Vectores

Cuando una cantidad física se describe con un solo número, decimos que es una **cantidad escalar**. En cambio, una **cantidad vectorial** incluye tanto una **magnitud** (la cual indica "qué tanto") como una dirección en el espacio.

El **desplazamiento es un vector**, que simplemente es un cambio en la posición de un objeto. El desplazamiento siempre es un segmento recto dirigido del punto inicial al punto final, aunque la trayectoria real seguida por el objeto sea curva. Observe que el desplazamiento no se relaciona directamente con la **distancia** total recorrida. Si el objeto llegara a P_2 y volviera a P_1, el desplazamiento total sería cero**.**

Frecuentemente representamos la **magnitud** de una cantidad vectorial con barras verticales, como en $|A|$, o con letra cursiva. La magnitud de una cantidad vectorial es una cantidad escalar (un número) y siempre es positiva.

Componentes de vectores

Para definir las componentes de un vector **A**, partimos de un sistema rectangular de ejes coordenados. Luego se proyecta el vector sobre los ejes *x* y *y*. El resultado es un vector $\vec{A}_x$ a lo largo del eje $\boldsymbol{x}$ y un vector $\vec{A}_y$ a lo largo del eje $\boldsymbol{y}$. Estos dos vectores se llaman las componentes del vector $\vec{A}$. Simbólicamente $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$

Puesto que cada vector componente se encuentra a lo largo de los ejes de coordenadas, solo necesitamos un numero para describirlo. Se puede realizar el procedimiento, si se conocen la magnitud y la dirección del vector por su ángulo con respecto a una dirección de referencia.

Cálculos de Vectores usando componentes

Podemos describir un vector plenamente dando su magnitud y dirección, o bien, sus componentes. Las ecuaciones indican cómo obtener las componentes si conocemos la magnitud y la dirección. También podemos usar el teorema de Pitágoras, vemos que la magnitud de un vector $\vec{A}$ es

$$|A| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}$$

Esta ecuación es válida siempre y cuando los ejes $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ sean perpendiculares entre sí, la expresión vectorial para la dirección vectorial está dada por la tangente del ángulo si medimos el mismo desde el eje $\boldsymbol{x}$ hacia el eje $\boldsymbol{y}$:

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

Cálculo de vectores usando sus componentes

Si conocemos las componentes de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, podríamos calcular sumando o restando las componentes correspondientes de cada vector para hallar una magnitud resultante de $\vec{R}$ y luego hallar su dirección resultante. Podemos ampliar este procedimiento para calcular cualquier cantidad de vectores $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ ...

Donde las componentes del resultante serán

$$R_x = A_x + B_x + C_x \ldots$$

$$R_y = A_y + B_y + C_y \ldots$$

Vectores Unitarios

Un vector unitario es un vector con magnitud 1, sin unidades. Su única finalidad consiste en direccionar, es decir, señalar una dirección en el espacio. Siempre incluiremos un "sombrero" (^) sobre el símbolo de un vector unitario para distinguirlo de los vectores ordinarios cuya magnitud podría ser 1 o alguna otra.

En un sistema de coordenadas ***x-y*** podemos definir un vector unitario $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ que apunte en la dirección del eje $\boldsymbol{x}$ y un vector unitario $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ que apunte en la dirección del eje $\boldsymbol{y}$.

Entonces $\vec{A} = A_x\, \hat{\boldsymbol{\imath}} + A_y\, \hat{\boldsymbol{\jmath}}$ **.** Donde igualmente una resultante $\vec{R}$ de $\vec{A}$ y $\vec{B}$

$$\vec{R} = (A_x + B_x)\, \hat{\boldsymbol{\imath}} + (A_y + B_y)\, \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Movimiento Rectilíneo de Partículas

Posición, velocidad y aceleración

Una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta se dice que se encuentra en movimiento rectilíneo. En cualquier instante dado ***t***, la partícula ocupará cierta posición sobre esa línea recta. Para definir la posición *P* de la partícula se elige un origen fijo *O* sobre la dirección positiva a lo largo de la línea. Se mide la distancia ***x*** desde ***O*** hasta ***P***, y se marca con un signo más o menos, dependiendo de si ***P*** se alcanza desde ***O*** al moverse a lo largo de la línea en la dirección positiva o en la negativa, respectivamente. La distancia *x*, con el signo apropiado, define por completo la posición de la partícula y se denomina la coordenada de la posición. El desplazamiento es el cambio neto en la posición de un objeto o persona. La velocidad promedio de la partícula sobre el intervalo de tiempo Δt se define como el cociente entre el desplazamiento Δx y el intervalo de tiempo Δt:

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

La velocidad instantánea ***v*** de la partícula en el instante ***t*** se obtiene de la velocidad promedio al elegir intervalos Δt y desplazamientos Δx cada vez más cortos:

$$\text{Velocidad instantánea} = v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

La velocidad instantánea se expresa también en $\mathrm{m/s}$ o $\mathrm{ft/s}$. Observando que el límite del cociente es igual, por definición, a la derivada de ***x*** con respecto a ***t***, se escribe:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

La velocidad *v* se representa mediante un número algebraico que puede ser positivo o negativo. Un valor positivo de ***v*** indica que ***x*** aumenta, esto significa que la partícula se mueve en la dirección positiva; un valor negativo de ***v*** indica que ***x*** disminuye, es decir, que la partícula se mueve en dirección negativa. La magnitud de ***v*** se conoce como la ***rapidez*** de la partícula.

La aceleración promedio de la partícula sobre el intervalo de tiempo Δt se refiere como el cociente de Δv y Δt:

$$Aceleración\ promedio = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Si se utilizan las unidades del SI, Δv se expresa en $\mathrm{m/s}$ y Δt en segundos; la aceleración promedio se expresará entonces en $\mathrm{m/s^2}$. Si se recurre a las unidades inglesas Δv se expresa en $\mathrm{ft/s}$ y Δt en segundos; la aceleración promedio se expresa entonces en $\mathrm{ft/s^2}$.

La aceleración instantánea ***a*** de la partícula en el instante ***t*** se obtiene de la aceleración promedio al escoger valores de Δt y Δv cada vez más pequeños:

$$\text{Aceleración promedio} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

La aceleración instantánea se expresa también en $\mathrm{m/s^2}$o $\mathrm{ft/s^2}$. El límite del cociente, el cual es por definición la derivada de *v* con respecto a *t*, mide la razón de cambio de la velocidad. Se escribe:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

O, con la sustitución de *v:*

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

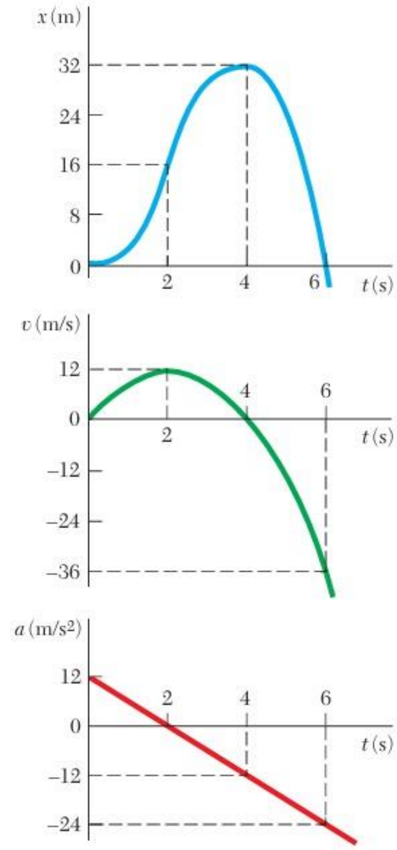
La aceleración ***a*** se representa mediante un número algebraico que puede ser positivo o negativo. Un valor positivo de *a* indica que la velocidad (es decir, el número algebraico *v*) aumenta. Esto puede significar que la partícula se está moviendo más rápido en la dirección positiva o que se mueve más lento en la dirección contraria (la negativa). En ambos casos Δv es positiva.

Un valor negativo de *a* indica que disminuye la velocidad; ya sea que la partícula se esté moviendo más lento en la dirección positiva o que se esté moviendo más rápido en la dirección negativa.

Ejemplo:

Considere la partícula que se mueve en una línea recta y suponga que su posición está definida por la ecuación

$$x = 6t^2 + t^3$$



Donde t se expresa en segundos y x en metros. La velocidad de v en cualquier tiempo t se obtiene al derivar x con respecto a t

$$v = \frac{dx}{dt} = 12t - 3t^2$$

La aceleración a se obtiene al diferenciar con respecto a t:

$$a = \frac{dv}{dt} = 12 - 6t$$

La coordenada de posición, velocidad y aceleración se han graficado contra *t*. Las curvas obtenidas se conocen como curvas de movimiento. Recuérdese, sin embargo, que la partícula no se mueve a lo largo de ninguna de estas curvas; la partícula se mueve en una línea recta. Puesto que la derivada de una función mide la pendiente de la curva correspondiente, la pendiente de la curva ***x-t*** en cualquier tiempo dado es igual al valor de ***v*** en ese tiempo y la pendiente de la curva ***v-t*** es igual al valor de ***a***. Como $a = 0$ en $t = 2$s, la pendiente de la curva ***v-t*** debe ser cero en $t = 2$s; la velocidad alcanza un máximo en este instante.

Taller en clase

1. El movimiento de una partícula está definido por la relación $x = 1.5t^4 - 30t^2 + 5t + 10$, donde x y t se expresan en metros y segundos, respectivamente. Determine la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula cuando *t* = 4s.

$$x = 1.5t^4 - 30t^2 + 5t + 1$$
$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^3 - 60t + 5$$
$$a = \frac{dv}{dt} = 18t^2 - 60$$

Evaluando la expresión como t =4

$$x = 1.5(4)^4 - 30(4)^2 + 5(4) + 10$$
$$x = -66.0m$$
$$v = 6(4)^3 - 60(4) + 5$$
$$v = 149.0\ m/s$$
$$a = 18(4)^2 - 60$$
$$a = 228m/s^2$$

2. El movimiento de una partícula está definido por la relación $x = 12t^3 - 18t^2 + 2t + 5$, donde *x* y *t* se expresan en metros y segundos, respectivamente. Determine la posición y la velocidad cuando la aceleración de la partícula es igual a cero.

$$x = 12t^3 - 18t^2 + 2t + 5$$
$$v = \frac{dx}{dt} = 36t^2 - 36t + 2$$
$$a = \frac{dv}{dt} = 72t - 36$$

Encontrando el tiempo cuando *a* = 0

$$72t - 36 = 0$$

$$72t = 36$$

$$t = 0.5$$

Sustituyendo, teniendo el valor de *t:*

$$x = 12(0.5)^3 - 18(0.5)^2 + 2(0.5) + 5$$

$$x = 3.00m$$

$$v = 36(0.5)^2 - 36(0.5) + 2$$

$$v = -7.00\ m/s$$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

El movimiento rectilíneo uniformemente acelerado es otro tipo común de movimiento. En este, la aceleración a de la partícula es constante y las ecuaciones se convierten en:

$$\frac{dv}{dt} = a = \text{constante}$$

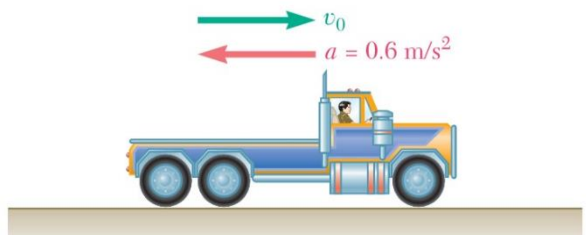
$$v = v_0 + at \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad v^2 = v_0^2 + 2a + (x - x_0)$$

Las tres **ecuaciones de estado** que se han deducido ofrecen relaciones útiles entre la coordenada de posición, la velocidad y el tiempo en el caso del movimiento uniformemente acelerado, al sustituir los valores apropiados de a, v_0 y x_0 . El origen *O* del eje *x* debe definirse primero para posteriormente escoger una dirección positiva a lo largo del eje; esta dirección se usará para determinar los signos de *a,* v_0 y x_0 .

Una aplicación importante del movimiento uniformemente acelerado es el movimiento de un cuerpo en caída libre. La aceleración de un cuerpo en caída libre (denotada mediante ***g***) es igual a 9.81 $\mathrm{m/s^2}$ o 32.2 $\mathrm{ft/s^2}$ Es importante recordar que las tres ecuaciones anteriores pueden utilizarse sólo cuando se sabe que la aceleración de la partícula es constante.

Taller en clases

1. Un camión recorre 220 m en 10s mientras se desacelera a una razón constante de 0.6 $\mathrm{m/s^2}$. Determine a) su velocidad inicial, b) su velocidad final, c) la distancia recorrida durante los primeros 1.5s. Un camión recorre 220 m en 10 s mientras se desacelera a una razón constante de 0.6 $\mathrm{m/s^2}$. Determine: a) su velocidad inicial, b) su velocidad final, c) la distancia recorrida durante los primeros 1.5 s.



a) Velocidad inicial

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v_0 = \frac{x - x_0}{t} - \frac{1}{2} a t^2$$

$$v_0 = \frac{220 - 0}{10} - \frac{1}{2}(-0.6)(10)$$

$$v_0 = 25.9 \text{ m/s}$$

b) Velocidad final

$$v = v_0 + at$$

$$v = 25.9 + (-0.6)(10)$$

$$v = 19.00 \text{ m/s}$$

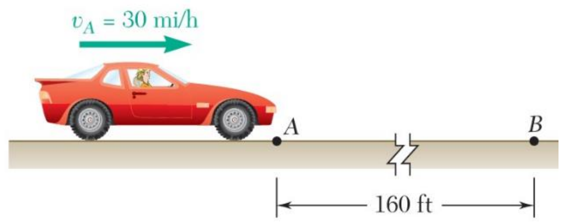
c) Distancia recorrida en los primero 1.5 segundos

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$x = 0 + 25.9(1.5) + \frac{1}{2}(-0.6)(1.5)$$

$$x = 36.8 \text{m}$$

2. Si se supone una aceleración uniforme de 11 $\mathrm{ft/s^2}$ y se sabe que la rapidez de un automóvil cuando pasa por A es de 30 mi/h, determine a) el tiempo requerido para que el automóvil llegue a *B*, b) la rapidez del automóvil cuando pasa por *B*.



a) Tiempo requerido para alcanzar *B*.

$$v_A = 30\mathrm{mi/h} = 44\mathrm{ft/s} \qquad x_A = 0 \qquad x_B = 160\mathrm{ft} \quad a = 11\ \mathrm{ft}/s^2$$

$$x_B = x_A + at + \frac{1}{2}at^2$$

$$160 = 0 + 30t + \frac{1}{2}11t^2$$

$$5.5t^2 + 30t + 160 = 0$$

$$t = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4(5.5)(160)}}{2(5.5)}$$

$$t = 2.71s$$

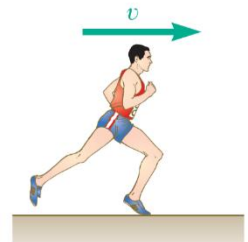
b) Velocidad en B

$$v_B = v_A + at$$

$$v_B = v_A + at$$

$$v_B = 44 + (11)(2.71)$$

$$v_B = 73.86\mathrm{ft/s} = 50.4\mathrm{mi/h}$$

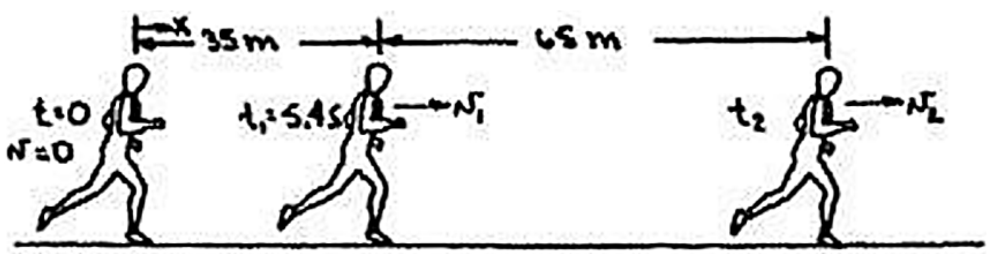


3. Un atleta en una carrera de 100m acelera de manera uniforme durante los primeros 35 m y luego corre con una velocidad constante. Si el tiempo del atleta para los primeros 35m es de 5.4 s, Determine:

a) Su Aceleración
b) Su velocidad final
c) El tiempo en que completa la carrera.

$$0 \leq x \leq 35m \; con \; a = Cte.$$
$$35m \leq x \leq 100m \; con \; v = Cte.$$

En $t = 0; v = 0$ cuando $x = 35m \quad t = 5.4s$



a) Tenemos $x = 0 + 0t + \frac{1}{2}at^2$ para $0 \leq x \leq 35m$ en *t=5.4s:*

$$35m = \frac{1}{2}a(5.4s)^2 \rightarrow a = 2.4\frac{m}{s^2}$$

b) Tenga en cuenta $v = v_{\max}$ para $35m \leq x \leq 100m$

Ahora $v^2 = 0 + 2a(x - 0)$ para $0 \leq x \leq 35m$

Cuando $x = 35m$: $\quad v^2_{Max} = 2(2.4005\ m/s^2)(35m)$

$$v_{Max} = 12.9628 \text{ m/s}$$

c) Tenemos: $x = x_i + v_0(t - t_1)$ Para $0 \leq x \leq 35m$

Cuando $x = 100m$

$$100m = 35m + (12.9628m/s)(t_2 - 5.4)s$$

$$100m - 35m = 12.9628m\ (t_2 - 5.4)$$

$$65m = 12.9628m\ (t_2 - 5.4)$$

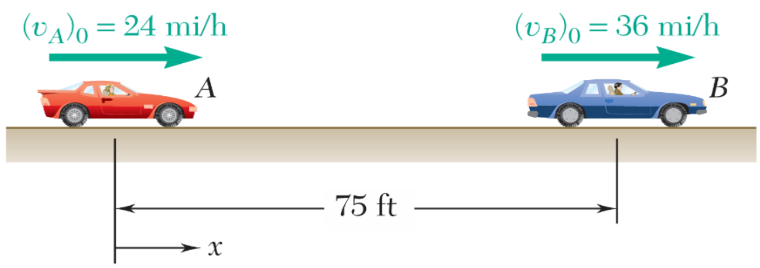
$$t_2 = 5.0142 + 5.4$$

$$t_2 = 10.414$$

4. Los automóviles A y B viajan en carriles adyacentes de una carretera y en $t = 0$ tienen las posiciones y velocidades que se muestran en la figura. Si se sabe que el automóvil A tiene una aceleración constante de 1.8 ft/s^2 y que B tiene una desaceleración constante de 1.2 ft/s^2.

Determine:

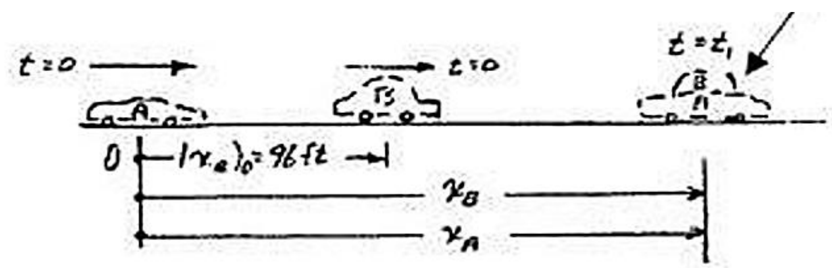
a) Cuándo y dónde A alcanzará a B,
b) Rapidez de cada automóvil en ese momento.



$$a_A = 1.8\,ft/s^2\ ;\ a_B = -1.2ft/s^2$$

$$|v_A|_0 = 24mi/h = 35.2ft/s$$

$$|v_B|_0 = 36mi/h = 52.8ft/s$$



Movimiento del auto A:

$$v_A = (v_A)_0 + (a_A)t = 35.2 + 1.8t$$

$$x_A = (x_A)_0 + (v_A)_0 t + \frac{1}{2}a_A t^2 = 0 + 35.2t + \frac{1.8t^2}{2}$$

Movimiento del auto B:

$$v_B = (v_B)_0 + (a_B)t = 52.8 + 1.2t$$

$$x_B = (x_B)_0 + (v_B)_0 t + \frac{1}{2}a_B t^2 = 75 + 52.8t - \frac{1.2t^2}{2}$$

a) El cuerpo A alcanza al cuerpo B en $t = t_1$

$$x_A = x_B$$

$$0 + 35.2t + \frac{1.8t^2}{2} = 75 + 52.8t - \frac{1.2t^2}{2}$$

$$1.5{t_1}^2 - 17.6t_1 - 75 = 0$$

$$t_1 = -3.22s \; ; \; t_1 = 15.055s$$

Ahora:

$$x_A = 35.2(15.055) + \frac{1.8(15.055)^2}{2} = 734\,ft$$

b) Rapidez cuando $t_1 = 15.055s$

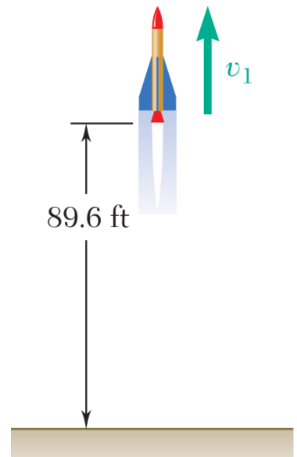
$$v_A = 35.2 + 1.8(15.05)$$

$$v_A = 62.29ft \;\approx 42.5mi/h$$

$$v_B = 52.8 - 1.2(15.05)$$

$$v_B = 34.74ft \;\approx 23.7mi/h$$

5. Un grupo de estudiantes lanza un cohete a escala en dirección vertical. Con base en los datos registrados, determinan que la altitud del cohete fue de 89.6 ft en la parte final del vuelo en la que el cohete aún tenía impulso, y que el cohete aterriza 16s después. Si se sabe que el paracaídas de descenso no pudo abrir y que el cohete descendió en caída libre hasta el suelo después de alcanzar la altura máxima, y suponiendo que g = 32.2 ft/s²



Determine:

a) La rapidez v, del cohete al final del vuelo con impulso,
b) La altura máxima alcanzada por el cohete.

a) Tenemos $y = y_i + vt + \frac{1}{2}at^2$

En $t_{aterrizaje}$; $y = 0$

Entonces

$$0 = 86.9ft + v(16s) + \frac{1}{2}(-32ft/s^2)(16s)^2$$

$$v = 2.52\ ^{ft}/_{s}$$

b) Tenemos $v^2 = v^2{}_i + 2a\,(y - y_i)$

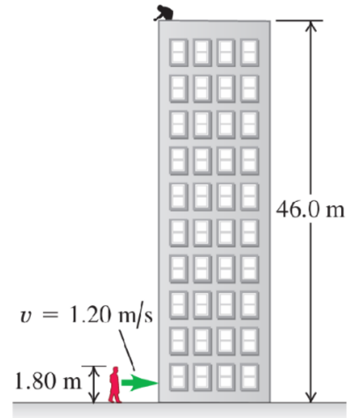
En $y = y_{max}$; $v = 0$

Entonces

$$0 = (252\ ft/s)^2\ + 2(-32.2ft/s^2)(y_{max} - 89.6)$$

$$y_{max} = 1076\ ft$$

Caída Libre



6. Caída de un huevo. Imagine que está en la azotea del edificio de física, a 46.0 m del suelo. Su profesor de física, quien mide 1.80 m de estatura, camina junto al edificio a una rapidez constante de 1.20 ms. Si usted quiere dejar caer un huevo sobre la cabeza de su profesor, ¿dónde deberá estar él cuando usted suelte el huevo? Suponga que el huevo está en caída libre.

Hallar la distancia que camina el profesor durante el tiempo t que tarda el huevo en caer hasta la altura de su cabeza.

Sea y positiva la dirección hacia abajo.

El huevo tiene una velocidad inicial $v_{0y} = 0$ y $a_y = 9.80\ m/s^2$. A la altura de la cabeza del profesor, el huevo ha recorrido una distancia $y - y_0 = 44.2\ m$.

La ecuación $y = y_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$ nos da $t = \sqrt{\frac{2(y-y_0)}{ay}} = \sqrt{\frac{2(44.2m)}{9.80m/s^2}} = 3.00\ s$.

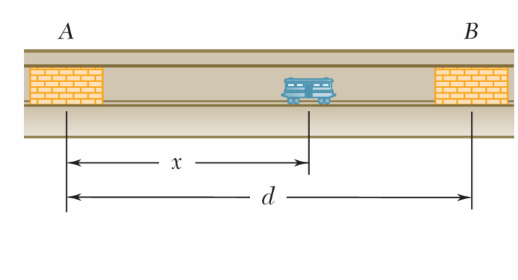
El profesor camina una distancia $x - x_0 = v_{0x}t = (1.20\ m/s)(3.00\ s) = 3.60\ m$.

Suelte el huevo cuando el profesor esté a **3.60 m** del punto directamente debajo de usted.

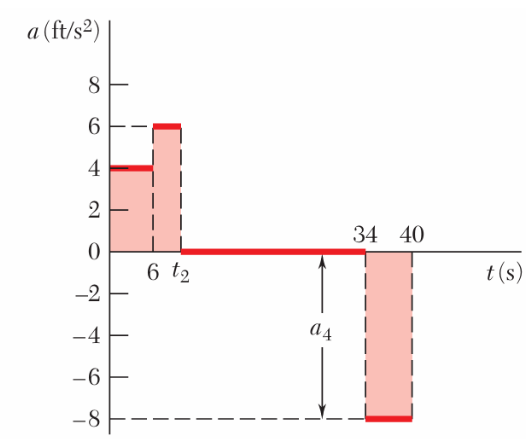
Justo antes de que el huevo aterrice, su velocidad es $(9.80\ m/s2)(3.00\ s) = 29.4\ m/s$. Esto es mucho más rápido que la velocidad del profesor.

Solución de Problemas por método Gráfico

1. Un vagón de transporte subterráneo sale de la estación A; aumenta su rapidez a razón de 4 ft/s² durante 6 s y después a razón de 6 ft/s²hasta que llega a la rapidez de 48ft/s. El vagón mantiene la misma rapidez hasta que se aproxima a la estación B; en ese momento se aplican los frenos, impartiéndosele al vagón una desaceleración constante y provocando que se detenga en 6 s. El tiempo de recorrido total desde A hasta B es de 40s. Dibuje las curvas a-t, v-t y x-t y determine la distancia entre las estaciones A y B.



Curva aceleración-tiempo. Puesto que la aceleración es constante o cero, la curva a-t está conformada por segmentos de línea recta horizontales. Los valores de t_2 y a_4 se determinan de la manera siguiente:



$0<t<6$: Cambio en v área bajo la curva $a-t$

$$v_6 - \ 0\ (6\,s)(4\,ft/s^2) = 24\,ft/s$$

$6 < t < t_2$: Puesto que la velocidad se incrementa de 24 a 48 ft/s

Cambio en v área bajo la curva $a-t$

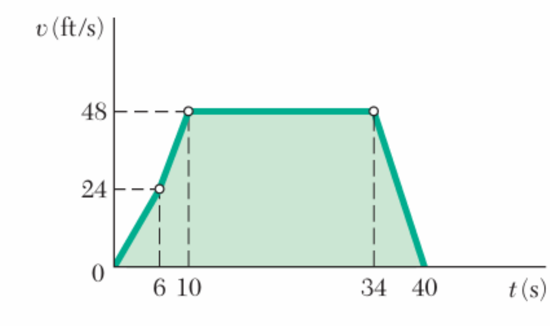
$$48\,ft/s - 24\,ft/s \ = (t_2 - 6)(6\,ft/s^2)$$

$t_2<t<34$: Puesto que la velocidad es constante, la aceleración es cero.

$34 < t < 40$: Cambio v = área bajo la curva $a-t$

$$0 - 48\,ft/s\ (6\,s)a_4 \qquad a_4 = -8\,ft/s^2$$

Al ser negativa la aceleración, el área correspondiente está por debajo del eje t; esta área representa una disminución en la velocidad



Curva velocidad-tiempo. Puesto que la aceleración es constante o cero, la curva $v - t$ está conformada por segmentos de línea recta que conec tan los puntos determinados antes.

Cambio en x área bajo la curva $v - t$

$$0<t<6: \quad x_6 - 0 = \frac{1}{2}(6)(24) = 72ft$$

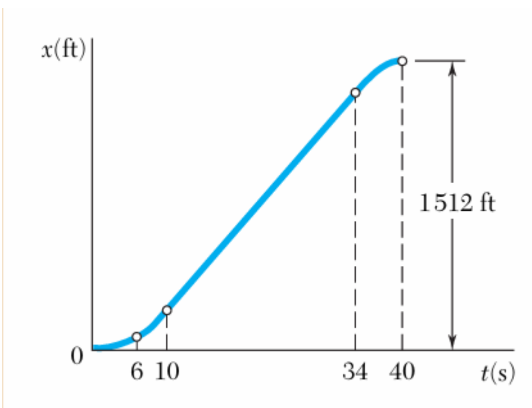
$$6<t<10: \quad x_{10} - x_6 = \frac{1}{2}(4)(24 + 48) = 144ft$$

$$10<t<34: \quad x_{34} - x_{10} = (24)(48) = 1152ft$$

$$34<t<40: \quad x_{40} - x_{34} = \frac{1}{2}(6)(48) = 114ft$$

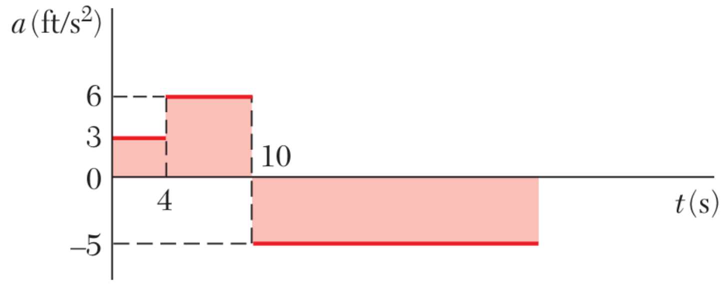
Al sumar los cambios en x, se obtiene la distancia de *A* a *B*

$$d = x_{40} - 0 = 1512ft$$



Curva posición-tiempo. Los puntos determinados deben unirse mediante tres arcos de parábola y un segmento de línea recta. Al construir la curva $x - t$, se debe tener presente que para cualquier valor de t la pendiente de la tangente a la curva $x - t$ es igual al valor de v en ese instante.

2. Una partícula se mueve en línea recta con la aceleración que se muestra en la figura. Si se sabe que la partícula inicia desde el origen con $v_0 = -18\ ft/s$, $a)$ construya las curvas $v - t$ y $x - t$ para $0 < t < 20\ s$, $b)$ determine la posición y la velocidad de la partícula y la distancia total recorrida cuando $t = 12\ s$.



El cambio en v es igual al área bajo la curva $a - t$:

$0 < t < 4s$: $\quad v_4 - v_0 = (3\ ft/s^2)(4s) = +12\ ft/s$ $\qquad$ $\boldsymbol{v_0 = -18ft/s}$

$4s < t < 10s$: $\quad v_{10} - v_4 = (6\ ft/s^2)(6s) = +36\ ft/s$ $\qquad$ $\boldsymbol{v_4 = -6ft/s}$

$10s < t < 12s$: $\quad v_{12} - v_{10} = (-5\ ft/s^2)(2s) = -10\ ft/s$ $\qquad$ $\boldsymbol{v_{10} = +30ft/s}$

$12s < t < 20s$: $\quad v_{20} - v_{12} = (-5\ ft/s^2)(8s) = -40\ ft/s$ $\qquad$ $\boldsymbol{v_{20} = -20ft/s}$

El cambio en x es igual al área bajo la curva $v - t$:

$0 < t < 4s$: $\quad x_4 - x_0 = \frac{1}{2}(-18 - 6)(4) = -48ft$ $\qquad$ $\boldsymbol{x_0 = 0}$

$4s < t < 5s$: $\quad x_5 - x_4 = \frac{1}{2}(-6)(1) = -3ft$ $\qquad$ $\boldsymbol{x_4 = -48ft}$

$5s < t < 10s$: $\quad x_{10} - x_5 = \frac{1}{2}(+30)(5) = +75ft$ $\qquad$ $\boldsymbol{x_5 = -51ft}$

$12s < t < 10s$: $\quad x_{12} - x_{10} = \frac{1}{2}(+30 + 20)(2) = +50ft$ $\qquad$ $\boldsymbol{x_{10} = +24ft}$

$16s < t < 12s$: $\quad x_{16} - x_{12} = \frac{1}{2}(+20)(4) = +40ft$ $\qquad$ $\boldsymbol{x_{16} = +144ft}$

$20s < t < 16s$: $\quad x_{20} - x_{16} = \frac{1}{2}(-20)(4) = -40ft$ $\qquad$ $\boldsymbol{x_{20} = +74ft}$

b) De las curvas anteriores, leemos:

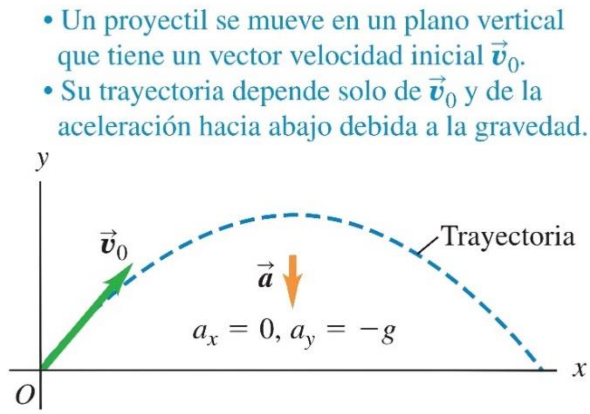
Para $t = 12s$: $\quad v_{12} = +20\ ft/s,\ \ x_{12} = +74\ ft$

Distancia recorrida: De $t = 0s$ a $t = 12s$:

De $t = 0s$ a $t = 5s$: Distancia recorrida = $51ft$

De $t = 5s$ a $t = 12s$: Distancia recorrida = $(51 + 74) = 125\ ft$

Movimiento de proyectiles



Un proyectil es un cuerpo que recibe una velocidad inicial y luego sigue una trayectoria determinada completamente por los efectos de la aceleración gravitacional y la resistencia del aire.

Para analizar este tipo de movimiento tan común, partiremos de un modelo idealizado que representa el proyectil como una partícula con aceleración constante (debida a la gravedad) tanto en magnitud como en dirección. Se ignoran los efectos de la resistencia del aire.

El movimiento de un proyectil siempre se limita a un plano vertical, determinado por la dirección de la velocidad inicial. Esto se debe a que la aceleración causada por la gravedad es exclusivamente vertical; la gravedad no puede acelerar al proyectil de forma lateral. Por lo tanto, este movimiento es bidimensional. Llamaremos al plano de movimiento, el plano de coordenadas $\boldsymbol{xy}$, con el eje $\boldsymbol{x}$ horizontal y el eje $\boldsymbol{y}$ vertical hacia arriba.

La componente x de la aceleración es cero, y la componente y es constante e igual a $-g$. (Por definición, g siempre es positiva, pero por las direcciones de coordenadas elegidas, a_y es negativa). Entonces, podemos analizar el movimiento de un proyectil como una combinación de movimiento horizontal con velocidad constante y movimiento vertical con aceleración constante.

Las componentes de $\vec{a}$ son $a_x = 0;\ a_y = -g$

Considerando primero el movimiento en x, sustituimos a_x por 0 en las ecuaciones y obtenemos:

$$v_x = v_{0x}$$

$$x = x_0 + v_{0x^t}$$

Para el movimiento en y, sustituimos x por y, v_x por v_y, v_{0x} por v_{0y}, y a_x por $a_y = -g$:

$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$y = y_0 + v_{oy^t} - \frac{1}{2}gt^2$$

Por lo general, lo más sencillo es tomar la posición inicial (en $t = 0$) como el origen; así

$$x_0 = y_0 = 0$$

También podemos representar la velocidad inicial $\vec{v}$ con su magnitud v_0 (la rapidez inicial) y su ángulo $\propto_0$ con el eje x. En términos de estas cantidades, las componentes v_{0x} y v_{0y} de la velocidad inicial son: $v_{0x} = v_0 \cos \propto_0$ $\qquad$ $v_{0y} = v_0 \sin \propto_0$

$$x = (v_0 cos \propto_0)t$$

$$y = (v_0 sen \propto_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_x = v_0 cos \propto_0$$

$$v_y = v_0 sen \propto_0 - gt$$

Estas ecuaciones describen la posición y velocidad del proyectil en cualquier instante *t.* En cualquier instante, la distancia r del proyectil al origen (la magnitud del vector de posición $\vec{\boldsymbol{r}}$) está dada por:

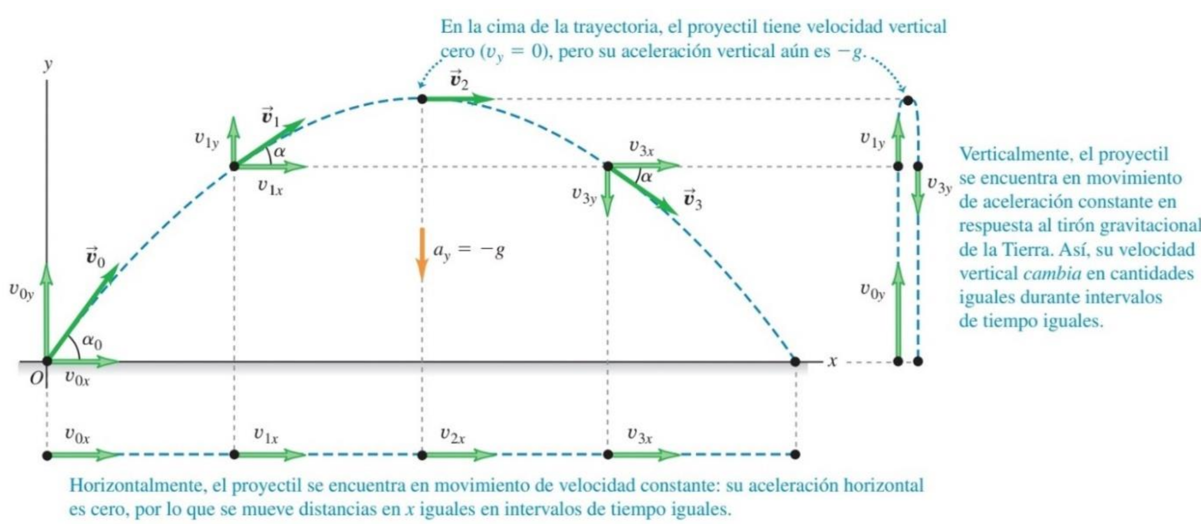
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

La rapidez del proyectil (la magnitud de su velocidad) en cualquier instante es:

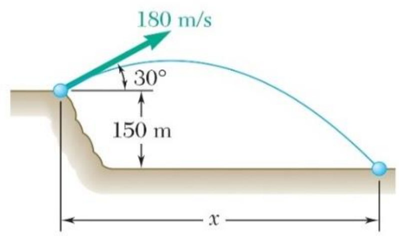
$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$$

La dirección de la velocidad, en términos del ángulo a que forma con el eje $\boldsymbol{x}$, está dada por

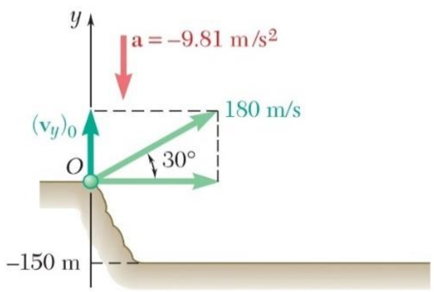
$$tan \propto = \frac{v_y}{v_x}$$



1. Un proyectil se lanza desde el borde de un acantilado de 150m con una velocidad inicial de 180 m/s a un ángulo de 30° con respecto a la horizontal. Si se ignora la resistencia del aire, encuentre: a) La distancia horizontal desde el cañón hasta el punto en el que el proyectil golpea el suelo, b) la elevación máxima sobre el suelo que alcanza el proyectil.



Los movimientos vertical y horizontal se considerarán por separado.



Movimiento vertical: movimiento uniformemente acelerado

Eligiendo el sentido positivo del eje y hacia arriba y situando el origen O en el cañón, se tiene

$$(v_y)_0 = (180\ m/s)sen\ 30° = 90\ m/s$$

$$a = -9.81\frac{m}{s^2}$$

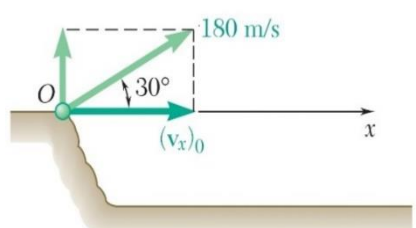
Al sustituir en las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado, se tiene

$$v_y = (v_y)_0 + at \qquad v_y = 90 - 9.81t$$

$$y = (v_y)_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \qquad y = 90t - 4.90t^2$$

$$v_y^2 = (v_y)_0^2 + 2ay \qquad v_y^2 = 8100 - 19.63y$$

Movimiento horizontal: Movimiento uniforme



Al elegir el sentido positivo del eje x hacia la derecha, se tiene

$$(v_x)_0 = (180\ m/s)cos\ 30° = 155.9\ m/s$$

Al sustituir en las ecuaciones del movimiento uniforme, se obtiene

$$x = (v_x)_0 t \qquad x = 155.9t$$

a) Distancia horizontal

Cuando el proyectil choca con el suelo, se tiene

$$y = -150\ m$$

Al sustituir este valor en la ecuación para el movimiento vertical, se escribe:

$$-150 = 90t - 4.90t^2 \qquad t^2 - 18.37t - 30.6 = 0 \qquad t = 19.91\ s$$

Si se sustituye $t = 19.91\ s$ en la ecuación para el movimiento horizontal, se encuentra

$$x = 155.9(19.91) \qquad x = 3100\ m$$

b) Elevación máxima. Cuando el proyectil alcanza su máxima elevación, se tiene que $v_y = 0$; al considerar este valor en la ecuación (3) para el movimiento vertical, se escribe

$$0 = 8100 - 19.62y \qquad y = 413\ m$$

$$\text{Máxima elevación sobre el suelo} = 150\ m + 413\ m = 563\ m$$

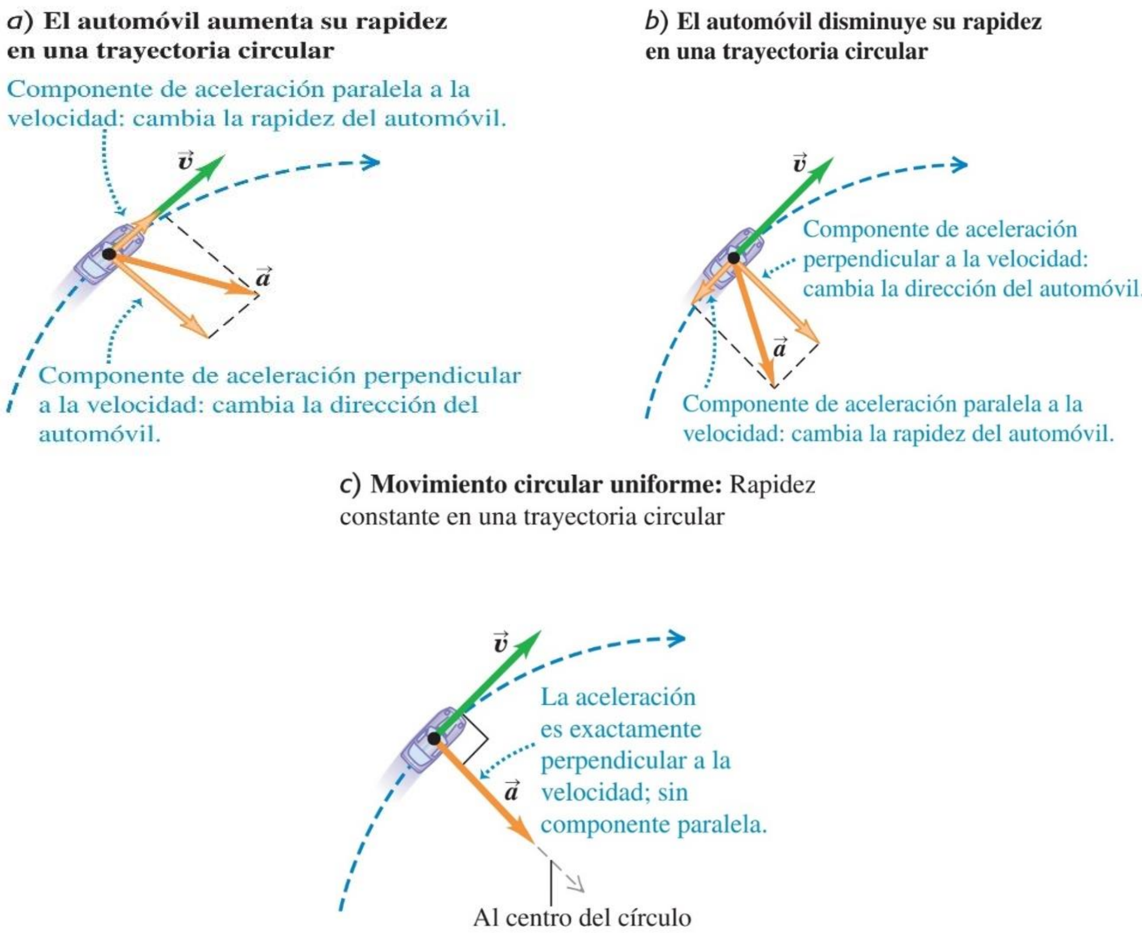
Movimiento No Rectilíneo

Cuando una partícula se mueve en una trayectoria curva, la dirección de su velocidad cambia. Esto significa que la partícula debe tener una componente de aceleración perpendicular a la trayectoria, incluso si la rapidez es constante.

Movimiento circular uniforme

Cuando una partícula se mueve en un círculo con rapidez constante, el movimiento se conoce como movimiento circular uniforme. Un automóvil que da vuelta en una curva de radio constante con rapidez constante, un satélite en órbita circular, son ejemplos de estos. No hay componente de aceleración paralela (tangente) a la trayectoria; si la hubiera, la rapidez cambiaría. El vector aceleración es perpendicular (normal) a la trayectoria y, por lo tanto, se dirige hacia adentro al centro de la trayectoria circular. Esto causa el cambio en la dirección de la velocidad, sin que cambie la rapidez.

Un automóvil con movimiento circular. Si el automóvil tiene movimiento circular uniforme como en c), la rapidez es constante y la aceleración se dirige hacia el centro de la trayectoria circular.



$$a_{rad} = \frac{v^2}{R}$$

Esta ecuación describe la magnitud del movimiento circular uniforme. Se agrega el subíndice "rad" para recordar que la dirección de la aceleración instantánea en cualquier punto siempre se encuentra a lo largo de un radio del círculo (hacia el centro). En conclusión, en el movimiento circular uniforme, la magnitud arad de la aceleración instantánea es igual al cuadrado de la rapidez v dividido entre el radio R del círculo; su dirección es perpendicular a $\vec{\boldsymbol{v}}$ y hacia adentro sobre el radio.

Como la aceleración en el movimiento circular uniforme siempre apunta al centro del círculo, en ocasiones se le llama *aceleración centrípeta*.

También podemos expresar la magnitud de la aceleración en el movimiento circular uniforme en términos del periodo *T* del movimiento, es decir, el tiempo que dura una revolución (una vuelta completa alrededor del círculo). En un tiempo *T*, la partícula recorre una distancia igual a la circunferencia $2\pi R$, así que su rapidez es

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

Al sustituir esto en la ecuación anterior, obtenemos la expresión alternativa:

$$a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

Movimiento circular no uniforme

Si la rapidez varía, tenemos un movimiento circular no uniforme. En el movimiento circular no uniforme, las ecuaciones nos siguen dando la componente radial de la aceleración $a_{rad} = v^2/R$, que siempre es perpendicular a la velocidad instantánea y dirigida al centro del círculo. Sin embargo, puesto que la rapidez v tiene valores distintos en diferentes puntos del movimiento, el valor de a_{rad} no es constante. La aceleración radial (centrípeta) es mayor en el punto del círculo donde la rapidez es mayor.

En el movimiento circular no uniforme también hay una componente de aceleración paralela a la velocidad instantánea. Esta es la componente, y aquí la llamamos a_{tan} para destacar que es tangente al círculo. La componente de aceleración tangencial a_{tan} es igual a la tasa de cambio de la rapidez. Entonces:

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R}\,;\ a_{tan} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

Son las ecuaciones que describen el movimiento circular no uniforme.

La componente tangencial tiene la misma dirección de la velocidad si la partícula está acelerando, y la dirección opuesta si está frenando.

Observe que las dos cantidades,

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} \text{ y } \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|$$

no son iguales. La primera, igual a la aceleración tangencial, es la tasa de cambio de la rapidez; es igual a cero siempre que una partícula se mueve con rapidez constante, incluso cuando cambia la dirección de su movimiento (como en el movimiento circular uniforme). La segunda es la magnitud de la aceleración vectorial; es igual a cero solo cuando el vector aceleración es cero, es decir, cuando la partícula se mueve en línea recta con rapidez constante. En el movimiento circular uniforme $\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = a_{rad} = \frac{v^2}{r}$; en el movimiento circular no uniforme también existe una componente tangencial de la aceleración, de manera que $\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \sqrt{a_{rad}{}^2 + a_{tan}{}^2}$.