U_a - U_b = -(U_b - U_a) = -\Delta U$$

Cuando  $W_{a \rightarrow b}$  es positivo,  $U_a$  es mayor que  $U_b$ ,  $\Delta U$  es negativo y la energía potencial disminuye.

En tercer lugar, el teorema del trabajo y la energía establece que el cambio en la energía cinética  $\Delta K = K_b - K_a$  durante cualquier desplazamiento es igual al trabajo *total* realizado sobre la partícula. Si el trabajo sobre la partícula lo realizan solo fuerzas conservativas, entonces el trabajo total, se escribe así:

$$K_a + U_a = K_b + U_b$$

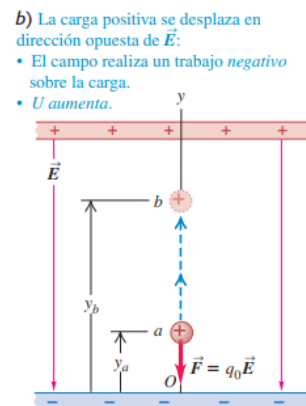
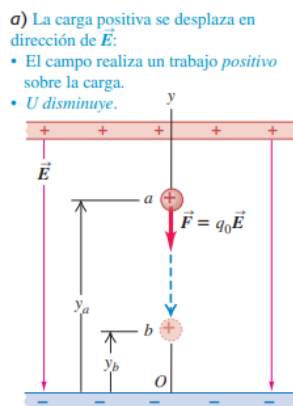
Es decir, en estas circunstancias, la energía mecánica total (cinética más potencial) se conserva.

Entonces la energía potencial para la fuerza eléctrica  $F_y = -q_0 E$  es

$$U = q_0 E y$$

Cuando la carga de prueba se mueve de la altura  $y_a$  a la altura  $y_b$  el trabajo realizado sobre la carga por el campo está dado por

$$\begin{aligned} W_{a \rightarrow b} &= -\Delta U = -(U_b - U_a) \\ &= -(q_0 E y_b - q_0 E y_a) \\ &= q_0 E (y_a - y_b) \end{aligned}$$



Si la carga de prueba  $q_0$  es negativa, la energía potencial aumenta cuando se mueve a favor del campo, y disminuye cuando se mueve en contra del campo.

Sea positiva o negativa la carga de prueba, se aplica la siguiente regla general:  $U$  aumenta si la carga de prueba  $q_0$  se mueve en la dirección opuesta a la fuerza eléctrica  $\vec{F} = q_0\vec{E}$ ;  $U$  disminuye si  $q_0$  se mueve en la misma dirección.

Si  $q$  y  $q_0$  tienen el mismo signo (+ o -), la fuerza es de repulsión y  $F_r$  es positiva; si las dos cargas tienen signos opuestos, la fuerza es de atracción y  $F_r$  es negativa. La fuerza no es constante durante el desplazamiento, y se tiene que integrar para calcular el trabajo  $W_{a \rightarrow b}$  que realiza esta fuerza sobre  $q_0$  a medida que  $q_0$  se mueve de  $a$  a  $b$ :

$$W_{a \rightarrow b} = \int_{r_a}^{r_b} F_r dr = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

El trabajo efectuado por la fuerza eléctrica para esta trayectoria particular depende solo de los puntos en los extremos.

Consideremos ahora un desplazamiento más general en el que  $a$  y  $b$  *no* están en la misma línea radial. El trabajo efectuado sobre  $q_0$  durante este desplazamiento está dado por:

$$W_{a \rightarrow b} = \int_{r_a}^{r_b} F \cos \phi dl = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \cos \phi dl$$

si se define  $U_a = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r_a}$  como la energía potencial cuando  $q_0$  está a una distancia  $r_a$  de  $q$ , y se define  $U_b = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r_b}$  como la energía potencial  $q_0$  está a una distancia  $r_b$  de  $q$ . De esta forma, la energía potencial  $U$  cuando la carga de prueba  $q_0$  está a cualquier distancia  $r$  de la carga  $q$  es:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r}$$

## Conservación de la energía con fuerzas eléctricas

Un positrón tiene una masa de  $9.11 \times 10^{-31} \text{kg}$  y una carga  $q_0 = e = 1.60 \times 10^{-19} \text{C}$ . Suponga que este positrón se mueve en las cercanías de una partícula  $\alpha$  (alfa) cuya carga dada en Coulombs es  $q = 2e = 3.20 \times 10^{-19} \text{C}$  y con masa de  $6.64 \times 10^{-27} \text{kg}$ . La partícula  $\alpha$  tiene una masa de 7000 veces mayor que la del positrón, por lo que se supondrá que está en reposo. Cuando el positrón está a  $1.00 \times 10^{-10} \text{m}$  de la partícula  $\alpha$ , se aleja de esta con una rapidez de  $3.00 \times 10^6 \text{m/s}$ . Determine: a) ¿Cuál es la rapidez del positrón cuando las dos partículas están separadas una distancia  $2.00 \times 10^{-10} \text{m}$ ? b) ¿Cuál es la rapidez del positrón cuando está muy alejado de la partícula alfa?

- a) Ambas partículas tienen carga positiva, de modo que el positrón aumenta su rapidez conforme se aleja de la partícula  $\alpha$ . De acuerdo con la ecuación de la conservación de la energía, la energía cinética final es:

$$K_b = \frac{1}{2} m v_b^2 = K_a + U_a - U_b$$
$$K_a = \frac{1}{2} m v_a^2 = \frac{1}{2} (9.11 \times 10^{-31} \text{kg}) (3.00 \times 10^6 \text{m/s})^2$$
$$= 4.10 \times 10^{-18} \text{J}$$
$$U_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r_a} = (9.0 \times 10^9 \text{N} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{C}^2}) \times \frac{(3.20 \times 10^{-19} \text{C})(1.60 \times 10^{-19} \text{C})}{1.00 \times 10^{-10} \text{m}}$$
$$= 4.61 \times 10^{-18} \text{J}$$
$$U_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r_b} = 2.30 \times 10^{-18} \text{J}$$

De modo que la energía cinética del positrón y su rapidez en  $r = r_b = 2.00 \times 10^{-10} \text{m}$  son

$$K_b = \frac{1}{2} m v_b^2 = 4.10 \times 10^{-18} \text{J} + 4.61 \times 10^{-18} \text{J} - 2.30 \times 10^{-18} \text{J} = 6.41 \times 10^{-18} \text{J}$$

$$v_b = \sqrt{\frac{2K_b}{m}} = \sqrt{\frac{2(6.41 \times 10^{-18} \text{J})}{9.11 \times 10^{-31} \text{kg}}} = 3.8 \times 10^6 \text{m/s}$$

- b) Cuando el positrón y la partícula alfa están muy separados de modo que  $r = r_c \rightarrow \infty$ , la energía potencial final  $U_c$  tiende a cero. Nuevamente, a partir de la conservación de la energía, la energía cinética final y la rapidez del positrón son

$$K_c = K_a + U_a - U_c = 4.10 \times 10^{-18} \text{J} + 4.61 \times 10^{-18} \text{J} - 0 = 8.71 \times 10^{-18} \text{J}$$

$$v_c = \sqrt{\frac{2K_c}{m}} = \sqrt{\frac{2(8.71 \times 10^{-18} \text{J})}{9.11 \times 10^{-31} \text{kg}}} = 4.4 \times 10^6 \text{m/s}$$

## Energía potencial eléctrica con varias cargas puntuales

Suponga que el campo eléctrico  $\vec{E}$  en el que se desplaza la carga  $q_0$  se debe a varias cargas puntuales  $q_1, q_2, q_3, \dots$  a distancias  $r_1, r_2, r_3, \dots$  de  $q_0$ . El campo eléctrico total en cada punto es la *suma vectorial* de los campos debidos a las cargas individuales y el trabajo total realizado sobre  $q_0$  durante cualquier desplazamiento es la suma de las contribuciones de las cargas individuales.

$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \dots \right) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Cuando  $q_0$  está en un punto  $b$  diferente, la energía potencial está dada por la misma expresión, pero  $r_1, r_2, \dots$  son las distancias desde  $q_1, q_2, \dots$  al punto  $b$ . El trabajo efectuado sobre la carga  $q_0$  cuando se desplaza de  $a$  a  $b$  a lo largo de cualquier trayectoria es igual a la diferencia de  $U_a - U_b$  entre las energías potenciales cuando  $q_0$  está en  $a$  y luego en  $b$ .

## Potencial eléctrico

El potencial es la energía potencial por unidad de carga. El potencial  $V$  se define, en cualquier punto del campo eléctrico, como la energía potencial  $U$  por unidad de carga asociada con una carga de prueba  $q_0$  en ese punto:

$$V = \frac{U}{q_0}$$

Tanto la energía potencial como la carga son escalares, por lo que el potencial es una cantidad escalar. Sus unidades se determinan, al dividir unidades de energía entre las de carga. La unidad de potencial en el SI se llama volt y es igual a 1 joule por coulomb:

$$1 V = 1 \text{ volt} = \frac{J}{C} = 1 \text{ joule/coulomb}$$

Esto iguala el trabajo realizado por la fuerza eléctrica durante un desplazamiento de  $a$  a  $b$  con la cantidad  $-\Delta U = -(U_b - U_a)$ , sobre la base de “trabajo por unidad de carga”. Al dividir esta ecuación entre  $q_0$  se obtiene:

$$\frac{W_{a \rightarrow b}}{q_0} = -\frac{\Delta U}{q_0} = -\left( \frac{U_b}{q_0} - \frac{U_a}{q_0} \right) = -(V_b - V_a) = V_a - V_b$$

Donde  $V_a = U_a/q_0$  es la energía potencial por unidad de carga en el punto  $a$ ;  $V_b$  se define de forma análoga.  $V_a$  y  $V_b$  se denominan el potencial en el punto  $a$  y potencial en el punto  $b$ , respectivamente. De este modo, el trabajo realizado por unidad de carga por la fuerza eléctrica cuando un cuerpo con carga se desplaza de  $a$  a  $b$  es igual al potencial en  $a$  menos el potencial en  $b$ .

## Cálculo del potencial eléctrico

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Donde  $r$  es la distancia de la carga puntual  $q$  al punto en que se evalúa el potencial. Si  $q$  es positiva, el potencial negativo en todo lugar. Observe que el potencial, como el campo eléctrico, es independiente de la carga de prueba  $q_0$  que se utiliza para definirlo.

De manera similar, para obtener el potencial debido a un conjunto de cargas puntuales.

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Así como el campo eléctrico debido a un conjunto de cargas puntuales es la suma *vectorial* de los campos producidos por cada carga, el potencial eléctrico debido a una colección de cargas puntuales es la suma *escalar* de los potenciales debidos a cada carga. Cuando se tiene una distribución continua de carga en elemento  $dq$ , y la suma en la ecuación se convierte en integral:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

donde  $r$  es la distancia que hay entre el elemento con carga  $dq$  y el punto del campo donde se desea calcular  $V$ .

## Obtención del potencial eléctrico a partir del campo eléctrico

Cuando se tiene un conjunto de cargas puntuales, la ecuación anterior es por lo general la forma más fácil de calcular el potencial  $V$ . Pero en ciertos problemas en los que se conoce el campo eléctrico o se puede calcular sin mayor dificultad, es más fácil determinar  $V$  a partir de  $\vec{E}$ . La fuerza sobre una carga de prueba se escribe como  $\vec{F} = q_0\vec{E}$  por lo que, según, el trabajo realizado por la fuerza eléctrica conforme la carga de prueba se desplaza de  $a$  a  $b$  está dado por:

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Si esta ecuación se divide entre  $q_0$  se encuentra que

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E \cos \phi dl$$

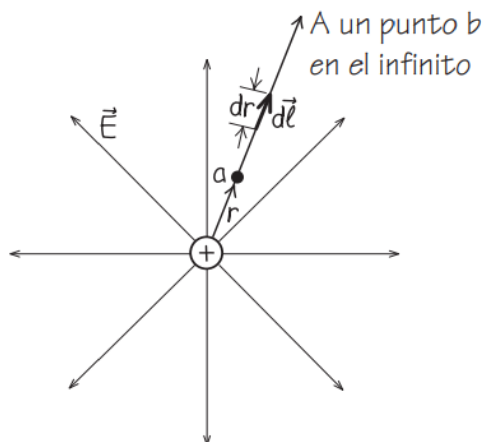
Diferencia de potencial como una integral de campo eléctrico

### Calculo de Potencial por Integración

Integrando el campo eléctrico como en la ecuación, calcule el potencial a una distancia  $r$  desde una carga puntual  $q$ .

Ubicamos el punto  $a$  de la ecuación a una distancia  $r$  y el punto  $b$  en el infinito. Hacemos que el potencial sea cero a una distancia infinita de la carga  $q$ .

Para resolver la integral, podemos elegir cualquier camino entre los puntos  $a$  y  $b$ . El más conveniente es una línea recta radial como se muestra en la figura, de manera que esté en la dirección radial y tenga magnitud  $dr$ .



Al escribir  $\vec{dl} = dr \hat{r}$

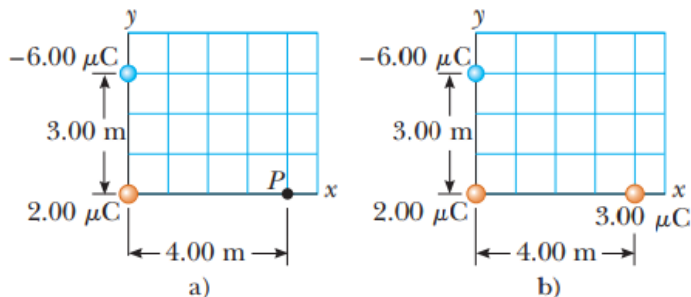
$$V - 0 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_r^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot dr \hat{r} = \int_r^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_r^\infty = 0 - \left( -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right)$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

### Potencial Eléctrico debido a dos Cargas Puntuales

Como se muestra en la figura, una carga  $q_1 = 2.00 \mu\text{C}$  se ubica en el origen y una carga  $q_2 = -6.00 \mu\text{C}$  se ubica en  $(0, 3.00)\text{m}$ .

- a) Encuentre el potencial eléctrico total debido a estas cargas en el punto P, cuyas coordenadas son  $(4.00, 0)\text{m}$ .



Reconozca que las cargas de  $2.00 \mu\text{C}$  y de  $-6.00 \mu\text{C}$  son cargas fuente y establecen un campo eléctrico así como un potencial en todos los puntos del espacio, incluido el punto P.

Use la ecuación para el sistema de dos cargas fuente

$$V_p = k_c \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right)$$

Sustituya valores:

$$V_p = \left( 8.99 \times 10^9 \text{N} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{C}^2} \right) \left( \frac{2.00 \times 10^{-6} \text{C}}{4.00 \text{m}} + \frac{-6.00 \times 10^{-6} \text{C}}{5.00 \text{m}} \right) = -6.29 \times 10^3 \text{V}$$

- b) Encuentre el cambio en energía potencial del sistema de dos cargas más una tercera carga  $q_3 = 3.00 \mu\text{C}$  conforme la última carga se mueve del infinito al punto P.

Asigne  $U_i = 0$  para el sistema en una configuración en que la carga  $q_3$  está en el infinito. Use la ecuación para evaluar la energía potencial para la configuración en que la carga está en P:

$$U_f = q_3 V_p$$

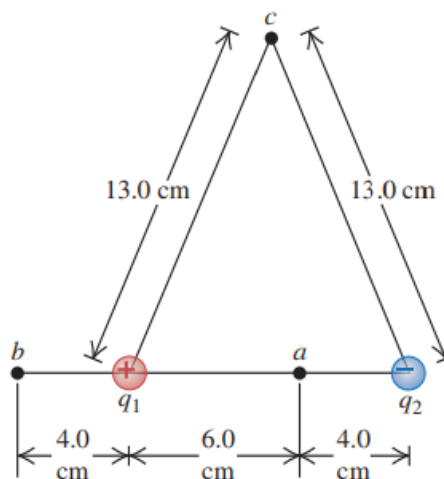
Sustituya valores numéricos para evaluar  $\Delta U$ :

$$\Delta U = U_f - U_i = q_3 V_p - 0 = (3.00 \times 10^{-6} \text{C})(-6.29 \times 10^3 \text{V}) = -1.89 \times 10^{-2} \text{J}$$

### Potencial debido a dos Cargas Puntuales con configuración triangular

Un dipolo eléctrico está formado por dos cargas puntuales,  $q_1 = +12\text{nC}$  y  $q_2 = -12\text{nC}$ , colocadas a una distancia de 10.0 cm. Calcule los potenciales en los puntos  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

La incógnita es el potencial eléctrico  $V$  en tres puntos, lo que se obtiene haciendo la suma algebraica.



En el punto  $a$  tenemos que  $r_1 = 0.060\text{ m}$  y  $r_2 = 0.040\text{ m}$ , de modo que la ecuación es:

$$\begin{aligned}
 V_a &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2} \\
 &= (9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{12 \times 10^{-9} \text{ C}}{0.060 \text{ m}} + (9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{12 \times 10^{-9} \text{ C}}{0.040 \text{ m}} \\
 &= 1800 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{C} + (-2700 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{C}) = 1800 \text{ V} + (-2700 \text{ V}) = -900 \text{ V}
 \end{aligned}$$

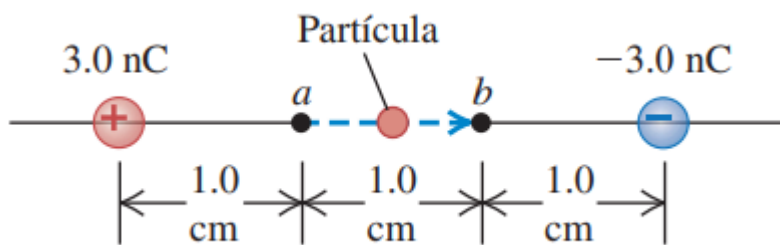
De forma análoga, se puede demostrar que el potencial en el punto  $b$

(donde  $r_1 = 0.040\text{ m}$  y  $r_2 = 0.140\text{ m}$ ) es  $V_b = 1930\text{ V}$

Y que el potencial en el punto  $c$  (donde  $r_1 = r_2 = 0.130\text{ m}$ ) es  $V_c = 0$

## Movimiento a través de una Diferencia Potencial

En la figura, una partícula de polvo, cuya masa es  $m = 5.0 \times 10^{-9} \text{ kg} = 5.0 \mu\text{g}$  y con carga  $q_0 = 2.0 \text{ nC}$ , parte del reposo en un punto  $a$  y se mueve en línea recta hasta un punto  $b$ . ¿Cuál es su rapidez  $v$  en el punto  $b$ ?



Sobre la partícula actúa solo la fuerza eléctrica conservativa, por lo que la energía mecánica se conserva:  $K_a + U_a = K_b + U_b$ . Las energías potenciales  $U$  se obtienen de los potenciales  $V$  correspondientes usando la ecuación:  $U_a = q_0 V_a$  y  $U_b = q_0 V_b$ .

Tenemos que  $K_a = 0$  y  $K_b = \frac{1}{2} m v^2$ . Al sustituir esto y las expresiones de  $U_a$  y  $U_b$  en la ecuación de conservación de la energía y despejar  $v$ , se encuentra que

$$0 + q_0 V_a = \frac{1}{2} m v^2 + q_0 V_b$$

$$v = \sqrt{\frac{2q_0(V_a - V_b)}{m}}$$

Se calculan los potenciales usando la ecuación,  $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ :

$$V_a = \left(9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{C}^2}\right) \left(\frac{3.0 \times 10^{-9} \text{ C}}{0.010 \text{ m}} + \frac{(-3.0 \times 10^{-9} \text{ C})}{0.020 \text{ m}}\right) = 1350 \text{ V}$$

$$V_b = \left(9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{C}^2}\right) \left(\frac{3.0 \times 10^{-9} \text{ C}}{0.020 \text{ m}} + \frac{(-3.0 \times 10^{-9} \text{ C})}{0.010 \text{ m}}\right) = -1350 \text{ V}$$

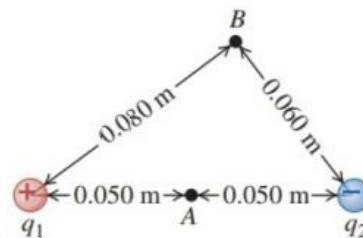
$$V_a - V_b = (1350 \text{ V}) - (-1350 \text{ V}) = 2700 \text{ V}$$

Finalmente

$$v = \sqrt{\frac{2(2.0 \times 10^{-9} \text{ C})(2700 \text{ V})}{5.0 \times 10^{-9} \text{ kg}}} = 46 \text{ m/s}$$

### Potencial debido a dos Cargas Puntuales con asimetría

Dos cargas puntuales  $q_1 = 2.40 \text{ nC}$  y  $q_2 = -6.50 \text{ nC}$  están separados  $0.100 \text{ m}$ . El punto  $A$  está a la mitad de la distancia entre ellas; el punto  $B$  está a  $0.080 \text{ m}$  de  $q_1$  y a  $0.060 \text{ m}$  de  $q_2$  (mirar la figura). Considere el potencial eléctrico como cero en el infinito. Determine *a)* el potencial en el punto  $A$ ; *b)* el potencial en el punto  $B$ ; *c)* el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre una carga de  $2.50 \text{ nC}$  que viaja del punto  $B$  al punto  $A$



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

La localización de los cambios y puntos  $A$  y  $B$  están dibujados en la figura.

$$(a) V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{A1}} + \frac{q_2}{r_{A2}} \right)$$

$$V_A = (8.988 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2) \left( \frac{2.40 \times 10^{-9} \text{ C}}{0.050 \text{ m}} + \frac{-6.50 \times 10^{-9} \text{ C}}{0.050 \text{ m}} \right) = -737 \text{ V}$$

$$(b) V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{B1}} + \frac{q_2}{r_{B2}} \right)$$

$$V_B = (8.988 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2) \left( \frac{2.40 \times 10^{-9} \text{ C}}{0.080 \text{ m}} + \frac{-6.50 \times 10^{-9} \text{ C}}{0.060 \text{ m}} \right) = -704 \text{ V}$$

Usa la ecuación y el resultado de la parte (a) y (b) para calcular  $W$ .

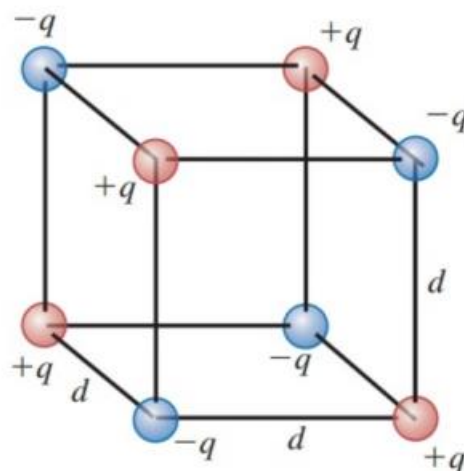
$$W_{B \rightarrow A} = q(V_B - V_A) = (2.50 \times 10^{-9} \text{ C})(-704 \text{ V}) - (-737 \text{ V}) = 8.2 \times 10^{-8} \text{ J}$$

La fuerza eléctrica realiza trabajo positivo en a carga positiva cuando se mueve desde el mayor potencial (Punto  $B$ ) hasta el menor potencial (punto  $A$ ).

## Cristal iónico

La figura muestra ocho cargas puntuales situadas en las esquinas de un cubo con lados de longitud  $d$ . Los valores de las cargas son  $+q$  y  $-q$ , como se indica. a) Calcule la Energía potencial  $U$  de esta configuración.

$$U = \frac{Kq_1 q_2}{r}$$



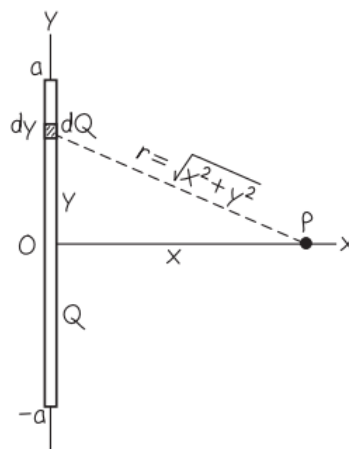
Ocho carga significa que hay  $\frac{8(8-1)}{2} = 28$  pares. Hay 12 pares de  $q$  y  $-q$  separados por  $d$ , 12 pares de cargas iguales separadas por  $\sqrt{2}d$  and 4 pares de  $q$  y  $-q$  separados por  $\sqrt{3}d$ .

$$(a) U = kq^2 \left( -\frac{12}{d} + \frac{12}{\sqrt{2}d} - \frac{4}{\sqrt{3}d} \right) = -\frac{12kq^2}{d} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) = -1.46 \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 d}$$

## Potencial de una Línea de Carga

Una carga eléctrica positiva  $Q$  está distribuida de manera uniforme a lo largo de una línea de longitud  $2a$  que se encuentra a lo largo del eje  $y$ , entre  $y = -a$  y  $y = +a$ . Determine el potencial eléctrico en el punto  $P$  sobre el eje  $x$  a una distancia  $x$  del origen.

Se puede calcular  $V$  en el punto  $P$  integrando sobre la distribución de carga. Cada elemento de carga  $dQ$  se encuentra a una distancia diferente del punto  $P$ , por lo que la integración será un poco más complicada.



El elemento de carga  $dQ$  que corresponde a un elemento de longitud  $dy$  sobre la varilla es  $dQ = (Q/2a)dy$ . La distancia entre  $dQ$  a  $P$  es  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , y la contribución  $dV$  que el elemento de carga hace al potencial en  $P$  es

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2a} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Para obtener el potencial en  $P$  debido a toda la varilla, se integra  $dV$  sobre la longitud de la varilla, de  $y = -a$  a  $y = a$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2a} \int_{-a}^a \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

La integral se puede consultar en una tabla. El resultado final es

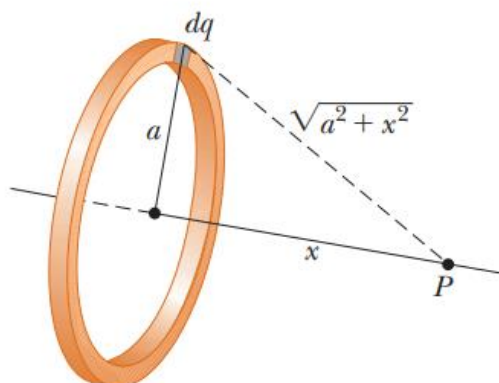
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2a} \ln \left( \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + a}{\sqrt{a^2 + x^2} - a} \right)$$

### Potencial Eléctrico Debido a un Anillo con Carga Uniforme

- a) Encuentre una expresión para el potencial eléctrico en un punto  $P$  ubicado sobre el eje central perpendicular de un anillo con carga uniforme de radio  $a$  y carga total  $Q$ .

Ya que el anillo consiste en una distribución continua de carga en lugar de un conjunto de cargas discretas, en este ejemplo debe usar la técnica de integración.

Tome el punto  $P$  a una distancia  $x$  desde el centro del anillo, como se muestra en la figura 25.15. Observe que todos los elementos de carga  $dq$  están a la misma distancia  $\sqrt{a^2 + x^2}$  el punto  $P$ .



Aplique la ecuación para expresar  $V$  en términos de la geometría.

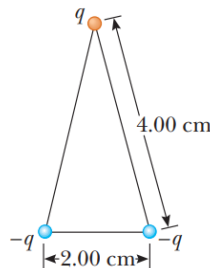
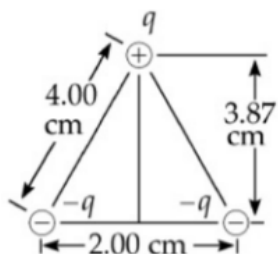
$$V = k_e \int \frac{dq}{r} = k_e \int \frac{dq}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Al notar que  $a$  y  $x$  son constantes, quite  $\sqrt{a^2 + x^2}$  de la integral e integre sobre el anillo

$$V = \frac{k_e}{\sqrt{a^2 + x^2}} \int dq = \frac{k_e Q}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

## Taller en clase

- Las tres partículas con carga de la figura están en los vértices de un triángulo isósceles. Calcule el potencial eléctrico en el punto medio de la base si  $q = 7.00 \mu\text{C}$

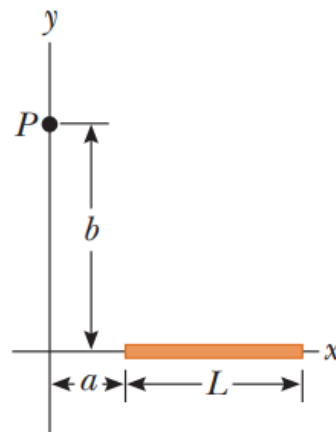


$$V = \sum_i k \frac{q_i}{r_i} = (8.99 \times 10^9)(7.00 \times 10^{-6}) \left[ \frac{-1}{0.0100} - \frac{1}{0.0100} + \frac{1}{0.0387} \right]$$

$$V = -1.10 \times 10^7 = -11.0 \text{ MV}$$

- La varilla delgada con carga uniforme que se muestra en la figura P25.60 tiene una densidad de carga lineal  $\lambda$ . Encuentre una expresión para el potencial eléctrico en el punto  $P$ .

$$\begin{aligned} V &= k_e \int_a^{a+L} \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2 + b^2}} \\ &= k_e \lambda \ln \left[ x + \sqrt{x^2 + b^2} \right] \Big|_a^{a+L} \\ &= k_e \lambda \left[ \frac{a+L + \sqrt{(a+L)^2 + b^2}}{a + \sqrt{a^2 + b^2}} \right] \end{aligned}$$



## Gradiente de Potencial

Recordemos que el campo eléctrico y el potencial se relacionan estrechamente. La ecuación a continuación expresa un aspecto de esa relación:

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Si se conoce  $\vec{E}$  en varios puntos, esta ecuación se puede utilizar para calcular las diferencias de potencial. Si se conoce el potencial  $V$  en varios puntos, es posible determinar  $\vec{E}$ . Considerando que  $V$  es función de las coordenadas  $(x, y, z)$  de un punto en el espacio, se demostrará que las componentes de  $E$  se relacionan directamente con las derivadas parciales de  $V$ .

En la ecuación  $V_a - V_b$  es el potencial de  $a$  con respecto a  $b$ , es decir, el cambio de potencial encontrado en un desplazamiento de  $b$  a  $a$ . Esto se escribe como:

$$V_a - V_b = \int_b^a dV = - \int_a^b dV$$

donde  $dV$  es el cambio infinitesimal del potencial que acompaña a un elemento infinitesimal  $d\vec{l}$  de la trayectoria de  $b$  a  $a$ , se tiene

$$- \int_a^b dV = \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Estas dos integrales deben ser iguales para cualquier par de límites  $a$  y  $b$ , y para que esto se cumpla los integrandos deben ser iguales. Por lo tanto, para cualquier desplazamiento infinitesimal  $d\vec{l}$ .

$$-dV = \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Para interpretar esta expresión, se escribe  $\vec{E}$  y  $d\vec{l}$  en términos de sus componentes:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \hat{i}E_x + \hat{j}E_y + \hat{k}E_z \\ d\vec{l} &= \hat{i} dx + \hat{j} dy + \hat{k} dz\end{aligned}$$

Así, se tiene que

$$-dV = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

Por lo que se tiene:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (\text{componentes de } \vec{E} \text{ en términos de } V)$$

Esto es congruente con las unidades de campo,  $V/m$ . En términos de vectores unitario:

$$\vec{E} = -\left(\hat{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad (\vec{E} \text{ en términos de } V)$$

En notación vectorial, la siguiente operación se llama gradiente de la función  $f$ :

$$\vec{\nabla} f = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) f$$

El operador denotado por el símbolo  $\vec{\nabla}$  se llama "grad". Así, en notación vectorial,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

## Potencial y Campo de una Carga Puntual

El potencial a una distancia radial  $r$  de una carga puntual  $q$  es  $V = q/4\pi\epsilon_0 r$ .

Obtenga el campo eléctrico vectorial a partir de esta expresión de  $V$ .

Este problema utiliza la relación general entre el potencial eléctrico en función de la posición y el vector campo eléctrico. Por simetría, el campo eléctrico solo tiene una componente radial  $E_r$ .

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Por lo tanto, el campo eléctrico vectorial es

$$\vec{E} = \hat{r} E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Un enfoque alternativo es ignorar la simetría, escribir la distancia radial como  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , y tomar las derivadas de  $V$  con respecto a  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Se obtiene

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Y de manera similar:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{qy}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{qz}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E} = -\left[ \hat{i} \left( -\frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) + \hat{j} \left( -\frac{qy}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) + \hat{k} \left( -\frac{qz}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \left( \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{r} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

## Capacitores y capacitancia

Dos conductores separados por un aislante (o vacío) forman un capacitor. En la mayoría de las aplicaciones prácticas, cada conductor tiene inicialmente una carga neta cero, y los electrones son transferidos de un conductor al otro; a esta acción se le denomina cargar el capacitor. Cuando se dice que un capacitor tiene una carga  $Q$ , o que una carga  $Q$  está almacenada en el capacitor significa que el conductor con el potencial más elevado tiene carga  $+Q$  y el conductor con el potencial más bajo tiene carga  $-Q$ .



El campo eléctrico en cualquier punto de la región entre los conductores es proporcional a la magnitud de carga  $Q$  en cada conductor. Por lo tanto, la diferencia de potencial  $V_{ab}$  entre los conductores también es proporcional a  $Q$ . Si se duplica magnitud de la carga en cada conductor, también se duplican la densidad de carga en cada punto, el campo eléctrico en cada punto y la diferencia de potencial entre los conductores; sin embargo, la razón entre la carga y la diferencia de potencial no cambia. Esta razón se llama capacitancia  $C$  del capacitor:

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} \quad (\text{definición de capacitancia})$$

La unidad del SI para la capacitancia es el farad (1 F), en honor del físico inglés del siglo XIX, Michael Faraday. Un farad es igual a un coulomb por volt (1 C/V):

$$1\text{F} = 1 \text{ farad} = 1 \text{ C/V} = 1 \text{ coulomb/volt}$$

### Cálculo de la capacitancia: Capacitores con vacío

Es posible calcular la capacitancia  $C$  de un capacitor determinado obteniendo la diferencia de potencial  $V_{ab}$  entre los conductores para una magnitud de carga dada  $Q$ . Por ahora solo se considerarán capacitores con vacío; es decir, se supondrá que los conductores que constituyen el capacitor están separados por un espacio vacío.

El tipo más sencillo de capacitor consiste en dos placas conductoras paralelas, cada una con área  $A$ , separadas por una distancia  $d$  que es pequeña en comparación con sus dimensiones. Cuando las placas tienen carga, el campo eléctrico está localizado casi por completo en la región entre las placas. Este arreglo recibe el nombre de capacitor de placas paralelas. La magnitud del campo  $E$  se expresa como:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

El campo es uniforme y la distancia entre las placas es  $d$ , por lo que la diferencia de potencial (o voltaje) entre las dos placas es

$$V_{ab} = Ed = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Qd}{A}$$

A partir de esto se observa que la capacitancia  $C$  de un capacitor de placas paralelas con vacío es

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

La capacitancia depende solo de la geometría del capacitor; es directamente proporcional al área  $A$  de cada placa e inversamente proporcional a su separación  $d$ . Cuando hay materia entre las placas, sus propiedades afectan la capacitancia. En la ecuación, si  $A$  se expresa en metros cuadrados y  $d$  en metros,  $C$  está en farads. Las unidades de  $\epsilon_0$  son  $C^2/N \cdot m^2$ , por lo que se observa que

$$1 F = 1 C^2/N \cdot m = 1 C^2/J$$

Como  $1 V = 1 J/C$  (energía por unidad de carga), esto es congruente con la definición  $1 F = 1 C/V$ . Por último, las unidades de  $\epsilon_0$  se expresan como  $1 C^2/N \cdot m^2 = 1 F/m$ , por lo que

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} F/m$$

Esta relación es útil en los cálculos de la capacitancia. Un farad es una capacitancia muy grande, como lo ilustra el siguiente ejemplo. En muchas aplicaciones, las unidades más convenientes de capacitancia son el microfarad ( $1 \mu F = 10^{-6} F$ ) y el picofaradio ( $1 pF = 10^{-12} F$ ). Los capacitores comerciales están etiquetados con el valor de su capacitancia.

### Tamaño de un capacitor de 1 F

Las placas paralelas de un capacitor de  $1.0 F$  están separadas  $1.0 mm$ . ¿Cuál es el área de las placas?

Este problema utiliza la relación entre la capacitancia  $C$ , la separación  $d$  de las placas y el área  $A$  de estas para un capacitor de placas paralelas. Se despeja  $A$  de la ecuación

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{(1.0 F)(1.0 \times 10^{-3} m)}{8.85 \times 10^{-12} F/m} = 1.1 \times 10^8 m^2$$

Esto corresponde a un cuadrado ¡de alrededor de 10 km por lado! El volumen de este capacitor sería por lo menos  $Ad = 1.1 \times 10^5 m^3$ , equivalente a un cubo de 50 m por lado aproximadamente.

### Propiedades de un capacitor de placas paralelas

Las placas paralelas de un capacitor con vacío están separadas una distancia de  $5.00 \text{ mm}$  y tienen  $2.00 \text{ m}^2$  de área. Se aplica una diferencia de potencial de  $10.0 \text{ kV}$  a través del capacitor. Calcule a) la capacitancia, b) la carga en cada placa y c) la magnitud del campo eléctrico en el espacio entre ellas.

Se conocen los datos del área de las placas  $A$ , la separación  $d$  entre ellas y la diferencia de potencial  $V_{ab} = 1.00 \times 10^4 \text{ V}$  para este capacitor de placas paralelas. Las incógnitas son la capacitancia  $C$ , la carga  $Q$  en cada placa y la magnitud del campo eléctrico  $E$ .

$$\begin{aligned} C &= \epsilon_0 \frac{A}{d} = (8.85 \times 10^{12} \text{ F/m}) \frac{(2.00 \text{ m}^2)}{5.00 \times 10^{-3} \text{ m}} \\ &= 3.54 \times 10^{-9} \text{ F} = 0.00354 \mu\text{F} \end{aligned}$$

b) La carga en el capacitor es

$$\begin{aligned} Q &= CV_{ab} = (3.54 \times 10^{-9} \text{ C/V})(1.00 \times 10^4 \text{ V}) \\ &= 3.54 \times 10^{-5} \text{ C} = 35.4 \mu\text{C} \end{aligned}$$

La placa con mayor potencial tiene una carga de  $+35.4 \mu\text{C}$ , y la otra tiene una carga de  $-35.4 \mu\text{C}$ .

c) La magnitud del campo eléctrico es

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} = \frac{3.54 \times 10^{-5} \text{ C}}{(8.85 \times 10^{12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(2.00 \text{ m}^2)} \\ &= 2.00 \times 10^6 \text{ N/C} \end{aligned}$$

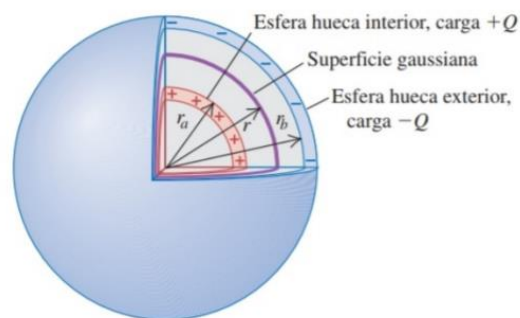
También podemos calcular  $E$  recordando que el campo eléctrico tiene igual magnitud que el gradiente de potencia. Como el campo entre las placas es uniforme,

$$E = \frac{V_{ab}}{d} = \frac{1.00 \times 10^4 \text{ V}}{5.00 \times 10^{-3} \text{ m}} = 2.00 \times 10^6 \text{ V/m}$$

(Recuerde que  $1 \text{ N/C} = 1 \text{ V/m}$ ).

## Capacitor esférico

Dos esferas huecas conductoras y concéntricas están separadas por vacío. La esfera hueca interior tiene una carga total  $+Q$  y radio exterior  $r_a$ , y la esfera hueca exterior tiene carga  $-Q$  y radio interior  $r_b$ . Determine la capacitancia de este capacitor esférico.



La capacitancia  $C$  es la magnitud  $Q$  de la carga en cualquiera de las esferas dividida entre la diferencia de potencial  $V_{ab}$  entre las mismas. Primero calcularemos  $V_{ab}$ , y luego usaremos la ecuación para calcular la capacitancia  $C = Q/V_{ab}$ .

Usando una superficie gaussiana como la mostrada en la figura, calculamos que la carga en una esfera conductora produce un campo igual a cero dentro de la esfera, de modo que la esfera exterior no contribuye al campo entre las esferas. Por lo tanto, el campo y el potencial eléctricos entre las esferas huecas son iguales que los que hay en la parte exterior de una esfera conductora de carga  $+Q$ . El potencial en cualquier punto entre las esferas es  $V = Q/4\pi\epsilon_0 r$ . Por lo tanto, el potencial del conductor interior en  $r = r_a$  con respecto al del conductor exterior (negativo) en  $r = r_b$  es:

$$\begin{aligned} V_{ab} &= V_a - V_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_b} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_b - r_a}{r_a r_b} \end{aligned}$$

Entonces, la capacitancia es:

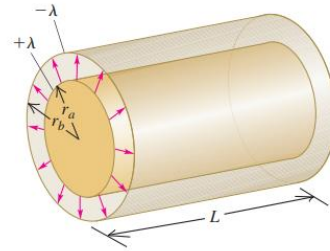
$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

Como ejemplo, si  $r_a = 9.5 \text{ cm}$  y  $r_b = 10.5 \text{ cm}$

$$\begin{aligned} C &= 4\pi(8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}) \frac{(0.095 \text{ m})(0.105 \text{ m})}{0.010 \text{ m}} \\ &= 1.1 \times 10^{-10} \text{ F} = 110 \text{ pF} \end{aligned}$$

## Capacitor cilíndrico

Dos conductores cilíndricos coaxiales y largos están separados por un vacío. El cilindro interior tiene un radio  $r_a$  y densidad de carga lineal  $+\lambda$ . El cilindro exterior tiene un radio interior  $r_b$  y densidad de carga lineal  $-\lambda$ . Obtenga la capacitancia por unidad de longitud para este capacitor.



Se usa la definición de capacitancia

$$C = Q/V_{ab}$$

El potencial  $V$  entre los cilindros no se ve afectado por la presencia del cilindro exterior con carga. Para el potencial afuera de un cilindro conductor con carga también se cumple en este ejemplo para el potencial en el espacio entre los cilindros:

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

Donde  $r_0$  es el radio finito, arbitrario, en el que  $V = 0$ . Se toma el radio  $r_0 = r_b$ , el radio de la superficie interior del cilindro exterior. Entonces, el potencial en la superficie exterior del cilindro interior (donde  $r = r_a$ ) es igual al potencial  $V_{ab}$  del cilindro interior  $a$  (positivo) con respecto al cilindro exterior  $b$  (negativo):

$$V_{ab} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)$$

Si  $\lambda$  es positiva como en la figura, entonces  $V_{ab}$  también es positivo: el cilindro interior está a un potencial más elevado que el exterior.

La carga total  $Q$  en una longitud  $L$  es  $Q = \lambda L$ , por lo que, a partir de la ecuación, la capacitancia  $C$  de una longitud  $L$  es:

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{\lambda L}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}$$

La capacitancia por unidad de longitud es:

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}$$

## Almacenamiento de energía en capacitores y energía de campo eléctrico

La energía potencial eléctrica almacenada en un capacitor cargado es exactamente igual a la cantidad de trabajo requerido para cargarlo, es decir, para separar cargas opuestas y colocarlas en conductores diferentes. Se puede obtener la energía potencial  $U$  de un capacitor, calculando el trabajo  $W$  que se requiere para cargarlo.

$$V = \frac{Q}{C}$$

Sean  $Q$  y  $V$ , la carga y la diferencia de potencial, respectivamente, en una etapa intermedia del proceso de carga; entonces,  $v = q/C$ . El trabajo  $dW$  requerido para transferir un elemento adicional de carga  $dq$  es

$$dW = v dq = \frac{q dq}{C}$$

El trabajo total  $W$  necesario para incrementar la carga  $q$  del capacitor, de cero a un valor final  $Q$

$$W = \int_0^W dW = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}$$

Esto también es igual al trabajo total realizado por el campo eléctrico sobre la carga cuando el capacitor se descarga. Si se define la energía potencial de un capacitor sin carga como cero, entonces  $W$  es igual a la energía potencial  $U$  del capacitor con carga. La carga final almacenada es  $Q = CV$ , por lo que  $U$  (que es igual a  $W$ ) se expresa como:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV \quad (\text{energía potencial almacenada en un capacitor})$$

Cuando  $Q$  está en coulombs,  $C$  en farads (coulombs por volt) y  $V$  en volts (joules por coulomb),  $U$  se expresa en joules.

## Dieléctricos

La mayoría de los capacitores tienen un material no conductor o dieléctrico entre sus placas conductoras. La colocación de un dieléctrico sólido entre las placas de un capacitor tiene tres funciones. La primera es que resuelve el problema de mantener dos hojas metálicas grandes con una separación muy pequeña sin que hagan contacto. La segunda función es que un dieléctrico incrementa al máximo posible la diferencia de potencial entre las placas del capacitor. Si cualquier material aislante se somete a un campo eléctrico suficientemente grande, experimenta una ionización parcial que permite la conducción a través de él. Este fenómeno se llama ruptura del dieléctrico. La tercera función es que la capacitancia de un capacitor de dimensiones dadas es mayor cuando entre sus placas hay un material dieléctrico en lugar de vacío.

La capacitancia original  $C_0$  está dada por  $C_0 = Q/V_0$ , y la capacitancia  $C$  con el dieléctrico presente es  $C = Q/V$ . La carga  $Q$  es la misma en ambos casos y  $V$  es menor que  $V_0$ , de donde se concluye que la capacitancia  $C$  con el dieléctrico presente es mayor que  $C_0$ . Cuando el espacio entre las placas está lleno por completo por el dieléctrico, la razón entre  $C$  y  $C_0$  se denomina constante dieléctrica del material  $K$ :

$$K = \frac{C}{C_0}$$

Con el dieléctrico presente, la diferencia de potencial para una carga  $Q$  dada se reduce en un factor de  $K$ . La constante dieléctrica  $K$  es solo un número adimensional.

### Valores de la constante dieléctrica $K$ , a 20°C

Material	$K$	Material	$K$
Vacío	1	Cloruro de polivinilo	3.18
Aire (a 1 atm)	1.00059	Plexiglás®	3.40
Aire (a 100 atm)	1.0548	Vidrio	5–10
Teflón	2.1	Neopreno	6.70
Polietileno	2.25	Germanio	16
Benceno	2.28	Glicerina	42.5
Mica	3–6	Agua	80.4
PET	3.1	Titanato de estroncio	310

Ningún dieléctrico real es un aislante perfecto.

El producto  $K\epsilon_0$  se llama permitividad del dieléctrico, y se denota con  $\epsilon$ :

$$\epsilon = K\epsilon_0 \quad (\text{definición de permitividad})$$

En términos de  $\epsilon$ , el campo eléctrico dentro del dieléctrico se expresa como

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

La capacitancia cuando hay un dieléctrico presente está dada por

$$C = KC_0 = K\epsilon_0 \frac{A}{d} = \epsilon \frac{A}{d} \quad (\text{capacitor de placas paralelas dieléctrico entre las placas})$$

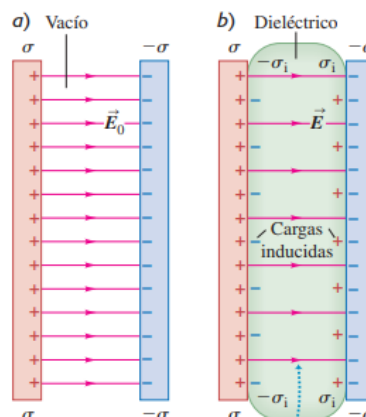
La obtención de la ecuación se repite para la densidad de energía  $u$  en un campo eléctrico para el caso en que hay un dieléctrico presente. El resultado es

$$u = \frac{1}{2}K\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \quad (\text{densidad de energía eléctrica en un dieléctrico})$$

En el espacio vacío, donde  $K = 1$ ,  $\epsilon = \epsilon_0$ . Por esta razón, en ocasiones  $\epsilon_0$  se llama "permitividad del vacío". Como  $K$  es solo un número,  $\epsilon$  y  $\epsilon_0$  tienen las mismas unidades,  $C^2/N \cdot m^2$  o F/m.

## Capacitor con y sin dieléctrico

Suponga que cada una de las placas paralelas en la figura tiene un área de  $2000 \text{ cm}^2$  ( $2.00 \times 10^{-1} \text{ m}^2$ ) y que están separadas  $1.00 \text{ cm}$  ( $1.00 \times 10^{-2} \text{ m}$ ). El capacitor está conectado a una fuente de energía y se carga a una diferencia de potencial  $V_0 = 3.00 \text{ kV}$ ; después se desconecta de la fuente de energía y se inserta entre las placas una lámina de material plástico aislante, llenando por completo el espacio entre ellas. Se observa que la diferencia de potencial disminuye a  $1.00 \text{ kV}$  y que la carga en cada placa del capacitor permanece constante. Calcule a) la capacitancia original  $C_0$ ; b) la magnitud de la carga  $Q$  en cada placa; c) la capacitancia  $C$  después de haber insertado el dieléctrico; d) la constante dieléctrica  $K$  del dieléctrico; e) la permitividad  $\epsilon$  del dieléctrico; f) la magnitud  $Q$  de la carga inducida en cada cara del dieléctrico; g) el campo eléctrico original  $E_0$  entre las placas; y h) el campo eléctrico  $E$  después de insertar el dieléctrico.



- a) Con vacío entre las placas se usa la ecuación con  $K = 1$ :

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d} = (8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}) \frac{2.00 \times 10^{-1} \text{ m}^2}{1.00 \times 10^{-2} \text{ m}}$$

$$= 1.77 \times 10^{-10} \text{ F} = 177 \text{ pF}$$

- b) A partir de la definición de capacitancia

$$Q = C_0 V_0 = (1.77 \times 10^{-10} \text{ F})(3.00 \times 10^3 \text{ V})$$

$$= 5.31 \times 10^{-7} \text{ C} = 0.531 \text{ } \mu\text{C}$$

- c) Cuando se inserta el dieléctrico,  $Q$  permanece sin cambio, pero la diferencia de potencial disminuye a  $V = 1.00 \text{ kV}$ . La nueva capacitancia es

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{5.31 \times 10^{-7} \text{ C}}{1.00 \times 10^3 \text{ V}} = 5.31 \times 10^{-10} \text{ F} = 531 \text{ pF}$$

- d) La constante dieléctrica es

$$K = \frac{C}{C_0} = \frac{5.31 \times 10^{-10} \text{ F}}{1.77 \times 10^{-10} \text{ F}} = \frac{531 \text{ pF}}{177 \text{ pF}} = 3.00$$

En forma alternativa

$$K = \frac{V_0}{V} = \frac{3000 \text{ V}}{1000 \text{ V}} = 3.00$$

e) Al sustituir el valor de  $K$  del inciso d), La permitividad es

$$\begin{aligned}\epsilon &= K\epsilon_0 = (3.00)(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2) \\ &= 2.66 \times 10^{-11} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2\end{aligned}$$

f) Multiplicando ambos lados de la ecuación por el área  $A$  de la placa, se obtiene la carga inducida  $Q_i = \sigma_i A$  en términos de la carga  $Q = \sigma A$  en cada placa:

$$\begin{aligned}Q_i &= Q \left(1 - \frac{1}{K}\right) = (5.31 \times 10^{-7} \text{ C}) \left(1 - \frac{1}{3.00}\right) \\ &= 3.54 \times 10^{-7} \text{ C}\end{aligned}$$

g) Como el campo eléctrico entre las placas es uniforme, su magnitud es la diferencia de potencial dividida entre la separación de las placas:

$$E_0 = \frac{V_0}{d} = \frac{3000 \text{ V}}{1.00 \times 10^{-2} \text{ m}} = 3.00 \times 10^5 \text{ V/m}$$

h) Después de insertar el dieléctrico

$$E_0 = \frac{V}{d} = \frac{1000 \text{ V}}{1.00 \times 10^{-2} \text{ m}} = 1.00 \times 10^5 \text{ V/m}$$

De otra forma

$$\begin{aligned}E &= \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon A} = \frac{5.31 \times 10^{-7} \text{ C}}{(2.66 \times 10^{-11} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(2.00 \times 10^{-1} \text{ m}^2)} \\ &= 1.00 \times 10^5 \text{ V/m}\end{aligned}$$

O bien,

$$\begin{aligned}E &= \frac{\sigma - \sigma_i}{\epsilon_0} = \frac{Q - Q_i}{\epsilon_0 A} \\ &= \frac{(5.31 - 3.54) \times 10^{-7} \text{ C}}{(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(2.00 \times 10^{-1} \text{ m}^2)} \\ &= 1.00 \times 10^5 \text{ V/m}\end{aligned}$$

O así,

$$E = \frac{E_0}{K} = \frac{3.00 \times 10^5 \text{ V/m}}{3.00} = 1.00 \times 10^5 \text{ V/m}$$

## Capacitores en serie y en paralelo

### Capacitores en serie

Se conectan en serie dos capacitores (uno en seguida del otro) mediante alambres conductores entre los puntos  $a$  y  $b$ . Inicialmente, ambos capacitores están sin carga. Cuando se aplica una diferencia de potencial  $V_{ab}$  positiva y constante entre los puntos  $a$  y  $b$ , los capacitores se cargan. Así, en una conexión en serie, la magnitud de la carga en todas las placas es la misma.

Las diferencias de potencial entre los puntos  $a$  y  $c$ ,  $c$  y  $b$ , y  $a$  y  $b$  pueden representarse como

$$V_{ab} = V_1 = \frac{Q}{C_1} \quad V_{cb} = V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

$$V_{ab} = V = V_1 + V_2 = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

por lo que

$$\frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

La capacitancia equivalente  $C_{eq}$  de la combinación en serie se define como la capacitancia de un solo capacitor para el que la carga  $Q$  es la misma de la combinación, cuando la diferencia de potencial  $V$  es igual. En otras palabras, la combinación se puede sustituir por un capacitor equivalente de capacitancia  $C_{eq}$ . Para un capacitor así, como el que se ilustra en la figura b,

$$C_{eq} = \frac{Q}{V} \quad \text{o bien,} \quad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{V}{Q}$$

Al combinar las ecuaciones, se obtiene

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

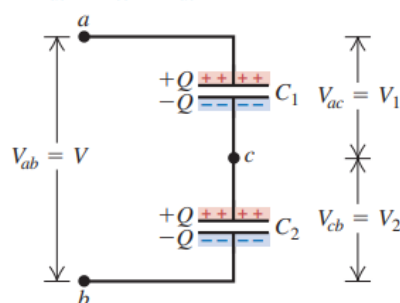
a) Dos capacitores en serie

**Capacitores en serie:**

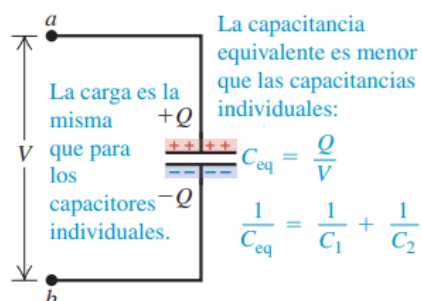
- Los capacitores tienen la misma carga  $Q$ .

- Sus diferencias de potencial se suman:

$$V_{ac} + V_{cb} = V_{ab}$$



b) Un solo capacitor equivalente



## Capacitores en paralelo

El arreglo que se muestra en la figura se llama conexión en paralelo. Dos capacitores están conectados en paralelo entre los puntos  $a$  y  $b$ . En una conexión en paralelo, la diferencia de potencial para todos los capacitores individuales es la misma, y es igual a  $V_{ab} = V$ . Sin embargo, las cargas  $Q_1$  y  $Q_2$  no son necesariamente iguales, ya que pueden llegar cargas a cada capacitor de manera independiente desde la fuente de voltaje  $V_{ab}$ . Las cargas son

$$Q_1 = C_1V \quad \text{y} \quad Q_2 = C_2V$$

La carga total  $Q$  de la combinación y por consiguiente la carga total del capacitor equivalente, es

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)V$$

por lo que

$$\frac{Q}{V} = C_1 + C_2$$

El paralelo es equivalente a un solo capacitor con la misma carga total  $Q = Q_1 + Q_2$  y diferencia de potencial  $V$  de la combinación (figura b). La capacitancia equivalente de la combinación,  $C_{eq}$ , es la misma que la capacitancia  $Q/V$  de este capacitor equivalente único. Así

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

De igual forma es posible demostrar que para cualquier número de capacitores paralelo,

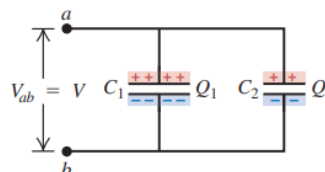
$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots \quad (\text{capacitores en paralelo})$$

La capacitancia equivalente de una combinación en paralelo es igual a la suma de las capacitancias individuales.

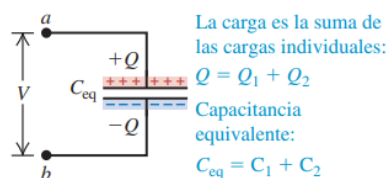
a) Dos capacitores en paralelo

### Capacitores en paralelo:

- Los capacitores tienen el mismo potencial  $V$ .
- La carga en cada capacitor depende de su capacitancia:  $Q_1 = C_1V$ ,  $Q_2 = C_2V$ .



b) Capacitor equivalente



## Red de capacitores

Obtenga la capacitancia equivalente de la red de cinco capacitores que se muestra en la figura.

Estos capacitores no están conectados todos en serie ni todos en paralelo. Sin embargo, podemos identificar partes del arreglo que sí están en serie o en paralelo.

Primero sustituir la combinación en serie de  $12\ \mu\text{F}$  y  $6\ \mu\text{F}$  por su capacitancia equivalente  $C'$ :

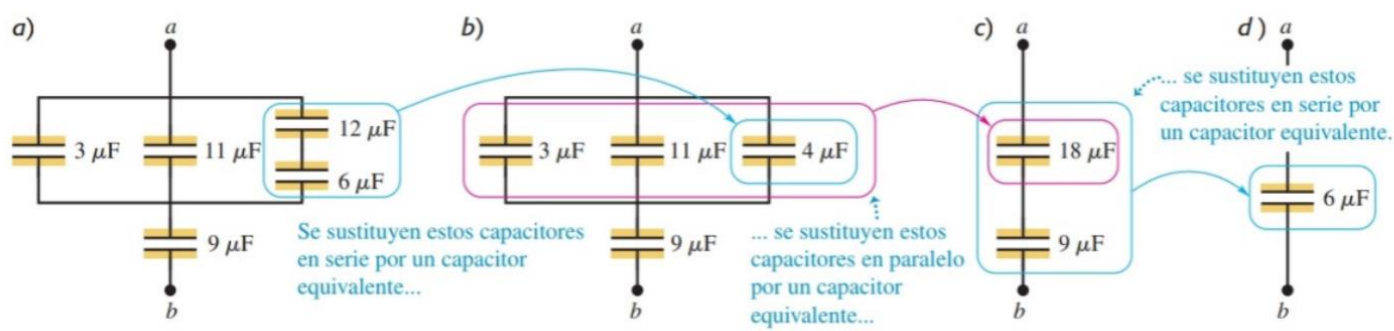
$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{12\ \mu\text{F}} + \frac{1}{6\ \mu\text{F}} \quad C' = 4\ \mu\text{F}$$

Ahora vemos tres capacitores en paralelo

$$C' = 3\ \mu\text{F} + 11\ \mu\text{F} + 4\ \mu\text{F} = 18\ \mu\text{F}$$

Esto da la combinación, la cual tiene dos capacitores en serie.

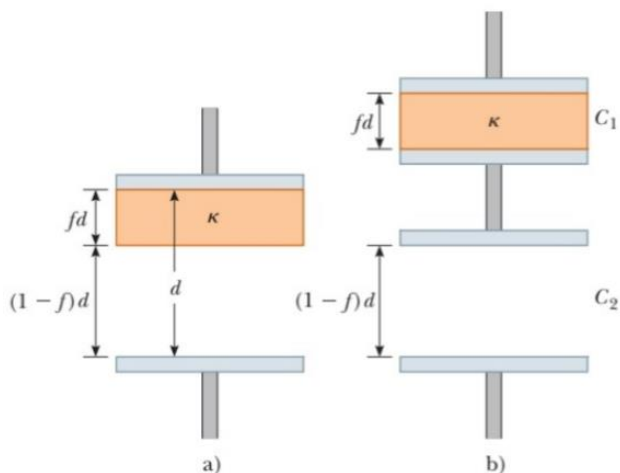
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{18\ \mu\text{F}} + \frac{1}{9\ \mu\text{F}} \quad C_{eq} = 6\ \mu\text{F}$$



### Capacitor con dielectrico parcialmente lleno

Un capacitor de placas paralelas, con una separación de placa  $d$ , tiene una capacitancia  $C_0$  en ausencia de un dieléctrico. ¿Cuál es la capacitancia cuando entre las placas se inserta una lámina de material dieléctrico con constante dieléctrica  $\kappa$  y grosor  $fd$ , donde  $f$  es una fracción entre 0 y 1?

En explicaciones anteriores de dieléctricos entre las placas de un capacitor, el dieléctrico llenaba el volumen entre las placas. En este ejemplo, sólo parte del volumen entre las placas contiene el material dieléctrico.



Un capacitor tiene una separación de placa  $fd$  y se llena con un dieléctrico; el otro tiene una separación de placa  $(1 - f)d$  y tiene aire entre sus placas.

Evalúe las dos capacitancias a partir de la ecuación.

$$C_1 = \frac{\kappa\epsilon_0 A}{fd} \quad y \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{(1-f)d}$$

Encuentre la capacitancia equivalente  $C$  para dos capacitores combinados en serie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{fd}{\kappa\epsilon_0 A} + \frac{(1-f)d}{\epsilon_0 A} \\ \frac{1}{C} &= \frac{fd}{\kappa\epsilon_0 A} + \frac{\kappa(1-f)d}{\kappa\epsilon_0 A} = \frac{f + \kappa(1-f)}{\kappa} \frac{d}{\epsilon_0 A} \\ C &= \frac{\kappa}{f + \kappa(1-f)} \frac{\epsilon_0 A}{d} \\ &= \frac{\kappa}{f + \kappa(1-f)} C_0 \end{aligned}$$