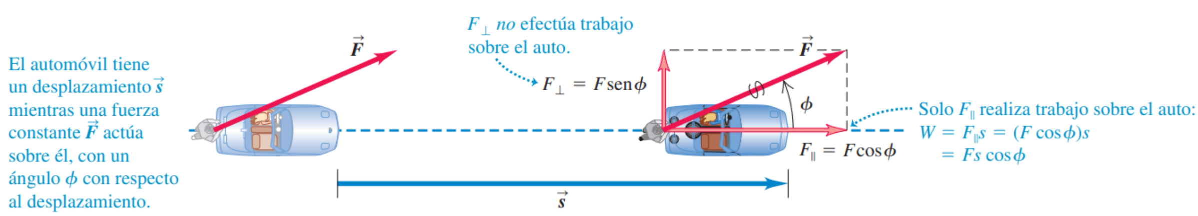
Considere un cuerpo que experimenta un desplazamiento de magnitud s en línea recta. Mientas el cuerpo se mueve, una fuerza $\vec{F}$ actúa sobre él en la dirección del desplazamiento $\vec{s}$. Definimos el **Trabajo W** realizado por esta fuerza constante en dichas condiciones como el producto de la magnitud F de la fuerza por la magnitud s del desplazamiento:

$$W = Fs \quad \text{(Fuerza constante en dirección del desplazamiento rectilíneo)}$$

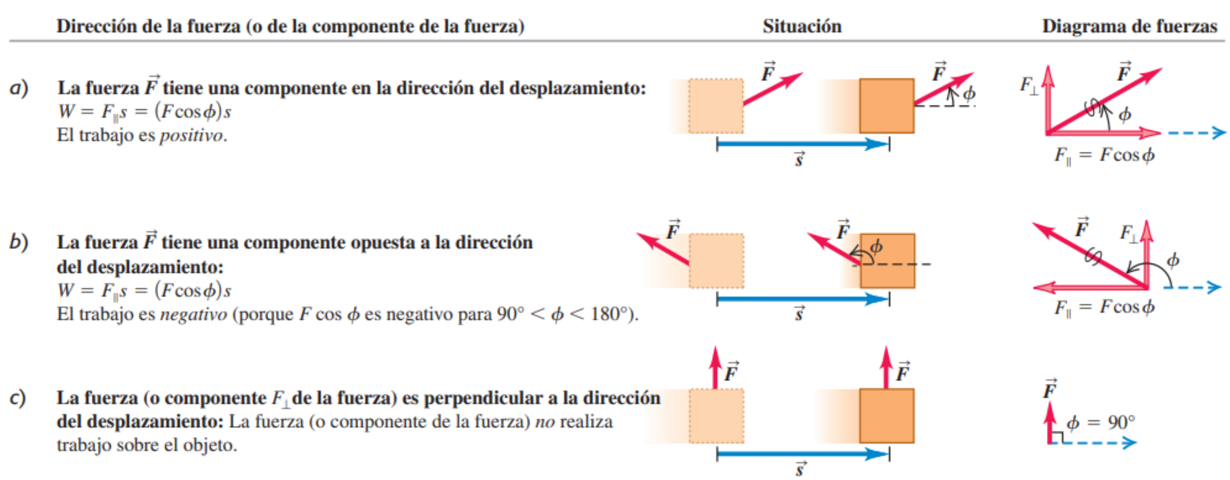
El trabajo efectuado sobre el cuerpo es mayor si la fuerza F o el desplazamiento s son mayores. La unidad de trabajo en el SI es el **joule** (que se abrevia J), vemos que, en cualquiera de los sistemas de unidades, la unidad de trabajo es la unidad de fuerza multiplicada por la unidad de distancia. En el SI la unidad de fuerza es el newton y la unidad de distancia es el metro, así que 1 Joule equivale a un *newton-metro* (Nm):

$$1 \text{ joule} = (1 \text{ newton})\,(1 \text{ metro});\ J = N \cdot m$$

El trabajo realizado por una fuerza constante que actúa con un ángulo relativo al desplazamiento.



Una fuerza constante $\vec{F}$ puede hacer trabajo positivo, negativo o cero, dependiendo del ángulo entre $\vec{F}$ y el desplazamiento $\vec{s}$



Concluimos que cuando una partícula se desplaza, se acelera si $W_{tot} > 0$, se frena si $W_{tot} < 0$ y mantiene su rapidez si $W_{tot} = 0$. Considere una partícula con masa m que se mueve en el eje x bajo la acción de una fuerza neta constante de magnitud F dirigida a lo largo del eje $+x$. La aceleración de la partícula es constante y está dada por la segunda ley de Newton, $F = ma_x$. Suponga que la rapidez cambia de $v_1\ a\ v_2$ mientras la partícula experimenta un desplazamiento $s = x_2 - x_1$ desde el punto $\boldsymbol{x_1}\ al\ \boldsymbol{x_2}$. Usando una ecuación de aceleración constante, sustituyendo $\boldsymbol{v_{0x}}$ por $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_x}$ por $\boldsymbol{v_2}$ y $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})$ por *s,* tenemos:

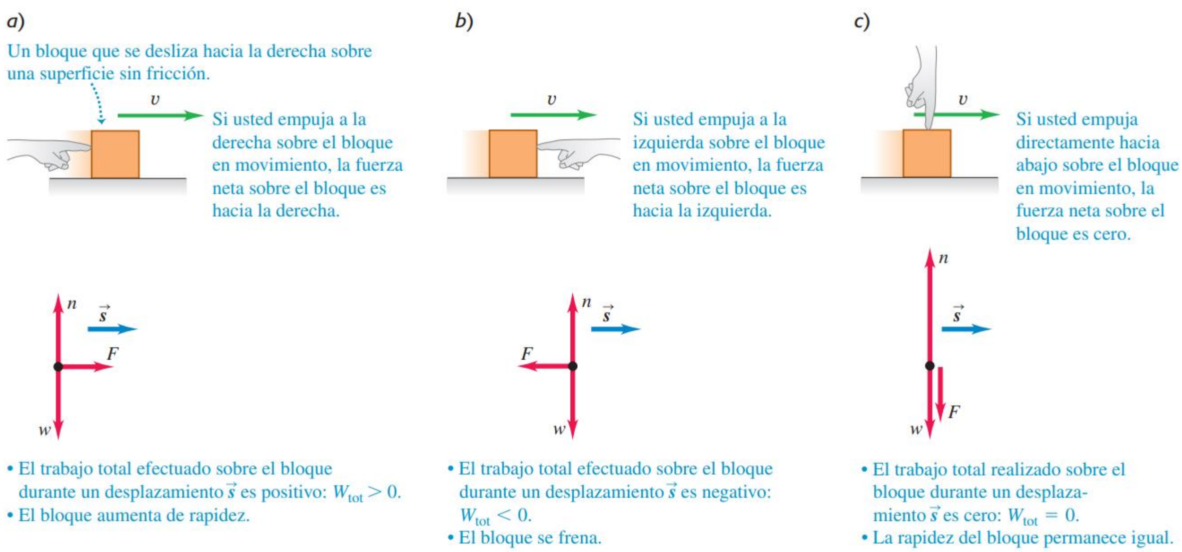
$$v_2{}^2 = v_1{}^2 + 2a_x{}^s \rightarrow a_x = \frac{v_2{}^2 - v_1{}^2}{2s}$$

Al multiplicar esta ecuación por $\boldsymbol{m}$ e igualar a $\boldsymbol{ma_x}$ a la fuerza neta $\boldsymbol{F}$, obtenemos:

$$F = \ ma_x = m\frac{v_2{}^2 - v_1{}^2}{2s}$$

$$Fs = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

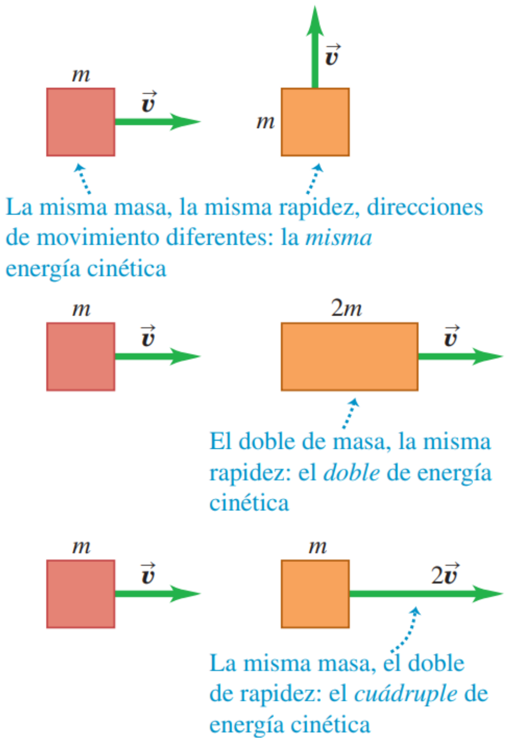
Relación entre el trabajo total efectuado sobre un cuerpo y el cambio en la rapidez del cuerpo.



El producto $\boldsymbol{Fs}$ es el trabajo efectuado por la fuerza neta $\boldsymbol{F}$ y, por lo tanto, es igual al trabajo total $\boldsymbol{W_{tot}}$ realizado por las fuerzas que actúan sobre la partícula. Llamamos a la cantidad $\boldsymbol{\frac{1}{2}mv^2}$ la **energía cinética de $\boldsymbol{K}$** de la partícula

$$k = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{(definición de energía cinética)}$$

Comparación de la energía cinética $\boldsymbol{k = \frac{1}{2}mv^2}$ de diferentes cuerpos



Al igual que el trabajo, la energía cinética es una cantidad escalar; solo depende de la masa y la rapidez de la partícula, no de la dirección del movimiento. La energía cinética nunca puede ser negativa, y es cero solo si la partícula está en reposo.

Ahora podemos interpretar la ecuación en términos de trabajo y energía cinética. El primer término del miembro derecho de la ecuación es $k_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$, y la diferencia entre estos términos es el cambio de la energía cinética. Entonces, la ecuación nos dice que:

El trabajo efectuado por la fuerza neta sobre una partícula es igual al cambio de energía cinética de la partícula:

$$W_{tot} = k_2 - k_1 = \Delta K$$

(teorema trabajo-energía)

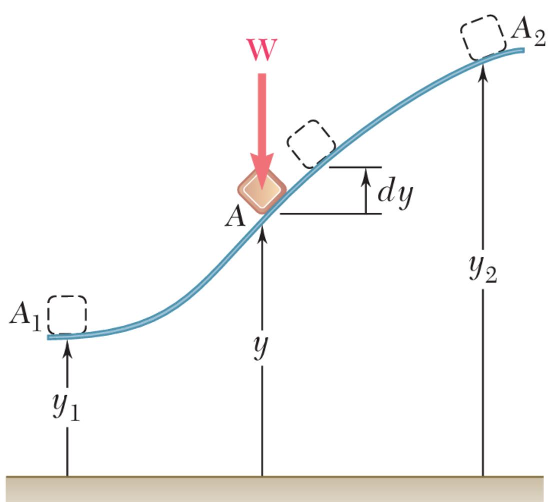
Teorema Trabajo-Energía para Movimiento

Podemos generalizar más nuestra definición de trabajo para incluir una fuerza que varía de dirección y magnitud, con un desplazamiento a lo largo de una trayectoria curva. Dividimos la curva entre esos puntos en muchos desplazamientos vectoriales infinitesimales, llamado a cada uno de estos $d\vec{l}$. Cada $d\vec{l}$ es tangente a la trayectoria en su ubicación. Sea $\vec{F}$ la fuerza en este punto cualquiera de la trayectoria, sea ϕ el ángulo entre $\vec{F}$ y $d\vec{l}$ en ese punto. De manera que el pequeño elemento de trabajo dW realizado sobre la partícula durante el desplazamiento $d\vec{l}$ puede escribirse como

$$dW = Fcos\phi dl = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Donde $Fcos\phi$ es la componente de $\vec{F}$ en la dirección paralela a $d\vec{l}$. El trabajo total realizado por $\vec{F}$ sobre la partícula a moverse P_1 a P_2 es, entonces:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} Fcos\phi dl = \int_{P_1}^{P_2} F_{\parallel} dl = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} \qquad \textit{(Trabajo efectuado en una trayectoria curva)}$$



Trabajo realizado por la fuerza de gravedad

El trabajo del peso **W** de un cuerpo, esto es, de la fuerza de gravedad. Al elegir el eje y hacia arriba, se tiene $F_x = 0, F_y = -W$ y $F_z = 0$, y se escribe

$$dU = -Wdy$$

$$U_{1\to 2} = -\int_{y_1}^{y_2} Wdy = Wy_1 - Wy_2$$

$$U_{1\to 2} = -W(y_2 - y_1) = -W\ \Delta y$$

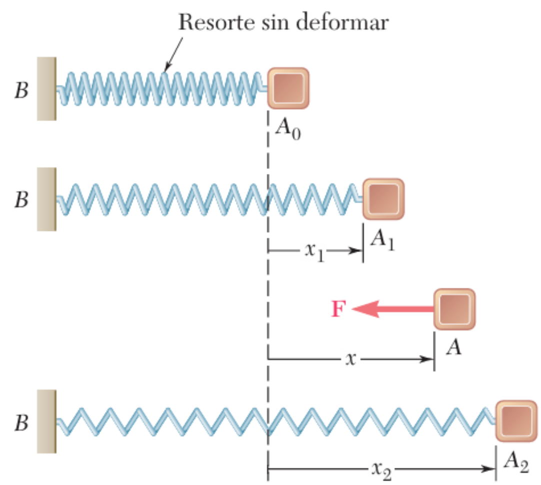
Donde Δy es el desplazamiento vertical de A_1 a A_2. En consecuencia, el trabajo del peso **W** es igual *al producto de W y el desplazamiento vertical del centro de gravedad del cuerpo.* El trabajo es positivo $\Delta y < 0$, esto es, *cuando el cuerpo se mueve hacia abajo*.

Trabajo realizado por la fuerza que ejerce un resorte

Considere un cuerpo A unido a un punto fijo B por medio de un resorte; se supone que este último no está deformado cuando el cuerpo se encuentra en A_0. La evidencia experimental muestra que la magnitud de la fuerza **F** ejercida por el resorte sobre un cuerpo A es proporcional a la deformación x del resorte medida a partir de la posición A_0. Se tiene

$$F = kx$$

Donde k es la *constante del resorte*, expresada en N/m o kN/m si se usan unidades SI o en lb/ft o lb/in.



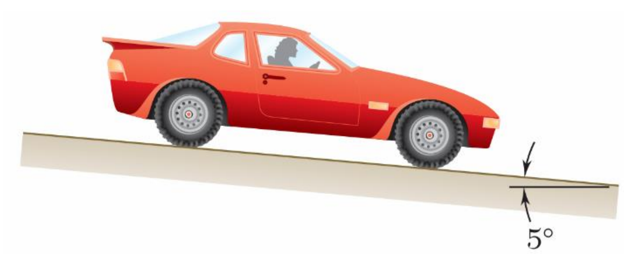
El trabajo de la fuerza **F** ejercido por el resorte durante un desplazamiento finito del cuerpo de $A_1(x = x_1)$ a $A_2(x = x_2)$ se obtiene al escribir

$$dU = -Fdx = -kx\,dx$$

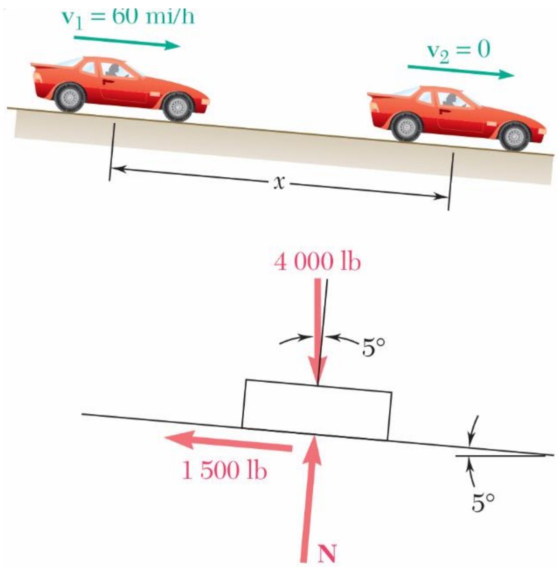
$$U_{1\to2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$$

Debe tenerse cuidado al expresar k y x en unidades consistentes. Adviértase que el trabajo de la fuerza **F** ejercida por el resorte sobre el cuerpo es *positivo* cuando $x_2 < x_1$, esto es, *cuando el resorte está regresando a la posición deformada.*

Ejemplo #1



Un automóvil que pesa 4 000 lb desciende por una pendiente de 5° de inclinación a una rapidez de 60mi/h cuando se aplican los frenos, lo que provoca una fuerza de frenado total constante (aplicada por el camino sobre las llantas) de 1 500 lb. Determine la distancia que recorre el automóvil antes de detenerse.



Energía cinética

Posición 1:

$$v_1 = \left(60\,\frac{mi}{h}\right)\left(\frac{580ft}{1\,mi}\right)\left(\frac{1\,h}{3600s}\right) = \frac{88ft}{s}$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\,mv_1^2 = \frac{1}{2}(4000/32.2)(88)^2 = 481000\;ft\cdot l$$

Posición 2:

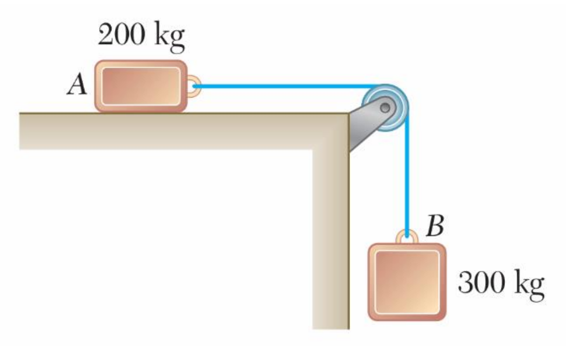
$$U_{1\to2} = -1500x + (4000sen5°)x = -1151x$$

Trabajo del principio y la energía

$$T_1 + U_{1\to2} = T_2$$

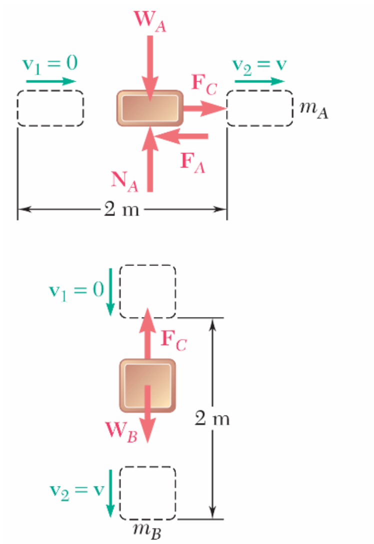
$$481000 - 1151x = 0$$

$$x = 481\;ft$$



Ejemplo #2

Dos bloques están unidos por un cable inextensible en la forma que se muestra. Si el sistema se suelta desde el reposo, determina la velocidad del bloque A después de que éste se ha movido 2 m. Suponga que el coeficiente de fricción cinética entre el bloque A y el plano es $\mu_k = 0.25$ y que la polea no tiene peso ni fricción.



Trabajo y energía del bloque A: la fuerza de fricción $\boldsymbol{F_A}$ y la fuerza ejercida por el cable mediante $\boldsymbol{F_C}$, se escribe

$$m_A = 200\ kg \qquad W_A = (200\ kg)(9.81 m/s^2) = 1962\ N$$

$$F_A = \mu_k N_A = \mu_k W_A = 0.25(1962\ N) = 490\ N$$

$$T_1 + U_{1\to2} = T_2 \qquad 0 + F_C(2\ m) - F_A(2\ m) = \frac{1}{2} m_A v^2$$

$$F_C(2\ m) - (490\ N)(2\ m) = \frac{1}{2}(200\ kg)v^2 \tag{1}$$

Trabajo y energía del bloque B

$$m_B = 300 kg \qquad W_B = (300\ kg)(9.81 m/s^2) = 2940\ N$$

$$0 + W_B(2\ m) - F_C(2\ m) = \frac{1}{2} m_B v^2$$

$$(2940\ N)(2\ m) - F_C(2\ m) = \frac{1}{2}(300\ kg)v^2 \tag{2}$$

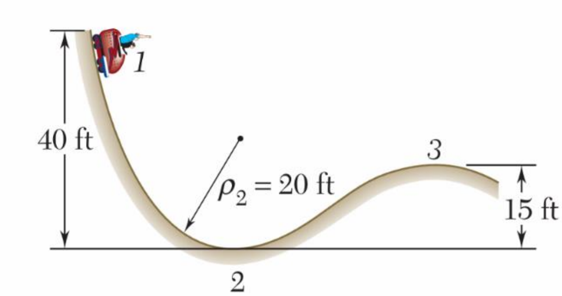
Al sumar los miembros izquierdo y derecho de (1) y (2), se observa que se cancela el trabajo de las fuerzas ejercidas por el cable sobre la figura A y B:

$$T_1 + U_{1\to2} = T_2$$

$$(2940\ N)(2\ m) - (490\ N)(2\ m) = \frac{1}{2}(200\ kg + 300\ kg)v^2$$

$$4900\ J = \frac{1}{2}(500\ kg)v^2 \qquad \boldsymbol{v = 4.43\ m/s}$$

Ejemplo #3



Un vehículo de 2000 lb parte del reposo en el punto 1 y desciende sin fricción por la pista que se indica a) Determine la fuerza que ejerce la pista sobre el vehículo en el punto 2, donde el radio de curvatura de la pista es de 20 ft. b) Determine el valor mínimo seguro del radio de curvatura en el punto 3.

a) Fuerza ejercida por la pista en el punto 2, se utiliza el principio del trabajo y la energía para determinar la velocidad del vehículo cuando éste pasa por el punto 2.

Energía cinética: $T_1 = 0$ $\qquad T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}\frac{W}{g}\, v_2^2$

Trabajo: La única fuerza que efectúa trabajo es el peso **W**. Puesto que el desplazamiento vertical desde el punto *1* hasta el punto *2* es de 40 ft hacia abajo, el trabajo del peso es

$$U_{1\to2} = +W(40\,ft)$$

Principio del trabajo y la energía

$$T_1 + U_{1\to2} = T_2 \qquad 0 + W(40\,ft) = \frac{1}{2}\frac{W}{g}\, v_2^2$$

$$v_2^2 = 80g = 80(32.2) \qquad v_2 = 50.8\,ft/s$$

Segunda ley de Newton en el punto 2: La aceleración a_n del vehículo en el punto 2 tiene una magnitud $a_n = v_2^2/\rho$ y está dirigida hacia arriba. Puesto que en las fuerzas externas que actúan sobre el vehículo son **W** y **N**, se escribe

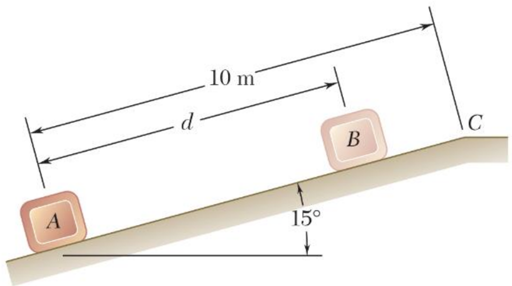
$$+\uparrow \Sigma F_n = ma_n: \qquad -W + N = ma_n$$

$$= \frac{W}{g}\frac{v_2^2}{\rho}$$

$$= \frac{W}{g}\frac{80g}{20}$$

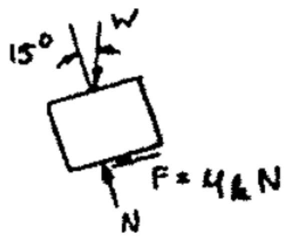
$$N = 5W \qquad N = 10000\,lb\ \uparrow$$

Ejemplo #4



Un paquete se proyecta 10 m hacia arriba sobre un plano inclinado de 15° de modo que alcanza la parte superior del plano con una velocidad cero. Si se sabe que el coeficiente de fricción cinética entre el paquete y el plano es de 0.12, determine a) la velocidad inicial del paquete en A, b) la velocidad del paquete cuando éste regrese a su posición original.

a) En el plano, desde A hasta C



$$T_A = \frac{1}{2}mv_A^2, \quad T_C = 0$$
$$U_{A-C} = (-W\ sen\ 15° - F)(10\ m)$$

$$\nwarrow \Sigma F = 0: \quad N - W\ cos 15° = 0$$
$$N = W cos 15°$$
$$F = \mu_k N = 0.12W\ cos 15°$$

$$U_{A-C} = -W(sen\ 15° + 0.12\ cos 15°)(10\ m)$$
$$T_A + U_{A-C} = T_C \quad \frac{1}{2}\frac{W}{g}v_A^2 - W(\ sen\ 15° + 0.12 cos 15°)(10\ m)$$
$$v_A^2 = (2)(9.81)(\ sen\ 15° + 0.12 cos 15°)(10\ m)$$

$$v_A^2 = 73.5$$
$$\boldsymbol{v_A} = \mathbf{8.57 m/s} \measuredangle \uparrow \mathbf{15°}$$

b) **Bajo el plano, desde C hasta A**

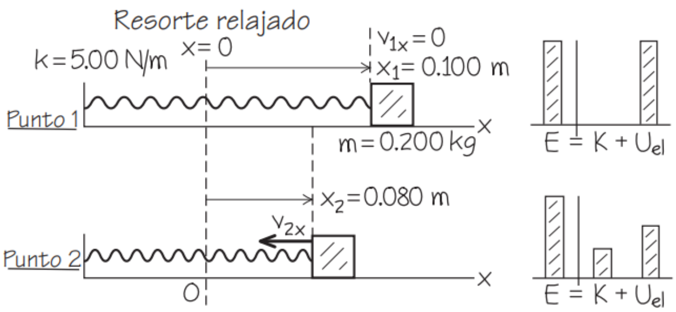
$$T_C = 0 \quad T_A = \frac{1}{2}mv_A^2 \quad U_{A-C} = (W\ sen\ 15° - F)(10\ m)$$

(F en la dirección opuesta)

$$T_C - U_{A-C} = T_A \quad 0 + W(\ sen\ 15° - 0.12 cos 15°)(10\ m) = \frac{1}{2}mv_A^2$$
$$v_A^2 = (2)(9.81)(\ sen\ 15° - 0.12\ cos 15°)(10\ m)$$

$$v_A^2 = 28.039$$
$$\boldsymbol{v_A} = \mathbf{5.30 m/s} \measuredangle \downarrow \mathbf{15°}$$

Movimiento con energía potencial elástica



Un deslizador de masa $m = 0.200\,kg$ descansa en un riel horizontal de aire, sin fricción, conectado a un resorte con una constante de fuerza $k = \frac{5.00N}{m}$. Se tira del deslizador, estirando el resorte $0.100\,m$, y luego lo libera partiendo del reposo. El deslizador regresa a su posición de equilibrio ($x = 0$). ¿Qué velocidad tiene cuando $x = 0.080m$?

Al comenzar a moverse el deslizador, la energía potencial elástica se convierte en energía cinética. El deslizador permanece a la misma altura durante todo el movimiento, así que la energía gravitacional no es un factor importante y $U = \frac{1}{2}kx^2$. La figura muestra el diagrama. Solo la fuerza del resorte realiza el trabajo sobre el deslizador. Designamos el punto 1 como el lugar donde se suelta el deslizador (es decir, $x_1 = 0.100$), en tanto que el punto 2 se ubica en $x_2 = 0.080\,m$. Conocemos la velocidad $v_{1x} = 0$; la incógnita es v_{2x}.

Las energías son:

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_{1x}^2 = \frac{1}{2}(0.200\,kg)(0)^2 = 0$$

$$U_1 = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}(5.00\text{N/m})(0.100m)^2 = 0.0250\,J$$

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_{2x}^2$$

$$U_2 = \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}(5.00\text{N/m})(0.080\,m)^2 = 0.0160\,J$$

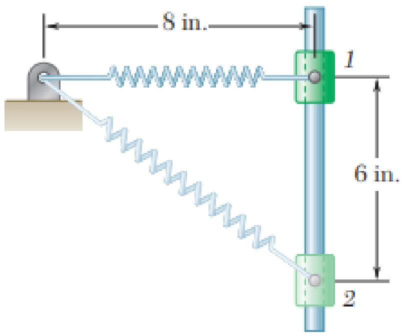
Despejamos k_2 y luego calcular v_{2x}:

$$k_2 = k_1 + U_1 - U_2 = 0 + 0.0250\,J - 0.0160J = 0.0090J$$

$$v_{2x} = \pm\sqrt{\frac{2K_2}{m}} = \pm\sqrt{\frac{2(0.0090J)}{0.200\,kg}} = \pm 0.30\,m/s$$

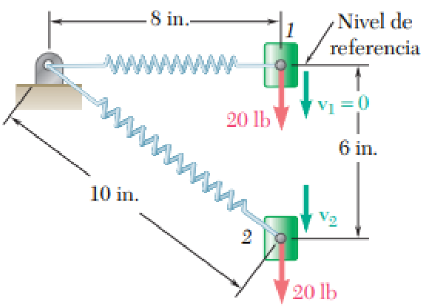
Elegimos la raíz negativa porque el deslizador se está moviendo en la dirección $-x$; la respuesta es $v_{2x} = -0.30m/s$.

Finalmente, el resorte invertirá el movimiento del deslizador, empujándolo en la dirección $+x$. La solución $v_{2x} = \pm 0.30\,m/s$ nos dice que cuando el deslizador pase por $x = 0.080\,m$ en su viaje de retorno, su rapidez será de 0.30 m/s, la misma que cuando pasó por este punto moviéndose hacia la izquierda.



Problema #1

Un collarín de 20 lb desliza sin fricción a lo largo de una varilla vertical en la forma que se indica. El resorte unido al collarín tiene una longitud no deformada de 4 in. y una constante de 3 lb/in. Si el collarín se suelta desde el reposo en la posición 1, determine su velocidad después de que se ha movido 6 in. hasta la posición 2.



Posición 1: Energía potencial. El alargamiento del resorte es:

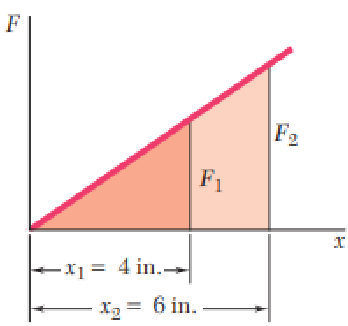
$$x_1 = 8\,in - 4\,in = 4\,in.$$

$$V_e = \tfrac{1}{2}kx_1^2 = \tfrac{1}{2}(3\,lb/in.)(4\,in.)^2 = 24\,in \cdot lb$$

Al elegir el nivel de referencia como se muestra, se tiene

$$V_g = 0$$

$$por\ lo\ tanto, V_1 = V_e + V_g = 24\,in \cdot lb = 2 ft \cdot lb$$



Energía cinética. Puesto que la velocidad en la posición 1 es cero, $T_1 = 0.$

Posición 2: Energía potencial. El alargamiento del resorte $x_2 = 10\,in - 4\,in = 6\,in.$

$$V_e = \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}(3\,lb/in.)(6\,in.)^2 = 54\,in \cdot lb$$

$$V_g = Wy = (20\,lb)(-6in) = -120\,in \cdot lb$$

Por lo tanto,

$$V_2 = V_e + V_g = 54 - 120 = -66\,in \cdot lb = -5.5\,ft \cdot lb$$

Energía cinética. $T_2 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 = \tfrac{1}{2}\tfrac{20}{32.2}\,v_2^2 = 0.311v_2^2$

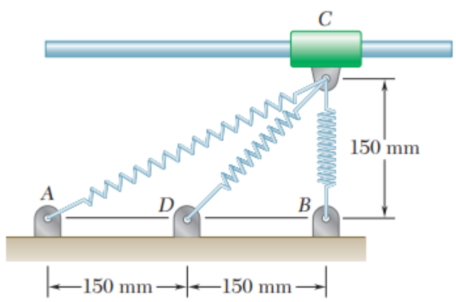
Conservación de la energía. Al aplicar el principio de la conservación de la energía entre las posiciones 1 y 2, se escribe

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + 2\ \text{ft} \cdot \text{lb.} = 0.311v_2^2 - 5.5\,ft \cdot lb$$

$$v_2 = \pm 4.91\,ft/s$$

$$v_2 = 4.91\,ft/s \downarrow$$

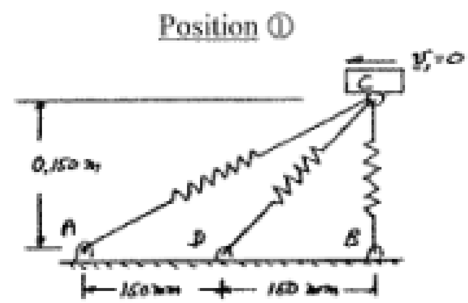


Problema #2

Un collarín C de 1.2 kg puede deslizarse sin fricción a lo largo de una varilla horizontal. Está un ido a tres resortes, cada uno de constante k= 400 N/m y con una longitud no deformada de 150 mm. Si se sabe que el collarín se suelta desde el reposo en la posición mostrada, determine la rapidez máxima que alcanzará con el movimiento resultante.

La velocidad máxima ocurre en E, donde el collar pasa por la posición de equilibrio.

$$T_1 = 0$$



Nota: La longitud sin deformar de los resortes es 0.150m

Resorte AC: $L = 335.4\,mm,\ \Delta x = 0.3354 - 0.150 = 0.1854m$

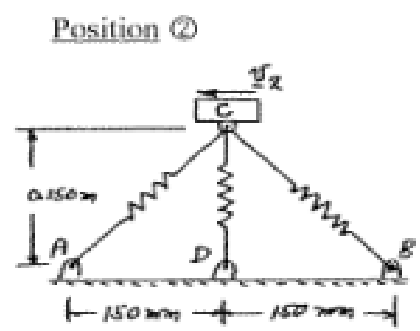
Resorte CD: $L = 212\,mm,\ \Delta x = 0.2121 - 0.150 = 0.0621m$

Resorte BD: $L = 150\,mm,\ \ \Delta x = 0$

Energía Potencial: ($k = 400N/m$ para cada resorte)

$$V_1 = \sum \tfrac{1}{2} k\Delta x^2 = \tfrac{1}{2} k \sum \Delta x^2 = \tfrac{1}{2}(400\ N/m)[(0.1854m)^2 + (0.0621m)^2 + 0] = 7.6467\,J$$

Con $m = 1.2\,kg$; $\qquad T_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2}(1.2\,kg)v_2^2$



Resorte AC: $L = 212.1mm,\ \ \Delta = 0.2121 - 0.150 = 0.0621m$

Resorte CD: $L = 150\,mm,\ \Delta x = 0$

Resorte BC: $L = 212.1mm$

$$\Delta x = 0.2121 - 0.150 = 0.0621m$$

Energía Potencial: $\qquad V_2 = \sum \frac{1}{2} k\Delta^2 = \frac{1}{2} k \sum \Delta^2$

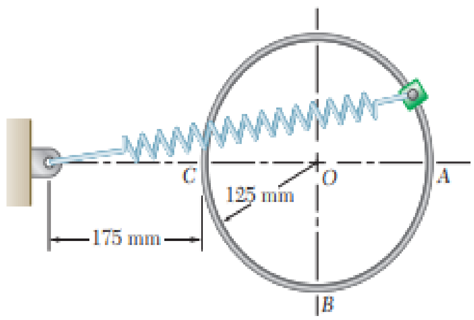
$$= \frac{1}{2}(400\ N/m)[(0.0621\ m)^2 + 0 + (0.0621m)^2] = 1.5426\,J$$

Conservación de energía: $\qquad T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$$0 + 7.6467\,J = \tfrac{1}{2}(1.2)v_2^2 + 1.5426\,J$$

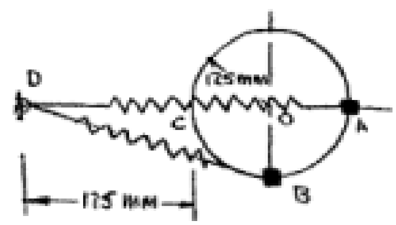
$$v_2^2 = 10.1736 = 3.19\,m/s$$

Problema #3



Un collarín de 1.5 kg está unido a un resorte y se desliza sin fricción a lo largo de una varilla circular en un plano horizontal. El resorte tiene una longitud no deformada de 150 mm y una constante k = 400 N/m. Si se sabe que el collarín está en equilibrio en A y se le da un ligero impulso para ponerlo en movimiento, determine la velocidad del collarín a) cuando pasa por B, b) cuando pasa por C.

(a) Velocidad en B



$$V_A = 0 \qquad T_A = 0$$

$$\Delta L_{AD} = L_{AD} - L_O$$

$$\Delta L_{AD} = 425\,mm - 150\,mm$$

$$\Delta L_{AD} = 275\,mm = 0.275\,m$$

$$V_A = \tfrac{1}{2}k(\Delta L_{AD})^2 = \tfrac{1}{2}(400N/m)(0.275\,m)^2 = 15.125\,J$$

$$T_B = \frac{1}{2}mv_B^2 = (\frac{1.5}{2}kg)(v_B^2) = (0.75)v_B^2$$

$$L_{BD} = (300^2mm + 125^2mm)^{\frac{1}{2}} = 325\,mm$$

$$\Delta L_{BD} = L_{BD} - L_O$$

$$\Delta L_{BD} = 325\,mm - 150\,mm$$

$$\Delta L_{BD} = 175\,mm = 0.175\,m$$

$$V_B = \frac{1}{2}k(\Delta L_{BD})^2 = \frac{1}{2}(400N/m)(0.175\,m)^2 = 6.125\,J$$

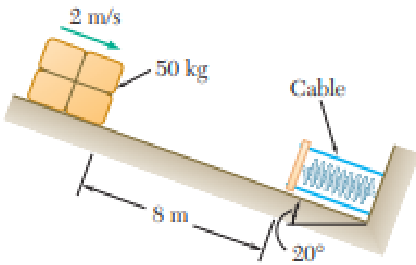
$$T_A + V_A = T_B + V_B$$

$$0 + 15.125 = 0.75v_B^2 + 6.125$$

$$v_B^2 = \frac{(15.125 - 6.125)}{(0.75)} = 12.00\,m^2/s^2$$

$$V_B = 3.46\,m/s$$

Problema #4



Un resorte se usa para detener un paquete de 50 kg, el cual se mueve hacia abajo sobre una pendiente de 20°. El resorte tiene una constante k = 30 kN/m y se sostiene mediante cables, de manera que en un inicio está comprimido 50 mm. Si se sabe que la velocidad del paquete es de 2 m/s cuando se encuentra a 8 m del resorte y si se desprecia la fricción, determine la deformación adicional máxima del resorte para llevar el paquete al reposo.

Sea la posición 1 la posición inicial a $8m$ del extremo del resorte cuando este comprimido $50mm$ por el cable. Sea la posición 2 la posición de máxima compresión. Sea x la compresión adicional del resorte. Utilice el principio de conservación de la energía. $T_1+V_1=T_2+V_2$

Posición 1: $$T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(50)(2)^2 = 100\,J$$

$$V_{1g} = mgh_1 = (50)(9.81)(8\,sen\,20°) = 1342.09\,J$$
$$V_{1e} = \frac{1}{2}ke_1^2 = \frac{1}{2}(30x10^3)(0.050)^2 = 37.5\,J$$

Posición 2: $$T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = 0 \quad ya\ que \quad V_2 = 0$$
$$V_{2g} = mgh_2 = (50)(9.81)(-x\,sen\,20°) = -167.76\,x$$

$$V_{2e} = \frac{1}{2}ke_2^2 = \frac{1}{2}(30\times10^3)(0.05+x)^2 = 37.5 + 1500x + 15{,}000\,x^2$$

Principio de conservación de energía.

$$100 + 1342.09 + 37.5 = -167.61x + 37.5 + 1500x + 15{,}000\,x^2$$
$$15{,}000x^2 + 1332.24x - 1442.09 = 0$$

Resolviendo para x,

$$x = 0.26882 \quad \text{y} \quad -0.35764$$

$$\boldsymbol{x = 0.269\,m}$$

Impulso

El impulso lineal, o simplemente impulso, define como el producto de la fuerza neta aplicada por el intervalo de tiempo durante el cual esta actúa. Al descomponer F en componentes rectangulares:

$$\text{Imp}_{1\to2} = \int_{t_1}^{t_2} \text{F dt} = \text{i} \int_{t_1}^{t_2} F_x \text{ dt} + \text{j} \int_{t_1}^{t_2} F_y \text{ dt} + \text{k} \int_{t_1}^{t_2} F_z \text{ dt}$$

Se advierte que las componentes del impulso de la fuerza **F** son, respectivamente, iguales a las áreas bajo las curvas que se obtienen al graficar las componentes F_x, F_y y F_z en función de t.

En el caso de una fuerza **F** de magnitud y dirección constantes, el impulso se representa mediante el vector **F**$(t_2 - t_1)$, que tiene la misma dirección que **F**. Si se usan unidades del SI, la magnitud del impulso de una fuerza se expresa en N · s. Sin embargo, al recordar la definición del newton, se tiene N · s = (kg · m/s^2) · s = kg · m/s

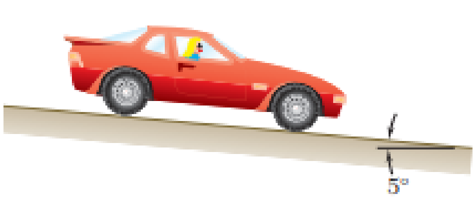
Movimiento impulsivo

Una fuerza que actúa sobre una partícula durante un breve intervalo que es lo suficientemente grande para producir un cambio definido en la cantidad de movimiento se conoce como fuerza impulsiva y el movimiento resultante se denomina movimiento impulsivo. Cuando actúan fuerzas impulsivas sobre una partícula, la ecuación se convierte en

$$\text{mv}_1 + \sum \text{F}\, \Delta t = m\text{v}_2$$

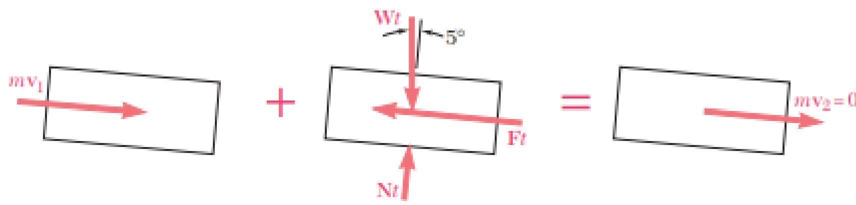
Este se define como el principio de impulso y cantidad de movimiento.

Problema #1



Un automóvil que pesa 4 000 lb desciende por una pendiente de 5° a una rapidez de 60 mi/h cuando se aplican los frenos, lo que provoca una fuerza de frenado total constante (aplicada por el camino sobre los neumáticos) de 1 500 lb. Determine el tiempo que se requiere para que el automóvil se detenga.

Se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento. Puesto que cada una de las fuerzas es constante en magnitud y dirección, cada impulso correspondiente es igual al producto de la fuerza y al intervalo t.



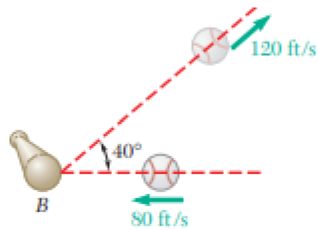
$$\mathrm{m}\mathbf{v}_1 + \sum \boldsymbol{Imp}_{1\rightarrow 2} = m\mathbf{v}_2$$

$$+\searrow \ componentes: m\boldsymbol{v}_1 + (W sen\, 5°)t - Ft = 0$$

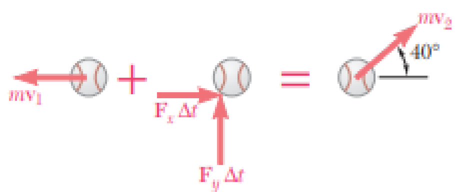
$$\left(\frac{4000}{32.2}\right)(88\, ft/s) + (4000\, sen\, 5°)t - 1500t = 0$$

$$t = 9.49s$$

Problema #2



Una pelota de béisbol de 4 oz se lanza con una velocidad de 80 ft/s hacia un bateador. Después de que la bola es golpeada por el bate B, adquiere una velocidad de 120 ft/s en la dirección que se indica. Si el bate y la bola están en contacto 0.015 s, determine la fuerza impulsiva promedio ejercida sobre la pelota durante el impacto.



Se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento a la pelota. Puesto que el peso de esta misma es una fuerza no impulsiva, puede ignorarse.

$$mv_1 + \sum Imp_{1\to 2} = mv_2$$

$\overset{+}{\rightarrow}$ componentes x: $\quad -mv_1 + F_x\,\Delta t = mv_2 \cos 40°$

$$-\frac{\frac{4}{16}}{32.2}(80\ ft/s) + F_x(0.015s) = \frac{\frac{4}{16}}{32.2}(120\ ft/s)\cos 40°$$

$$F_x = +89.0\ lb$$

$+\uparrow$ componentes y: $\quad 0 + F_y\,\Delta t = mv_2\ sen\ 40°$

$$F_y\ (0.015\ s) = \frac{\frac{4}{16}}{32.2}(120\ ft/s)\ sen\ 40°$$

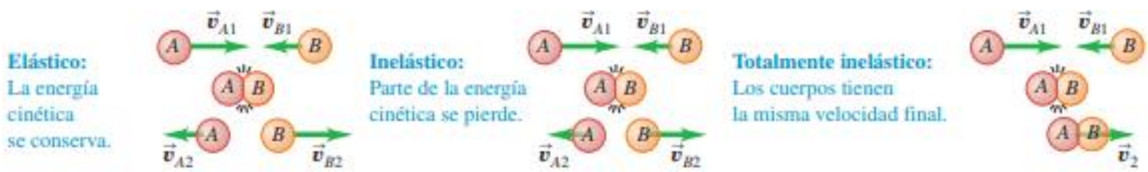
$$F_y = +39.9\ lb$$

A partir de sus componentes F_x y F_y se determina la magnitud y dirección de la fuerza **F**:

$$F = 97.5\ lb \measuredangle 24.2°$$

Choques de Partículas

Es importante recordar que los choques se pueden clasificar considerando su energía. Un choque en el que la energía cinética se conserva se denomina elástico. Un choque en el que la energía cinética total disminuye se llama inelástico. Cuando dos cuerpos tienen una velocidad final común, decimos que el choque es totalmente inelástico También hay casos en los que la energía cinética final es mayor que el valor inicial. Los choques se clasifican con base en consideraciones de energía.



Examinemos un choque elástico entre dos cuerpos A y B. Comencemos con un choque en una dimensión, con todas las velocidades en la misma línea, la que elegimos como eje x. Así, los momentos lineales y las velocidades solo tienen componentes x. Llamamos v_{A1x} y v_{B1x} a las velocidades x antes del choque, y v_{A2x} y v_{B2x} a las velocidades después del choque. Por la conservación de la energía cinética, tenemos

$$\frac{1}{2}m_A {v_{A1x}}^2 + \frac{1}{2}m_B {v_{B1x}}^2 = \frac{1}{2}m_A {v_{A2x}}^2 + \frac{1}{2}m_B {v_{B2x}}^2$$

y la conservación del momento lineal da

$$m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

Si conocemos las masas m_A y m_B y las velocidades iniciales v_{A1x} y v_{B1x}, podemos resolver estas dos ecuaciones para obtener las velocidades finales v_{A2x} y v_{B2x}.

Choques elásticos, un cuerpo inicialmente en reposo

Nos concentraremos primeramente en el caso especial en el que un cuerpo *B* está en reposo antes del choque (es decir, $v_{B1x} = 0$). Piense que el cuerpo *B* es el blanco que *A* debe golpear. Entonces, las ecuaciones de conservación de energía cinética y el momento lineal son, respectivamente,

$$\frac{1}{2}m_A {v_{A1x}}^2 = \frac{1}{2}m_A {v_{A2x}}^2 + \frac{1}{2}m_B {v_{B2x}}^2$$

$$m_A v_{A1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

Podemos despejar v_{A2x} y v_{B2x} en términos de las masas y la velocidad inicial v_{A1x}

El enfoque más sencillo es un tanto indirecto, pero de pasada revela otra característica interesante de los choques elásticos. Reacomodemos primero las ecuaciones como sigue:

$$m_B v_{B2x}{}^2 = m_A(v_{A1x}{}^2 - v_{A2x}{}^2)$$

$$m_A\,(v_{A1x} - v_{A2x})\,(v_{A1x} + v_{A2x}\,m_B v_{B2x} = m_A\,(v_{A1x} - v_{A2x})$$

Ahora dividimos la ecuación (8.21) entre la (8.22) para obtener

$$v_{B2x} = v_{A1x} + v_{A2x} \qquad (8.23)$$

Sustituimos esta expresión en la ecuación (8.22) para eliminar v_{B2x} , y luego despejamos v_{A2x} :

$$m_B\,(v_{A1x} + v_{A2x}) = m_A\,(v_{A1x} - v_{A2x})$$

$$v_{A2x} = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\,v_{A1x} \qquad (8.24)$$

Por último, sustituimos este resultado en la ecuación (8.23) para obtener

$$v_{B2x} = \frac{2m_A}{m_A + m_B}\,v_{A1x}$$

Ejemplo 8.6: Choque en un plano horizontal

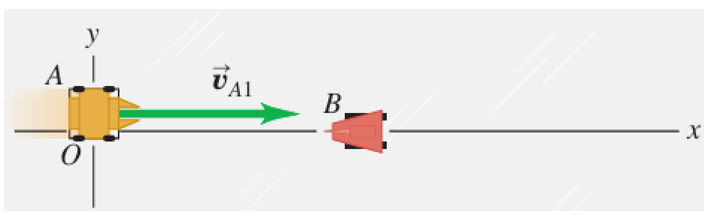
La figura 8.13a muestra dos robots combatientes que se deslizan sobre una superficie sin fricción. El robot A, con masa de 20 kg, se mueve inicialmente a 2.0 m/s en forma paralela al eje x. Choca con el robot B, cuya masa es de 12 kg y está inicialmente en reposo. Después del choque, el robot A se mueve a 1.0 m/s en una dirección que forma un ángulo α=30º con su dirección inicial (Figura 8.13b) ¿Qué velocidad final tiene el robot B?

SOLUCIÓN

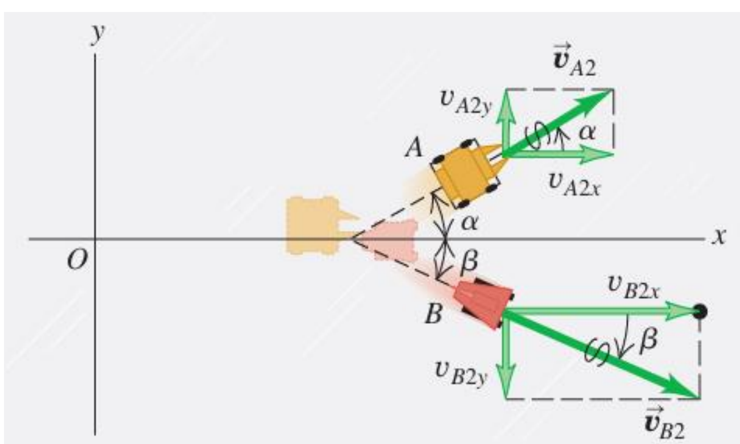
IDENTIFICAR Y PLANTEAR: No hay fuerzas externas horizontales, así que las componentes x y y del momento lineal total del sistema se conservan. La conservación del momento lineal exige que la suma de las componentes x del momento lineal *antes* del choque (subíndice 1) sea igual a la suma *después* del choque (subíndice 2), y lo mismo con las sumas de las componentes y. La incógnita es $\overrightarrow{V_{B2}}$, la velocidad final del robot B.

8.13 Vista Superior de las velocidades a) antes y b) después del choque.

a) Antes del choque



b) Después del choque



EJECUTAR: Las ecuaciones de conservación del momento lineal y sus soluciones para V_{B2x} y V_{B2y} son

$$m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

$$v_{B2x} = \frac{m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} - m_A v_{A2x}}{m_B}$$

$$= \frac{(20\ kg)(2.0\frac{m}{s}) + (12\ kg)(0) - (20\ kg)(1.0\frac{m}{s})(\cos 30°)}{12\ kg}$$

$$= 1.89\ \frac{m}{s}$$

$$m_A v_{A1y} + m_B v_{B1y} = m_A v_{A2y} + m_B v_{B2y}$$

$$v_{B2y} = \frac{m_A v_{A1y} + m_B v_{B1y} - m_A v_{A2y}}{m_B}$$

$$= \frac{(20\ kg)(0) + (12\ kg)(0) - (20\ kg)(1.0\frac{m}{s})(\text{sen}\ 30°)}{12\ kg}$$

$$= -0.83\ \frac{m}{s}$$

La figura 8.13b ilustra el movimiento del robot B después del choque. La magnitud de $\overrightarrow{V_{B2}}$ es

$$V_{B2} = \sqrt{(1.89\frac{m}{s})^2 + (-0.83\frac{m}{s})^2}$$

Y el ángulo a partir de su dirección a partir de +x es

$$\beta = \arctan\left(\frac{-0.83\frac{m}{S}}{1.89\frac{m}{s}}\right) = -24°$$

EVALUAR: Podemos comprobar la respuesta confirmando que las componentes de momento lineal total antes y después del choque son iguales. En un principio, el robot *A* tiene una componente *x* de momento lineal $m_A v_{A1x}$= (20 kg) (2.0 m/s) = 40 kg/s y la correspondiente componente *y* es cero; el robot *B* tiene momento lineal igual a cero. Después del choque, las componentes de momento lineal son $m_A v_{A2x}$= = (20 kg) (1.0 m/s) (cos 30°) = 17 kg·m/s, y $m_B v_{B2x}$= = (12 kg) (1.89 m/s) = 23 kg·m/s; el momento lineal total en *x* es de 40 kg·m/s, igual que antes del choque. Las componentes *y* finales son $m_A v_{A2y}$= = (20 kg) (1.0 m/s) (sen 30°) = 10 kg·m/s, y $m_B v_{B2y}$= (12 kg) (−0.83 m/s) = −10 kg·m/s; la componente *y* total del momento lineal es cero, igual que antes del choque.

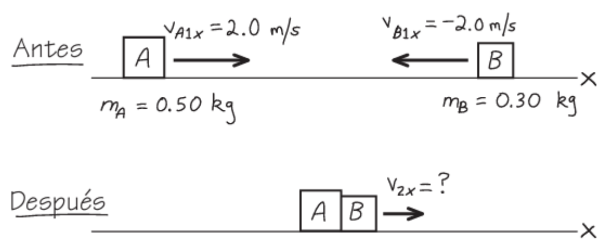
Ejemplo 8.7: Choque totalmente inelástico

Revisaremos el choque descrito en el ejemplo 8.5 (sección 8.2), pero esta vez, los deslizadores están equipados para permanecer unidos después del choque. Calcule la velocidad final común vx y compare las energías cinéticas inicial y final del sistema.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: No hay fuerzas externas en la dirección x, así que la componente x del momento lineal se conserva. La figura 8.17 ilustra el diagrama. Las incógnitas son la velocidad final v_{2x} y las energías cinéticas inicial y final del sistema, K_1 y K_2.

8.17 Diagrama del problema



Ejemplo 8.12: Choque elástico bidimensional

La figura 8.26 muestra un choque elástico de dos discos de hockey (masas m_a = 0.500 kg y m_B = 0.300 kg) en una mesa de aire, sin fricción. El disco A tiene velocidad inicial de 4.00 m/s en la dirección +x y velocidad final de 2.00 m/s en una dirección α desconocida. El disco B está inicialmente en reposo. Calcule la rapidez final v_{B2} del disco B y los ángulos α y β.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Usaremos las ecuaciones de conservación de la energía y conservación del momento lineal en x y y. Estas tres ecuaciones deben ser suficientes para obtener las tres incógnitas mencionadas en el enunciado del problema.

EJECUTAR: Puesto que el choque es elástico, las energías cinéticas inicial y final son iguales:

$$\frac{1}{2}\, m_A v_{A1}^2 = \frac{1}{2}\, m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2}\, m_B v_{B2}^2$$

$$v_{B2}^2 = \frac{m_A v_{A1}^2 - m_A v_{A2}^2}{m_B}$$

$$= \frac{m_A v_{A1}^2 - m_A v_{A2}^2}{m_B}$$

$$= \frac{(0.500\,kg)\left(4.00\frac{m}{s}\right)^2 - (0.500\,kg)\left(2.00\frac{m}{s}\right)^2}{(0.300\,kg)}$$
$$= 4.47\frac{m}{s}$$

La conservación de las componentes *x* y *y* del momento lineal total da

$$m_A v_{A1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$
$$(0.500\,kg)\left(4.00\frac{m}{s}\right) = (0.500\,kg)\left(2.00\frac{m}{s}\right)(\cos\alpha) + (0.300\,kg)\left(4.47\frac{m}{s}\right)(\cos\beta)$$
$$0 = m_A v_{A2y} + m_B v_{B2y}$$
$$0 = (0.500\,kg)\left(2.00\frac{m}{s}\right)(\operatorname{sen}\alpha) - (0.300\,kg)\left(4.47\frac{m}{s}\right)(\operatorname{sen}\beta)$$

EJECUTAR: Por la conservación del momento lineal

$$m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = (m_A + m_B)v_{2x}$$
$$v_{2x} = \frac{m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x}}{m_A + m_B}$$
$$v_{2x} = \frac{(0.50\,kg)\left(2.0\frac{m}{s}\right) + (0.30\,kg)\left(-2.0\,\frac{m}{s}\right)}{0.50\,kg + 0.30\,kg}$$
$$v_{2x} = 0.50\frac{m}{s}$$

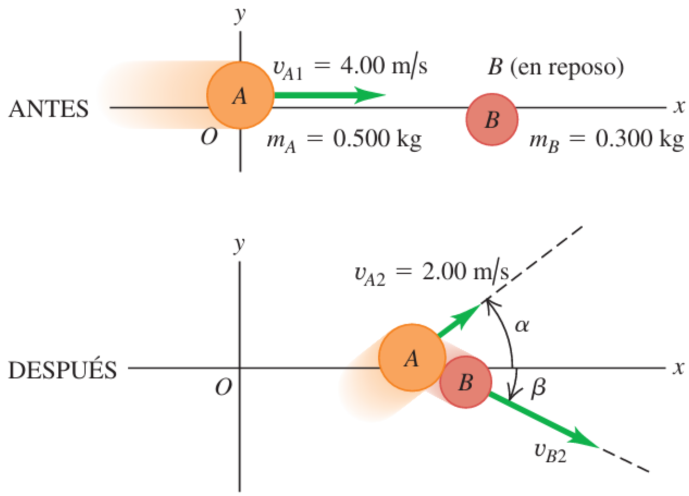
Puesto que v_{2x} es positiva, los deslizadores se mueven juntos a la derecha después del choque. Antes de este, las energías cinéticas son:

$$k_A = \frac{1}{2}\,m_A(v_{A1x})^2 = \frac{1}{2}\,(0.50\,kg)\left(2.0\frac{m}{s}\right)^2 = 1.0\,J$$
$$k_B = \frac{1}{2}\,m_B(v_{B1x})^2 = \frac{1}{2}\,(0.30\,kg)\left(-2.0\frac{m}{s}\right)^2 = 0.60\,J$$

La energía cinética total antes del choque es $k_1 = k_A + k_B = 1.61\,J.$ La energía cinética después del choque es

$$k_2 = \frac{1}{2}(\,m_A + m_B)(v_{2x})^2 = \frac{1}{2}\,(0.50\,kg + 0.30kg)\left(0.50\frac{m}{s}\right)^2 = 0.10\,J$$

8.26 Choque elástico que no es de frente.



Tenemos dos ecuaciones simultáneas para α y β. Dejamos al lector dar los detalles de la solución. (Sugerencia: Despeje cos β en la primera ecuación y sen β en la segunda; luego, eleve al cuadrado las ecuaciones y súmelas. Como sen² β + cos² β = 1, esto elimina β y deja una ecuación de la que podemos despejar cos α y, por lo tanto, α. Luego se sustituye este valor en cualquiera de las dos ecuaciones para despejar β.) Los resultados son

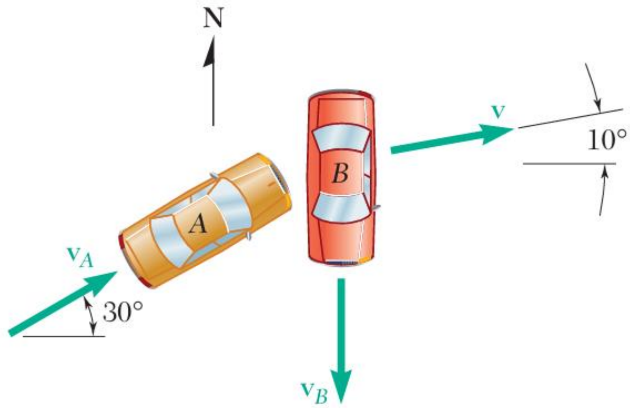
$$\alpha = 36.9° \qquad \beta = 26.6°$$

EVALUAR: Para comprobar las respuestas, nos aseguramos de que la componente y del momento lineal sea cero antes y después del choque. En este caso dichas componentes son

$$P_{A2Y} = (0.500\ kg)\left(2.00\frac{m}{s}\right)(sen\ 36.9°) = +0.600\ kg * \frac{m}{s}$$
$$P_{B2Y} = -(0.300\ kg)\left(4.47\ \frac{m}{s}\right)(sen\ 26.6°) = -0.600\ kg * \frac{m}{s}$$

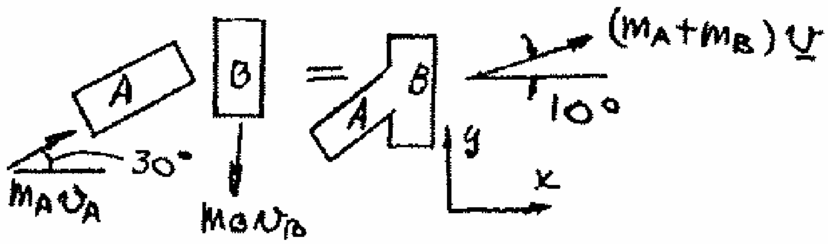
Y las sumas de estos valores es cero.

13.146 En un crucero el automóvil B viajaba hacia el sur y el automóvil A en dirección 30° al noreste cuando chocaron entre sí. Luego de la investigación se determinó que después del choque los dos automóviles quedaron trabados y patinaron a un ángulo de 10° noreste. Cada conductor afirmó que viajaba al límite de velocidad de 50 km/h y que trató de frenar, pero que no pudo evitar el choque debido a que el otro conductor iba bastante más rápido. Si se sabe que los pesos de los automóviles A y B eran, respectivamente, de 1500 y 1200 kg, determine a) cuál de los automóviles iba más rápido, b) la rapidez del automóvil que iba a mayor velocidad si el vehículo más lento viajaba al límite de velocidad.



Solución

a) El momento lineal total de los dos automóviles se conserva



$$\sum mv,x = \ m_A v_A \cos 30° = (m_A + m_B) v \cos 10° \quad (\mathbf{1})$$

$$\sum mv,y = \ m_A v_A \sin 30° - m_B v_B = (m_A + m_B) v \cos 10° \quad (\mathbf{2})$$

Dividiendo (1) entre (2)

$$\frac{\sin 30°}{\cos 30°} - \frac{m_B v_B}{m_A v_A \cos 30°} = \frac{\sin 10°}{\cos 10°}$$

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{(\tan 30° - \tan 10°)(m_A \cos 30°)}{m_B}$$

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{(0.4010)(1500)(\cos 30°)}{(1200)}$$

$\frac{v_B}{v_A} = 0.434 \quad v_A = 2.30\, v_B$

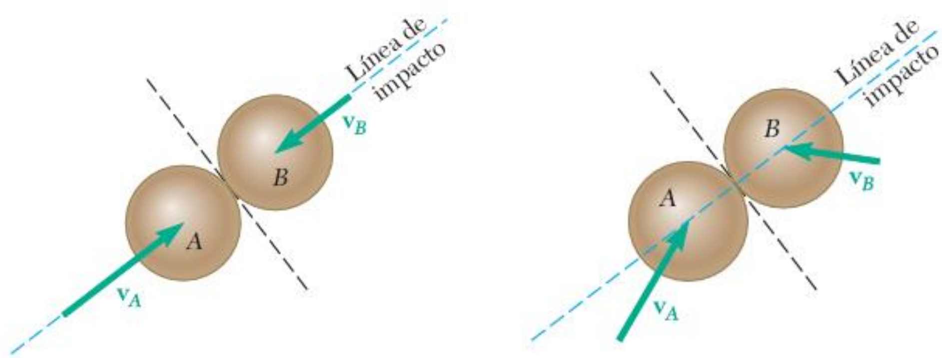
Por lo tanto,

b) Dado que V_B es el automóvil más lento

$$v_B = 50\frac{km}{h}$$
$$v_A = (2.30)(50)$$
$$v_A = 115.2\frac{km}{h}$$

13.12. IMPACTO

Un choque entre dos cuerpos que ocurre en un intervalo muy pequeño y durante el cual los dos cuerpos ejercen fuerzas relativamente grandes entre sí recibe el nombre de *impacto*. La normal común a las superficies en contacto durante el impacto se conoce como *línea de impacto*. Si los centros de masa en los dos cuerpos que chocan se ubican sobre esta línea, el impacto es un *impacto central*. En otro caso, se dice que el impacto es *excéntrico*. Nuestro estudio se limitará al impacto central de dos partículas.



a) Impacto central directo b) Impacto central oblicuo

Si las velocidades de dos partículas se dirigen a lo largo de la línea de impacto, se dice que el impacto será directo. Si alguna o ambas partículas se mueven a lo largo de una línea que no sea la línea de impacto, se dice que el impacto será oblicuo.

13.13. IMPACTO CENTRAL DIRECTO

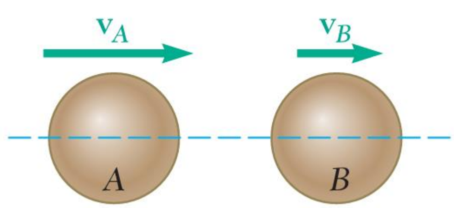
Considere dos partículas A y B, de masas m_a y m_β, las cuales se mueven en la misma línea recta y hacia la derecha con velocidades conocidas v_A y v_B. Si v_A es mayor que v_B, la partícula A golpeará finalmente a la partícula B. Por el impacto, las dos partículas se deformarán y, al final del periodo de deformación, tendrán la misma velocidad u. Se presentará un periodo de restitución, al final del cual, dependiendo de la magnitud de las fuerzas de impacto y de los materiales implicados, las dos partículas habrán recobrado su forma original o permanecerán deformadas. El propósito aquí es determinar las velocidades $v_A{'}$ y $v_B{'}$ de las partículas al final del periodo de restitución.

Considerando primero las dos partículas como un solo sistema, se advierte que no hay fuerza impulsiva externa. De tal modo, se conserva la cantidad de movimiento total de las dos partículas y se escribe:

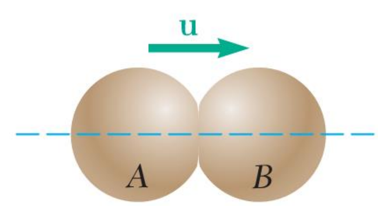
$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A{'} + m_B v_B{'}$$

Puesto que todas las velocidades consideradas están dirigidas a lo largo del mismo eje, es posible sustituir la ecuación que se obtuvo por la siguiente relación que incluye sólo componentes escalares.

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A{'} + m_B v_B{'}$$



Antes del impacto



En la deformación máxima

Puesto que los cocientes son iguales, también lo son al cociente obtenido al sumar, respectivamente, sus numeradores y sus denominadores. Se tiene, por lo tanto

$$e = \frac{(u - v_A{'}) + (v_B{'} - u)}{(v_A - u) + (u - v_B)} = \frac{v_B{'} - v_A{'}}{v_A + v_B}$$

$$v_B{'} - v_A{'} = e(v_A + v_B)$$

En virtud de que $v_B{'} - v_A{'}$ representa la velocidad relativa de las dos partículas después del impacto y $v_A - v_B$ representa su velocidad relativa antes del impacto, la fórmula expresa que la velocidad relativa de dos partículas después del impacto puede obtenerse al multiplicar su velocidad relativa antes del impacto por el coeficiente de restitución. Esta propiedad se utiliza para determinar experimentalmente el valor del coeficiente de restitución de dos materiales dados.

Dos casos de impacto particulares son de especial interés:

1. e = 0, impacto perfectamente plástico. Cuando e = 0, la ecuación produce $v_B' - v_A'$. No hay periodo de restitución y ambas partículas permanecen juntas después del impacto. Al sustituir $v_B' = v_A' = v'$ en la ecuación (13.37), la cual expresa que la cantidad de movimiento total de las partículas se conserva, se escribe:

$$m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B)v'$$

Esta ecuación puede resolverse para la velocidad común v′ de las dos partículas después del impacto.

2. e = 1, impacto perfectamente elástico. Cuando *e = 1* la ecuación se reduce a

$$v_B' - v_A' = v_A - v_B$$

que expresa que las velocidades relativas antes y después del impacto son iguales. Los impulsos recibidos por cada partícula durante el período de deformación y durante el período de restitución son los mismos. Las partículas se alejan una de la otra después del impacto con la misma velocidad con la cual se aproximaban antes de él. Las velocidades v_A' y v_B' pueden obtenerse al resolver simultáneamente las ecuaciones.

Vale la pena notar que, *en el caso de un impacto perfectamente elástico, se conserva la energía total de las dos partículas*, así como su cantidad de movimiento total. Las ecuaciones pueden escribirse como sigue:

$$m_A(v_A - v_A') = m_B(v_B' - v_B)$$
$$v_A + v_A' = v_B + v_B'$$

Al multiplicar miembro por miembro, se tiene:

$$m_A(v_A - v_A')(v_A + v_A') = m_B(v_B' - v_B)(v_B + v_B')$$
$$m_A v_A^2 - m_A(v_A')^2 = m_B(v_B')^2 - m_B v_B^2$$

Al reagrupar los términos en la ecuación que se obtuvo y multiplicar por $\frac{1}{2}$, se escribe:

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}m_A(v_A')^2 + \frac{1}{2}m_B(v_B')^2$$