CALCULO I MODULO 3

CALCULO I MODULO 3

MOVIMIENTO RECTILÍNEO

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Sea

$$s = t^2 + 2t - 3$$

Entonces, cuando $t = 0$, $s = -3$; por tanto, la partícula está a 3 m a la izquierda del punto O cuando $t = 0$. Cuando $t = 1$, $s = 0$; de modo que la partícula se encuentra en el punto O en el segundo 1. Cuando $t = 2$, $s = 5$; por lo que la partícula se encuentra a 5m a la derecha del punto O a los 2s. Cuando $t = 3$, $s = 12$; de manera que la partícula está ubicada a 12m a la derechadel punto O a los 3s.

La figura 1 ilustra las diferentes posiciones de la partícula para valores específicos de t.

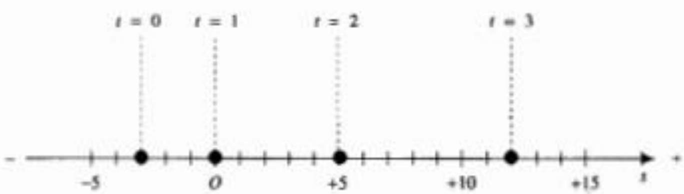


FIGURA 1

Entre el tiempo $t = 1$ y $t = 3$, la partícula se mueve desde el punto donde $s = 0$ hasta el punto donde $s = 12$; por lo que en el intervalo de 2 segundos el cambio en la distancia desde O es 12 m. *La velocidad promedio* de la partícula es la razón del cambio en la distancia dirigida desde un punto fijo al cambio en el tiempo. De modo que el número de metros por segundo de la velocidad promedio de la partícula desde $t = 1$ a $t = 3$ es $\frac{12}{2} = 6$. Desde $t = 0$ a $t = 2$, el cambio en la distancia dirigida desde O hasta la partícula es de 8 m, por lo que el números de metros por segundo de la velocidad promedio de la partícula, en este intervalo de 2 segundos, es $\frac{8}{2} = 4$. ◀

2.5.1 Definición de velocidad instantánea

Si f es una función definida por la ecuación

$$s = f(t)$$

y una partícula se desplaza a lo largo de una recta, tal que s es el número de unidades de la distancia dirigida de la partícula desde un punto fijo sobre la recta en t unidades de tiempo, entonces la **velocidad instantánea** de la partícula a las t unidades de tiempo es v unidades de velocidad, donde

$$v = f'(t) \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{ds}{dt}$$

si existe.

EJEMPLO 1 Una partícula se desplaza a lo largo de una recta horizontal de acuerdo con la ecuación

$$s = t^3 - 12t^2 + 36t - 24 \qquad t \geq 0$$

Determine los intervalos de tiempo en los que la partícula se está moviendo a la derecha y en los que se mueve hacia la izquierda. También determine el instante cuando la partícula cambia de sentido.

Solución

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \\ &= 3t^2 - 24t + 36 \\ &= 3(t^2 - 8t + 12) \\ &= 3(t - 2)(t - 6) \end{aligned}$$

La velocidad instantánea es cero cuando $t = 2$ y cuando $t = 6$. Por tanto, la partícula está en reposo en estos instantes. La partícula se mueve hacia la derecha cuando v es positiva y se mueve hacia la izquierda cuando v es negativa. Se determina el signo de v en diferentes intervalos de t, y los resultados se muestran en la tabla 1.

Tabla 1

	$t - 2$	$t - 6$	*Conclusión*
$0 \leq t < 2$	$-$	$-$	v es positivo; la partícula se mueve hacia la derecha
$t = 2$	0	$-$	v es cero; la partícula está en reposo
$2 < t < 6$	+	$-$	v es negativo; la partícula se mueve hacia la izquierda
$t = 6$	+	0	v es cero; la partícula está en reposo
$6 < t$	+	+	v es positivo; la partícula se mueve hacia la derecha

EJEMPLO 2 Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde el piso con una velocidad inicial de 64 pies/s. Si el sentido positivo de la distancia desde su punto inicial es hacia arriba, t segundos es el tiempo que transcurre desde que la pelota fue lanzada, y s pies es la distancia de la pelota desde el punto inicial a los t segundos, entonces la ecuación del movimiento es

$$s = -16t^2 + 64t$$

(a) Simule el movimiento de la pelota en la graficadora. **(b)** Estime qué tan alto llegará la pelota y cuántos segundos le tomará para alcanzar su punto más alto. **(c)** Confirme analíticamente las estimaciones del inciso (b). **(d)** Obtenga la velocidad instantánea de la pelota en 1 s y 3 s. **(e)** Calcule la rapidez de la pelota en 1 s y 3 s. **(f)** Calcule la velocidad instantánea cuando llega al piso.

Solución

(a) Suponga que la pelota se mueve sobre la recta vertical $x = 2$. Active la graficadora en modo paramétrico. Sean

$$x_1(t) = 2 \quad \text{y} \quad y_1(t) = -16t^2 + 64t$$

Para determinar los valores de t de interés, en la ecuación dada se considera $s = 0$ y se obtiene

$$\begin{aligned} -16t(t-4) &= 0 \\ t = 0 \qquad t &= 4 \end{aligned}$$

Por tanto, la pelota está en el piso a los 0 s y 4 s, lo que indica que $0 \le t \le 4$. En el rectángulo de inspección de $[0, 4]$ por $[-25, 100]$, sean $t_{mín} = 0$, $t_{máx} = 4$ y $t_{step} = 0.05$. Ahora se presiona la tecla TRACE y después la tecla *flecha a la izquierda* manteniéndose oprimida hasta que el cursor esté en $t = 0$. La figura 5 muestra la pantalla de la graficadora con su nueva apariencia. Presione la tecla *flecha a la derecha* y observe que la pelota, representada por el cursor, se mueve hacia arriba y hacia abajo a lo largo de la recta vertical $x = 2$.

(b) Al aproximar el valor de y como 64 y el valor de t como 2 cuando la pelota está en su punto más alto, se estima que la pelota alcanzará su altura máxima de 64 pie a los 2 s.

(c) Para confirmar analíticamente las estimaciones del inciso (b), primero se calcula $v(t)$, el número de pies por segundo de la velocidad instantánea de la pelota a los t segundos. Como $v(t) = \dfrac{ds}{dt}$,

$$v(t) = -32t + 64 \tag{2}$$

Debido a que la pelota alcanzará su altura máxima cuando el sentido del movimiento cambia, esto es, cuando $v(t) = 0$, se sustituye $v(t)$ por 0 en la ecuación (2) y se obtiene

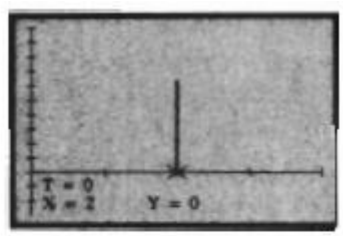
$$\begin{aligned} -32t + 64 &= 0 \\ t &= 2 \end{aligned}$$

De la ecuación de movimiento cuando $t = 2$, resulta que $s = 64$. Por tanto, la pelota alcanza su máxima altura en el punto a 64 pie del punto inicial a los 2 s. Estos resultados confirman las estimaciones del inciso (b).

(d) $v(1) = -32(1) + 64 \Leftrightarrow v(1) = 32$; de modo que al final de 1 s la pelota se eleva con una velocidad instantánea de 32 pie/s. $v(3) = -32(3) + 64 \Leftrightarrow v(3) = -32$; de manera que al final de 3 s la pelota cae con una velocidad instantánea de -32 pie/s.

(e) $|v(t)|$ es el número de pies por segundo de la rapidez de la pelota a los t segundos; así, $|v(1)| = 32$ y $|v(3)| = 32$.

(f) Se determinó anteriormente que la pelota llegará al piso a los 4 s. Como $v(4) = -64$, su velocidad instantánea cuando alcance el piso será de -64 pie/s. ◀



$[0, 4]$ por $[-25, 100]$

$x_1(t) = 2, \; y_1(t) = -16t^2 + 64t$

FIGURA 5

EJEMPLO 3 Una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal de acuerdo a la ecuación

$$s = 3t^2 - t^3 \qquad t \geq 0 \tag{7}$$

donde s metros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. Si v metros por segundo es la velocidad instantánea y a metros por segundo por segundo es la aceleración instantánea a los t segundos, encuentre v y a en términos de t. Describa la posición y movimiento de la partícula en una tabla que incluya los intervalos de tiempo en los que la partícula se mueve a la izquierda, y en los que se mueve a la derecha, los intervalos

en los que la velocidad es creciente y en los que es decreciente, los intervalos en los que la rapidez es creciente y en los que es decreciente, y la posición de la partícula con respecto al origen durante estos intervalos de tiempo. Muestre el comportamiento del movimiento mediante una figura análoga a la figura 2.

Solución Como $s = 3t^2 - t^3$ y $v = \dfrac{ds}{dt}$,

$$v = 6t - 3t^2 \tag{8}$$

Puesto que $a = \dfrac{dv}{dt}$,

$$a = 6 - 6t \tag{9}$$

Ahora se determinarán los valores de t cuando alguna de las cantidades s, v o a es cero. De (7),

$$s = 0 \quad \text{cuando} \quad t = 0 \quad \text{o} \quad t = 3$$

De (8),

$$v = 0 \quad \text{cuando} \quad t = 0 \quad \text{o} \quad t = 2$$

De (9),

$$a = 0 \quad \text{cuando} \quad t = 1$$

La tabla 3 muestra los valores de s, v y a cuando t es igual a 0, 1, 2 y 3. También se ha indicado el signo de s, v y a en los intervalos de t sin incluir a 0, 1, 2 y 3. Entonces se puede hacer una conclusión acerca de la posición y del movimiento de la partícula para los diferentes valores de t.

EJEMPLO 4 Una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo a la ecuación de movimiento

$$s = \frac{1}{2}t^2 + \frac{4t}{t+1}$$

donde s metros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. Si v metros por segundo es la velocidad instantánea y a metros por segundo por segundo es la aceleración instantánea de la partícula a los t segundos, determine t, s y v cuando $a = 0$.

Solución

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad\qquad a = \frac{dv}{dt}$$

$$= t + \frac{4}{(t+1)^2} \qquad\qquad = 1 - \frac{8}{(t+1)^3}$$

Al considerar $a = 0$ se tiene

$$\frac{(t+1)^3 - 8}{(t+1)^3} = 0$$

$$(t+1)^3 = 8$$

De donde el único valor real de t se obtiene de la raíz cúbica principal de 8, de modo que $t + 1 = 2$; esto es, $t = 1$. Cuando $t = 1$,

$$s = \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{4 \cdot 1}{1+1} \qquad\qquad v = 1 + \frac{4}{(1+1)^2}$$

$$= 2.5 \qquad\qquad = 2$$

Conclusión: La aceleración es 0 en 1 s cuando la partícula está a 2.5 m del origen y se mueve hacia la derecha a una velocidad de 2 m/s.

Problemas

En los ejercicios 1 a 8, una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal de acuerdo a la ecuación indicada, donde s metros es la distancia dirigida a partir del origen a los t segundos. Determine la velocidad instantánea $v(t)$ metros por segundo a los t segundos, después calcule $v(t_1)$ para el valor particular de t_1.

2. $s = 8 - t^2; t_1 = 5$

6. $s = 4t^3 + 2t - 1; t_1 = \frac{1}{2}$

7. $s = \frac{2t}{4+t}; t_1 = 0$

8. $s = \frac{1}{t} + \frac{3}{t^2}; t_1 = 2$

En los ejercicios 25 y 26, una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación indicada, donde s pies es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. Determine el tiempo en el que la aceleración instantánea es cero, después determine la distancia dirigida de la partícula desde el origen y la velocidad instantánea en ese tiempo.

25. $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t + 1;\ t \geq 0$

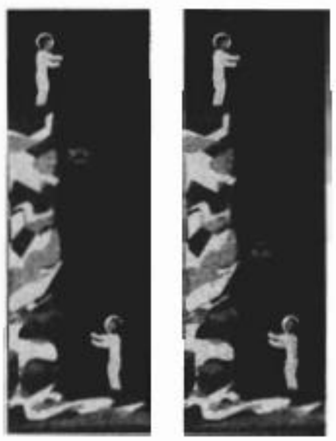
En los ejercicios 27 y 28, una partícula se desplaza a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación indicada donde a los t segundos, s metros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen, v metros por segundo es la velocidad instantánea de la partícula y a metros por segundo por segundo es la aceleración instantánea de la partícula. Determine v y a en términos de t. Elabore una tabla semejante a la tabla 3 que proporcione una descripción de la posición y del movimiento de la partícula. Incluya en la tabla los intervalos de tiempo en los que la partícula se mueve hacia la derecha y en los que se desplaza a la izquierda, los intervalos en los que la velocidad es creciente y en los que es decreciente, los intervalos en los que la rapidez es creciente y en los que es decreciente, y la posición de la partícula con respecto al origen durante estos intervalos de tiempo. Muestre el comportamiento del movimiento mediante una figura similar a la figura 10.

27. $s = t^3 - 9t^2 + 15t;\ t \geq 0$

31. En la ecuación (10), el coeficiente -16 de t^2 es igual a $\frac{1}{2}(-32)$ donde -32 pie/s^2 es la aceleración debida a la gravedad de un objeto que se mueve sobre una recta vertical cercano a la superficie de la Tierra, donde la resistencia del aire no se considera. Como la aceleración debida a la gravedad de la Luna es -5.5 pie/s^2, la ecuación de movimiento para un objeto que se desplaza sobre una recta vertical cercano a la superficie de la Luna es

$$s = -2.75t^2 + v_0t + s_0$$

Suponga que un astronauta deja caer una piedra desde la orilla de un risco y la piedra llega al piso en 4 s. Después un segundo astronauta, en la parte inferior del risco, toma la piedra y la lanza de regreso al primer astronauta. **(a)** ¿Cuál es la altura del risco? **(b)** ¿Con qué velocidad llega la piedra al piso? **(c)** ¿Con qué velocidad, por lo menos, debe lanzar la piedra el segundo astronauta de modo que le llegue al primero?



32. En lugar de la Luna, suponga que los dos astronautas del ejercicio 31 realizan lo mismo en Marte, donde la aceleración debida a la gravedad es de -12 pie/s^2. Escriba la ecuación correspondiente al movimiento y responda las mismas preguntas que en el ejercicio 31, considerando ahora que la piedra llega al piso en 3 s.

33. Suponga que un corredor en una carrera de 100 metros está a s metros de la línea de meta t segundos después del inicio de la carrera, donde

$$s = 100 - \frac{1}{4}(t^2 + 33t)$$

Determine la rapidez del corredor **(a)** al inicio de la carrera, y **(b)** cuando el corredor cruza la línea de meta.

34. Si se empuja una pelota en un plano inclinado con una velocidad inicial de 24 pie/s, entonces $s = 24t + 10t^2$, donde s pies es la distancia de la pelota desde el punto inicial a los t segundos, y la dirección positiva se considera hacia abajo sobre el plano inclinado. **(a)** ¿Cuál es la velocidad instantánea de la pelota a los t_1 segundos? **(b)** ¿Cuánto tardará la velocidad en llegar a 48 pies/s?

35. Se golpea una bola de billar de modo que se desplaza en línea recta. Si s centímetros es la distancia de la bola desde su posición inicial a los t segundos, entonces $s = 100t^2 + 100t$. Si la bola golpea una banda que se encuentra a 39 cm de su posición inicial, ¿a qué velocidad la golpea?

36. Dos partículas, A y B, se mueven hacia la derecha sobre una recta horizontal. Ellas inician su movimiento en un punto O, s metros es cada distancia dirigida de cada partícula desde O a los t segundos, y las ecuaciones de movimiento son

$s = 4t^2 + 5t$ (para la partícula A)
$s = 7t^2 + 3t$ (para la partícula B)

Si $t = 0$ en el inicio, ¿para qué valores de t la velocidad de la partícula A excederá la velocidad de la partícula B?

Solucionario

2. $s = 8 - t^2$; $v(t) = \frac{ds}{dt} = -2t$; $v(5) = -10$

6. $s = 4t^3 + 2t - 1$; $v(t) = \frac{ds}{dt} = 12t^2 + 2$; $v(\frac{1}{2}) = 5$

7. $s = \frac{2t}{4+t}$; $v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{2(4+t) - 2t}{(4+t)^2} = \frac{8}{(4+t)^2}$; $v(0) = \frac{1}{2}$

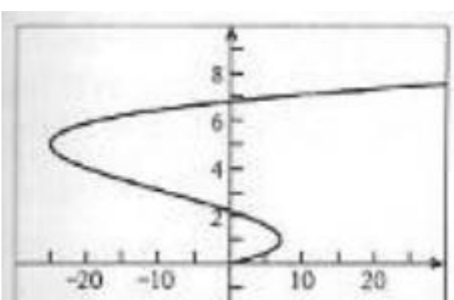
8. $s = \frac{1}{t} + \frac{3}{t^2}$; $t_1 = 2$

$v(t) = D_t(t^{-1} + 3t^{-2}) = -t^{-2} - 6t^{-3}$; $v(2) = -2^{-2} - 6(2^{-3}) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1$

25. $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t + 1$ ▷ $v = t^2 - 3t + 2$, $a = \frac{dv}{dt} = 2t - 3 = 0$ when $t = \frac{3}{2}$. $s(\frac{3}{2}) = \frac{7}{4}$. $v(\frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}$

27. $s = t^3 - 9t^2 + 15t = t(t^2 - 9t + 15) = t(t - t_1)(t - t_2)$, where the roots of $t^2 - 9t + 15 = 0$ are $t_1 = \frac{1}{2}(9 - \sqrt{81 - 4 \cdot 15}) = \frac{1}{2}(9 - \sqrt{21}) \approx 2.21$ and $t_2 = \frac{1}{2}(9 + \sqrt{21}) \approx 6.79$.
$v = D_t s = 3t^2 - 18t + 15 = 3(t^2 - 6t + 15) = 3(t-1)(t-5)$; $a = D_t s = 6t - 18 = 6(t-3)$

	s	v	a	Conclusion
$t = 0$	0	+	−	Particle is at the origin and it is moving to the right The velocity is decreasing. The speed is decreasing.
$0 < t < 1$	+	+	−	Particle is right of the origin and it is moving to the right The velocity is decreasing. The speed is decreasing.
$t = 1$	7	0	−	Particle is 7 m right of the origin and it is changing its direction of motion from right to left. The velocity is decreasing. The speed is increasing.
$1 < t < t_1$	+	−	−	Particle is right of the origin, and it is moving to the left The velocity is decreasing. The speed is increasing.
$t = t_1$	0	−	−	Particle is at the origin, and it is moving to the left The velocity is decreasing. The speed is increasing.
$t_1 < t < 3$	−	−	−	Particle is left of the origin, and it is moving to the left The velocity is increasing. The speed is decreasing.
$t = 3$	−	−	0	Particle is left of the origin, and it is moving to the left The velocity is not changing; so the speed is not changing.
$3 < t < 5$	−	−	+	Particle is left of the origin, and it is moving to the left The velocity is increasing. The speed is decreasing.
$t = 5$	−25	0	+	Particle is 25 m left of the origin, and it is changing its direction of motion from left to right. The velocity is increasing. The speed is decreasing.
$5 < t < t_2$	−	+	+	Particle is left of the origin, and it is moving to the right The velocity is increasing. The speed is increasing.
$t = t_2$	0	+	+	Particle is at the origin, and it is moving to the right The velocity is increasing. The speed is increasing.
$t_2 < t$	+	+	+	Particle is right of the origin, and it is moving to the right The velocity is increasing. The speed is increasing.



Exercise 27

does it hit the ground? (c) What velocity is needed to throw it back to its original position?

31. On the moon, $a = -5.5$; $T = 4$. The stone starts at the origin. $s = -2.75t^2$. $s(4) = -44$; the cliff is 44 ft high. $v = -5.5t$, $v(4) = -22$. The stone hits the ground at 22 ft/sec and 22 ft/sec is the velocity needed to return it.

32. On Mars, $a = -12$; $T = 3$

▹ (a) The stone starts at the origin so $s_0 = 0$. The equation of motion is $s = -6t^2$.
Because $s(3) = -54$, the cliff is 54 ft high.
(b) $v(t) = D_t s = D_t(-6t^2) = -12t$ and $v(3) = -36$.
The stone hits the ground at 36 ft/sec and 36 ft/sec is the velocity needed to return it.

33. A sprinter is s meters from the finish t sec after the start, where $s = 100 - \frac{1}{4}(t^2 + 33t)$. Find his speed (a) at the start and (b) at the finish.

▹ $v = -\frac{ds}{dt} = \frac{1}{4}(2t + 33)$. (a) $v(0) = \frac{33}{4} = 8.25$. (b) $s = 0$ when $t^2 + 33t - 400 = 0$, $t = t_1 = \frac{1}{2}(-33 + \sqrt{2689}) \approx 9.42$
$v(t_1) = \frac{1}{4}\sqrt{2689} \approx 12.96$.

34. s ft is the distance of the ball from the starting point at t sec. $s = 24t + 10t^2$; $v(t) = \frac{ds}{dt} = 24 + 20t$

(a) $v(t_1) = 24 + 20t_1$. Therefore, at $t_1$sec the instantaneous velocity of the ball is $(24 + 20t_1)$ft/sec.
(b) $v(t) = 48$ when $24 + 20t = 48$; $20t = 24$; $t = \frac{6}{5}$. Hence it takes $\frac{6}{5}$ sec for the velocity to increase to 48 ft/sec.

35. s cm is the distance of the ball from its initial position at t sec. $s = 100t^2 + 100t$; $v(t) = \frac{ds}{dt} = 200t + 100$
The billiard ball hits the cushion when $s = 39$ so we have
$100t^2 + 100t = 39$; $100t^2 + 100t - 39 = 0$; $(10t - 3)(10t + 13) = 0$; $t = \frac{3}{10}$ or $t = -\frac{13}{10}$
We reject the negative value of t. Therefore, the billiard ball hits the cushion in $\frac{3}{10}$ sec and $v(\frac{3}{10}) = 160$. Thus the velocity of the billiard ball is 160cm/sec when it hits the cushion.

36. Two particles, A and B, move to the right along a horizontal line. They start at point O, s meters is the directed distance of the particles from O at t seconds, and the equations of motion are

$$s = 4t^2 + 5t \quad \text{(for particle A)} \qquad s = 7t^2 + 3t \quad \text{(for particle B)}$$

If $t = 0$ at the start, for what values of t will the velocity of particle A exceed the velocity of particle B?

▹ The velocity of A is given by $\quad v_A = D_t(4t^2 + 5t) = 8t + 5$

The velocity of B is given by $\quad v_B = D_t(7t^2 + 3t) = 14t + 3$

We want to find when $v_A > v_B$, or equivalently, when

$$8t + 5 > 14t + 3$$
$$-6t > -2$$
$$t < \tfrac{1}{3}$$

Thus, the velocity of A exceeds the velocity of B when $0 \le t < \frac{1}{3}$.

VARIABLES EN EL TIEMPO RELACIONADAS

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Una escalera de 25 pie de longitud está apoyada contra una pared vertical como se muestra en la figura 1. La base de la escalera se jala horizontalmente alejándola de la pared a 3 pie/s. Suponga que se desea determinar qué tan rápido se desliza hacia abajo la parte superior de la escalera sobre la pared cuando su base se encuentra a 15 pie de la pared.

Paso 1 Primero defina las variables comenzando con t.

t: el número de segundos del tiempo que ha transcurrido desde que la escalera comenzó a deslizarse hacia abajo sobre la pared.

x: el número de pies de la distancia desde la base de la escalera a la pared a los t segundos.

y: el número de pies de la distancia desde el piso a la parte superior de la escalera a los t segundos.

Paso 2 Escriba cualquier hecho numérico acerca de x, y y sus derivadas con respecto a t.

Como la base de la escalera es jalada horizontalmente alejándola de la pared a 3 pie/s, $\frac{dx}{dt} = 3$.

Paso 3 Escriba lo que desea determinar.

Se desea determinar $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 15$.

Paso 4 Escriba una ecuación que relacione a x y y.

Del teorema de Pitágoras,

$$y^2 = 625 - x^2 \tag{1}$$

Paso 5 Derive los dos miembros de (1) con respecto a t

$$2y\frac{dy}{dt} = -2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dt} \tag{2}$$

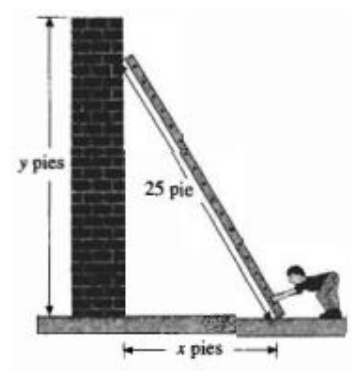


FIGURA 1

Paso 6 Sustituya los valores conocidos de x, y y $\frac{dx}{dt}$ en la ecuación anterior y resuélvala para $\frac{dy}{dt}$.

Cuando $x = 15$, de (1) $y = 20$. Como $\frac{dx}{dt} = 3$, se obtiene de (2)

$$\left.\frac{dy}{dt}\right]_{y=20} = -\frac{15}{20} \cdot 3$$
$$= -\frac{9}{4}$$

El signo menos indica que y decrece conforme t aumenta.

Paso 7 Escriba una conclusión.

Conclusión: La parte superior de la escalera se desliza hacia abajo sobre la pared a la tasa de 2.25 pie/s cuando la base está a 15 pie de la pared. ◀

Sugerencias para resolver un problema de tasas de variación relacionadas

Lea el problema cuidadosamente de modo que lo entienda. Para poder entenderlo, con frecuencia es útil inventar un ejemplo específico que contemple una situación semejante en la que todas las cantidades sean conocidas. Otra ayuda es dibujar una figura, si es factible, como en el ejemplo ilustrativo 1 y los ejemplo 1, 2 y 4. Después aplique los siguientes pasos.

1. Defina las variables de la ecuación que obtendrá. Debido a que éstas representan números, las definiciones de las variables deben indicar este hecho. Por ejemplo, si el tiempo se mide en segundos, entonces la variable t debe definirse como el número de segundos de tiempo o, equivalentemente, t segundos es el tiempo. Asegúrese de definir primero t, y las otras variables deben indicar su dependencia de t.
2. Escriba los hechos numéricos conocidos acerca de las variables y de sus derivadas con respecto a t.
3. Escriba lo que se desea determinar.
4. Escriba una ecuación que relacione las variables que dependen de t. Esa ecuación será un modelo matemático de la situación.
5. Derive con respecto a t los dos miembros de la ecuación obtenida en el paso 4 para relacionar las tasas de variación de las variables.
6. Sustituya los valores de las cantidades conocidas en la ecuación del paso 5, y despeje la cantidad deseada.
7. Escriba una conclusión que consista de una o más oraciones completas y que responda las preguntas del problema. No olvide que la conclusión debe contener las unidades correctas de medición.

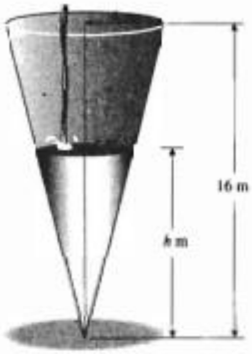


FIGURA 2

EJEMPLO 1 Cierta cantidad de agua fluye a una tasa de 2 m^3/min hacia el interior de un depósito cuya forma es la de un cono invertido de 16 m de altura y 4 m de radio. ¿Qué tan rápido sube el nivel del agua cuando ésta ha alcanzado 5 m de profundidad?

Solución Refiérase a la figura 2.

Paso 1 Se definen las variables, primero t y después las otras variables en términos de t.

t: el número de minutos del tiempo que ha transcurrido desde que el agua comenzó a fluir dentro del tanque.

h: el número de metros de la altura del nivel del agua a los t minutos.

r: el número de metros del radio de la superficie del agua a los t minutos.

V: el número de metros cúbicos del volumen de agua en el tanque a los t minutos. Observe que V, r y h, son funciones de t.

Paso 2 Puesto que el agua fluye dentro del tanque a una tasa de 2 m^3/min, entonces $\frac{dV}{dt} = 2$.

Paso 3 Se desea determinar $\frac{dh}{dt}$ cuando $h = 5$.

Paso 4 En cualquier tiempo, el volumen del agua en el tanque puede expresarse como el volumen de un cono, como indica la figura 2.

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h \qquad (3)$$

Como se estableció en los pasos 2 y 3, se conoce $\frac{dV}{dt}$, y se desea determinar $\frac{dh}{dt}$. Por tanto, se necesita una ecuación que involucre a V y h. Así, primero se expresa r en términos de h observando que, de los triángulos semejantes de la figura 2, se tiene

$$\frac{r}{h} = \frac{4}{16} \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{4}h$$

Si se sustituye este valor de r en (3), se obtiene

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{4}h\right)^2 (h) \quad \Leftrightarrow \quad V = \frac{1}{48}\pi h^3$$

Paso 5 Al diferenciar los dos miembros de esta ecuación con respecto a t, resulta:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{16}\pi h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

Paso 6 Ahora se sustituye 2 por $\frac{dV}{dt}$ y se resuelve la ecuación para $\frac{dh}{dt}$, obtiéndose

$$\frac{dh}{dt} = \frac{32}{\pi h^2}$$

Así,

$$\left.\frac{dh}{dt}\right]_{h=5} = \frac{32}{25\pi} \approx 0.4074$$

Al convertir metros a centímetros se tiene: 0.4074 m/min = 40.74 cm/min.

Paso 7 A continuación se escribirá la conclusión.

Conclusión: El nivel del agua sube a una tasa de 40.74 cm/min cuando el agua ha alcanzado una profundidad de 5 m.

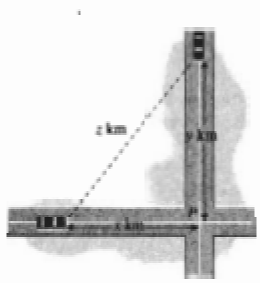


FIGURA 3

▶ ***EJEMPLO 2*** Dos automóviles, uno va hacia el este a una tasa de 90 km/h, y el otro hacia el sur a 60 km/h, se dirigen hacia la intersección de dos carreteras. ¿A qué tasa se están aproximando uno al otro en el instante en que el primer automóvil está a 0.2 km de la intersección y el segundo se encuentra a 0.15 km de dicha intersección?

Solución Consulte la figura 3, donde el punto P es la intersección de las dos carreteras.

Paso 1

t: el número de horas del tiempo que ha transcurrido desde que los automóviles empezaron a aproximarse a P.

x: el número de kilómetros de la distancia a partir del primer automóvil a P a las t horas.

y: el número de kilómetros de la distancia a partir del segundo automóvil a P a las t horas.

z: el número de kilómetros de la distancia entre los dos automóviles a las t horas.

Paso 2 Como el primer carro se acerca a P a una tasa de 90 km/h, y x está decreciendo conforme t crece, entonces $\frac{dx}{dt} = -90$. De la misma manera, $\frac{dy}{dt} = -60$.

Paso 3 Se desea determinar $\frac{dz}{dt}$ cuando $x = 0.2$ y $y = 0.15$.

Paso 4 Del teorema de Pitágoras

$$z^2 = x^2 + y^2 \tag{4}$$

Paso 5 Al diferenciar los dos miembros de (4) con respecto a t, se obtiene

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{z} \tag{5}$$

Paso 6 Cuando $x = 0.2$ y $y = 0.15$, de (4) se tiene que $z = 0.25$. En (5) se sustituyen $\frac{dx}{dt}$ por -90, $\frac{dy}{dt}$ por -60, x por 0.2, y por 0.15 y z por 0.25 para obtener

$$\left.\frac{dz}{dt}\right]_{z=0.25} = \frac{(0.2)(-90) + (0.15)(-60)}{0.25}$$
$$= -108$$

Paso 7

Conclusión: En el instante en cuestión, los carros se aproximan uno al otro a una tasa de 108 km/h. ◀

EJEMPLO 3 Suponga que en cierto mercado, x miles de canastillas de naranjas se surten diariamente cuando p dólares es el precio por canastilla. La ecuación de oferta es

$$px - 20p - 3x + 105 = 0$$

Si el suministro diario decrece a una tasa de 250 canastillas por día, ¿a qué tasa está variando el precio cuando la oferta diaria es de 5 000 canastillas?

Solución Sea t días el tiempo que ha transcurrido desde que el suministro diario empezó a decrecer.

Las variables p y x están definidas como funciones de t en el enunciado del problema.

Debido a que el suministro diario está decreciendo a una tasa de 250 canastillas por día, entonces $\frac{dx}{dt} = -\frac{250}{1\,000}$; esto es, $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{4}$. Se desea determinar $\frac{dp}{dt}$ cuando $x = 5$. De la ecuación de oferta dada, al diferenciar implícitamente con respecto a t se obtiene

$$p\frac{dx}{dt} + x\frac{dp}{dt} - 20\frac{dp}{dt} - 3\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{3 - p}{x - 20} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Cuando $x = 5$, se deduce de la ecuación de oferta que $p = 6$. Debido a que $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{4}$, se tiene de la ecuación anterior

$$\left.\frac{dp}{dt}\right]_{p=6} = \frac{3 - 6}{5 - 20}\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{20}$$

Conclusión: El precio de una canastilla de naranjas está decreciendo a la tasa de \$0.05 por día cuando la oferta diaria es de 5 000 canastillas.

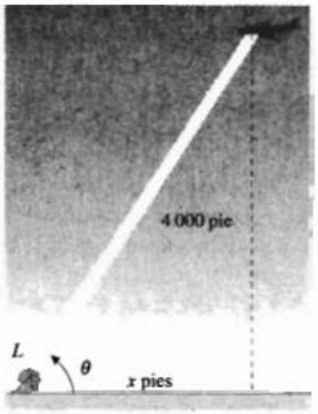


FIGURA 4

▶ ***EJEMPLO 4*** Un avión vuela hacia el oeste con una velocidad de 500 pie/s a una altura de 4 000 pie y un rayo de luz de un faro de rastreo ubicado en tierra, incide en la parte inferior del avión. Si la luz se mantiene sobre el avión, ¿qué tan rápido gira el rayo de luz cuando el avión se encuentra a una distancia horizontal de 2 000 pie al este del faro.

Solución Consulte la figura 4, en la que el faro está en el punto L y en un instante particular el avión se encuentra en el punto P.

Sea t segundos el tiempo que transcurre desde que la luz del faro incidió en el avión.

x: el número de pies hacia el este de la distancia horizontal del avión desde el faro a los t segundos.

θ: el número de radianes del ángulo de elevación del avión desde el faro a los t segundos.

Puesto que $\frac{dx}{dt} = -500$, y como se desea determinar $\frac{d\theta}{dt}$ cuando $x = 2\,000$, se considera

$$\tan\theta = \frac{4\,000}{x}$$

Al diferenciar los dos miembros de esta ecuación con respecto a t se obtiene

$$\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} = -\frac{4\,000}{x^2}\frac{dx}{dt}$$

Si se sustituye $\frac{dx}{dt}$ por -500 en la ecuación anterior y al dividir entre $\sec^2\theta$ se tiene

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\,000\,000}{x^2\sec^2\theta} \tag{6}$$

Cuando $x = 2\,000$, $\tan\theta = 2$. Como $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$, $\sec^2\theta = 5$. Al sustituir estos valores en (6) se tiene, cuando $x = 2\,000$,

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \frac{2\,000\,000}{4\,000\,000(5)}\\ &= \tfrac{1}{10}\end{aligned}$$

<u>**Conclusión:**</u> En el instante dado, la medida del ángulo está creciendo a la tasa de $\frac{1}{10}$ rad/s, y ésta es la rapidez con la que está girando el faro. ◀

Problemas

En los ejercicios 1 a 8, x y y son funciones de la tercera variable t.

1. Si $2x + 3y = 8$ y $\frac{dy}{dt} = 2$, obtenga $\frac{dx}{dt}$.

2. Si $\frac{x}{y} = 10$ y $\frac{dx}{dt} = -5$, calcule $\frac{dy}{dt}$.

4. Si $2 \operatorname{sen} x + 4 \cos y = 3$ y $\frac{dy}{dt} = 3$, obtenga $\frac{dx}{dt}$ en $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi)$.

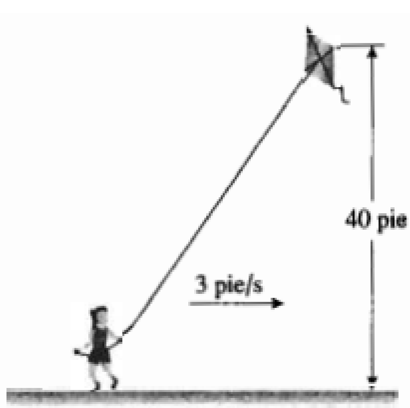
5. Si $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \frac{5}{4}$ y $\frac{dx}{dt} = -1$, calcule $\frac{dy}{dt}$ en $(\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi)$.

7. Si $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ y $\frac{dy}{dt} = 3$, obtenga $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 1$.

8. Si $y(\tan x + 1) = 4$ y $\frac{dy}{dt} = -4$, determine $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = \pi$.

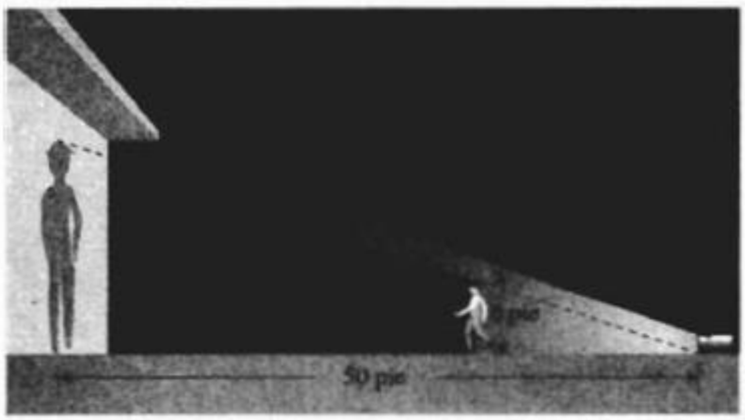
En los problemas de tasas de variación relacionadas de los ejercicios siguientes, defina precisamente todas las variables como cantidades (números y unidades de medición). Utilice la variable t para representar el tiempo y defina las otras variables de modo que dependan de t. Asegúrese de escribir una conclusión.

9. Un niño vuela una cometa a una altura de 40 pie, y lo hace moviéndose horizontalmente a una tasa de 3 pie/s. Si la cuerda está tensa, ¿a qué tasa se afloja cuando la longitud de la cuerda suelta es de 50 pie?



13. Se deja caer arena en un montículo de forma cónica a una tasa de 10 m^3/min. Si la altura del montículo siempre es el doble del radio de la base, ¿a qué tasa se incrementa la altura cuando ésta es de 8 m?

16. Un hombre de 6 pie de estatura camina hacia un edificio a una tasa de 5 pie/s, si en el piso se encuentra una lámpara a 50 pie del edificio, ¿qué tan rápido se acorta la sombra del hombre proyectada en el edificio cuando él está a 30 pie de éste?

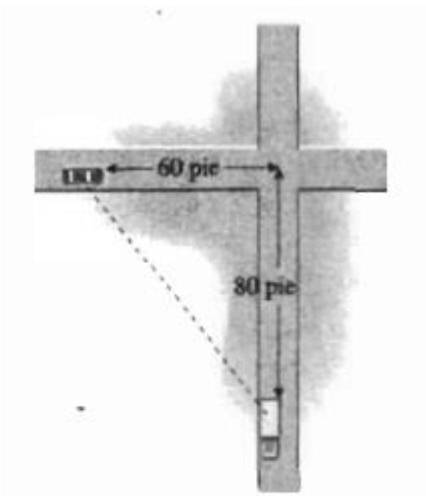


18. Una bacteria celular es de forma esférica. Si el radio de la bacteria crece a una tasa de 0.01 μm (micra) por día cuando el radio de ésta es de 1.5 μm, ¿cuál es la tasa de crecimiento del volumen de la bacteria en ese tiempo?

20. Para la bacteria del ejercicio 18, ¿cuál es la tasa del área de la superficie de la bacteria cuando su radio es de 1.5 μm?

25. Se arroja una piedra en un estanque tranquilo, formándose ondas circulares concéntricas que se dispersan. Si el radio de la región afectada crece a una tasa de 16 cm/s, ¿a qué tasa crece el área de la región afectada cuando su radio es de 4 cm?

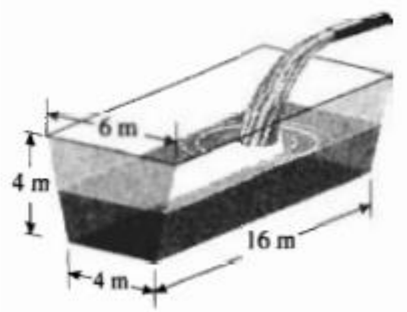
27. Un automóvil se desplaza a una tasa de 30 pie/s y se aproxima a un crucero. Cuando el automóvil está a 120 pie del crucero, un camión que viaja a una tasa de 40 pie/s pasa por el crucero. El automóvil y el camión se encuentran sobre carreteras que son perpendiculares. ¿Qué tan rápido se separan el automóvil y el camión 2 s después de que el camino deja el crucero?



31. La ecuación de oferta para cierta mercancía es $x = 1\,000\sqrt{3p^2 + 20p}$, donde cada mes se suministran x unidades cuando p dólares es el precio por unidad. Determine la tasa de variación de la oferta si el precio actual es de \$20 por unidad y el precio crece a una tasa de \$0.50 por mes.

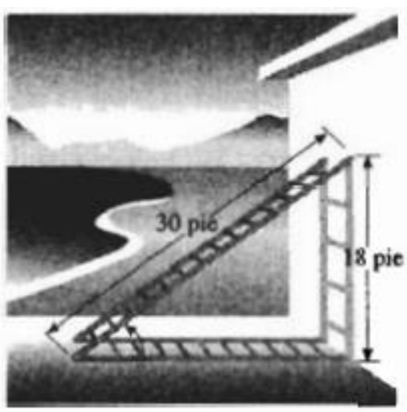
34. La medida de uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo decrece a una tasa de $\frac{1}{36}\pi$ rad/s. Si la longitud de la hipotenusa es constante y de 40 cm, determine qué tan rápido varía el área del triángulo cuando la medida del ángulo agudo es de $\frac{1}{6}\pi$ rad.

36. Un depósito horizontal para agua mide 16 m de longitud y sus extremos son trapecios isósceles con una altura de 4 m, base menor de 4 m y base mayor de 6 m. Se vierte agua en el depósito a una tasa de 10 m^3/min. ¿Qué tan rápido sube el nivel del agua cuando ésta ha alcanzado una profundidad de 2 m?



37. En el ejercicio 36, si el nivel del agua decrece a una tasa de 25 cm/min cuando el agua tiene una profundidad de 3 m, ¿a qué tasa sale el agua del depósito?

40. Una escalera de 30 pie de longitud está apoyada contra una pared, de modo que su extremo superior se desliza hacia abajo a una tasa de $\frac{1}{2}$ pie/s, ¿cuál es la tasa de variación de la medida del ángulo agudo formado por la escalera con el piso cuando el extremo superior está a 18 pie sobre el piso?



43. Después de la explosión de despegue, un transbordador espacial se eleva verticalmente y un radar, ubicado a 1 000 yd de la rampa de lanzamiento, sigue al transbordador. ¿Qué tan rápido gira el radar 10 segundos después de la explosión de despegue si en ese instante la velocidad del transbordador es de 100 yd/s encontrándose éste a 500 yd del suelo?

Solucionario

1. $2x + 3y = 8$; $2\frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} = 0$; $\frac{dx}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{dy}{dt}$. Because $\frac{dy}{dt} = 2$, then $\frac{dx}{dt} = -\frac{3}{2} \cdot 2 = -3$.

2. $\frac{x}{y} = 10$; $x = 10y$; $\frac{dx}{dt} = 10\frac{dy}{dt}$. Because $\frac{dx}{dt} = -5$, then $-5 = 10\frac{dy}{dt}$; $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}$

4. If $2 \sin x + 4 \cos y = 3$ and $\frac{dy}{dt} = 3$, find $\frac{dx}{dt}$ at $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi)$.

▷ We differentiate with respect to t on both sides of the given equation. Because x and y are functions of t, we must apply the chain rule. Thus

$$2 \cos x \cdot \frac{dx}{dt} - 4 \sin y \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

We let $\frac{dy}{dt} = 3$, $x = \frac{1}{6}\pi$ and $y = \frac{1}{3}\pi$ and solve for $\frac{dx}{dt}$.

$$2(\cos \tfrac{1}{6}\pi)\frac{dx}{dt} - 4(\sin \tfrac{1}{3}\pi)(3) = 0; \qquad 2(\tfrac{1}{2}\sqrt{3})\frac{dx}{dt} - 4(\tfrac{1}{2}\sqrt{3})(3) = 0; \quad \sqrt{3}\frac{dx}{dt} - 6\sqrt{3} = 0; \qquad \frac{dx}{dt} = 6$$

5. $\sin^2 x + \cos^2 y = \frac{5}{4}$; $2 \sin x \cos x\frac{dx}{dt} + 2 \cos y(-\sin y)\frac{dy}{dt} = 0$; $\sin 2x\frac{dx}{dt} - \sin 2y\frac{dy}{dt} = 0$

$\frac{dy}{dt} = \frac{\sin 2x}{\sin 2y}\frac{dx}{dt}$. Let $\frac{dx}{dt} = -1$, $x = \frac{3}{4}\pi$, $y = -\pi$. Then $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=3\pi/4} = \frac{\sin \frac{4}{3}\pi}{\sin \frac{3}{2}\pi}(-1) = -\frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{-1} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

7. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$; $x^{1/2} + y^{1/2} = 5$; $\frac{1}{2}x^{-1/2}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}y^{-1/2}\frac{dy}{dt} = 0$; $-\frac{1}{x^{1/2}} = -\frac{1}{y^{1/2}}\frac{dy}{dt}$; $\frac{dx}{dt} = -\frac{x^{1/2}}{y^{1/2}}\frac{dy}{dt}$

Because $\frac{dy}{dt} = 3$ and when $x = 1$, $y = 16$, then $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=1} = -\frac{1^{1/2}}{16^{1/2}} \cdot 3 = -\frac{3}{4}$.

8. If $y(\tan x + 1) = 4$ and $\frac{dy}{dt} = -4$, find $\frac{dx}{dt}$ when $x = \pi$.

▷ Because the value of y is not given, we solve for y.

$$y = 4(\tan x + 1)^{-1}$$

Differentiating with respect to t on both sides, we obtain

$$\frac{dy}{dt} = -4(\tan x + 1)^{-2} \sec^2 x \cdot \frac{dx}{dt}$$

We let $\frac{dy}{dt} = -4$ and $x = \pi$ and solve for $\frac{dx}{dt}$.

$$-4 = -4(\tan \pi + 1)^{-2} \sec^2 \pi \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$-4 = -4\frac{dx}{dt}; \quad \frac{dx}{dt} = 1$$

9. At t sec, let x ft be the horizontal distance from the child to the kite, $x > 0$, and let S ft be the length of the string. Then from the Pythagorean Theorem, $S^2 = 40^2 + x^2$; $2S\frac{dS}{dt} = 2x$; $\frac{dS}{dt} = \frac{x}{S}$.
When $S = 50$ we have $2500 = 1600 + x^2$; $x^2 = 900$; $x = 30$. Because $\frac{dx}{dt} = 3$, we have $\left.\frac{dS}{dt}\right|_{S=50} = \frac{30}{50} \cdot 3 = \frac{9}{5}$.
Therefore, when the length of the string released is 50 ft, the string is being paid out at the rate of $\frac{9}{5}$ ft/sec.

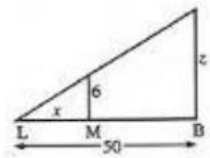
11. At t min, let r ft be the radius and V ft^3 be the volume of the spherical snowball.
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$; $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^3\frac{dr}{dt}$. Because $\frac{dV}{dt} = 8$, $\frac{dr}{dt} = \frac{8}{4\pi r^2} = \frac{2}{\pi r^2}$. Therefore $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=2} = \frac{2}{\pi \cdot 4} = \frac{1}{2\pi}$.
Hence when the snowball is 4ft in diameter, the radius is increasing at the rate of $\frac{1}{2\pi}$ ft/min.

13. At t min, let V cubic meters be the volume of the conical pile, let r meters be the radius of the base of the pile, and let h meters be the height of the pile.

Because $r = \frac{1}{2}h$, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(\frac{1}{2}h)^2 = \frac{1}{12}\pi h$; $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$; $\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$. Because $\frac{dV}{dt} = 10$, then $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=8} = \frac{4 \cdot 10}{\pi \cdot 8^2} = \frac{5}{8\pi}$. Thus, when the pile is 8 m high, the height is increasing at the rate of $\frac{5}{8\pi}$ m/min.

16. A man 6 ft tall is walking toward a building at the rate of 5 ft/sec. If there is a light on the ground 50 ft from the building, how fast is his shadow on the building growing shorter when he is 30 ft from the building?

▸ At t sec, let x ft be the distance from the man to the light and z ft the length of his shadow on the building. The figure shows the man at point M, between point L (the light), and point B (the base of the building). Because the man is walking at the rate of 5 ft/sec, we are given that $dx/dt = 5$. Because dz/dt is the rate of change of the length of the shadow, we want to find dz/dt when the man is 30 ft from the building, that is, when $x = 50 - 30 = 20$. By similar triangles we have



18. At t days, r μm is the radius and V μm^3 is the volume of the spherical cell. When $r = 1.5$, $\frac{dr}{dt} = 0.01$. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=1.5} = 4\pi r^2 \left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=1.5} = 4\pi(1.5)^2(0.01) = 0.09\pi$

When the radius of the cell is 1.5 μm, its volume is increasing at the rate of $0.09\pi \approx 0.028$ μm^3 per day.

20. A bacterial cell is spherical in shape. If the radius of the cell is increasing at the rate of 0.01 micrometers per day when it is 1.5 μm, what is the rate of increase of the surface area of the cell at that time?

▸ t days after the cell began to grow, let r μm be its radius and S μm^2 be its surface area.

Because the cell is growing at the rate of 0.01 μm/day, we are given that

$$\frac{dr}{dt} = 0.01$$

We must find $\frac{dS}{dt}$ when $r = 1.5$. The area of a sphere is given by the formula $\quad S = 4\pi r^2$

Differentiating with respect to t on both sides, we have $\quad \frac{dS}{dt} = 8\pi r\frac{dr}{dt}$

Substituting for r and $\frac{dr}{dt}$, we obtain $\quad \frac{dS}{dt} = 8\pi(1.5)0.01 = 0.12\pi \approx 0.377$

Thus the surface area is increasing at the rate of 0.377 μm^2/day when the radius is 1.5 μm.

31. x units are supplied per month when p dollars is the price per unit. $x = 1000\sqrt{3p^2 + 20p}$;

$\frac{dx}{dp} = \frac{500(6p+20)}{\sqrt{3p^2+20p}}\frac{dp}{dt}$. At the present, $p = 20$ and $\frac{dp}{dt} = \frac{1}{2}$. Thus, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{p=20} = \frac{500(120+20)\frac{1}{2}}{\sqrt{3 \cdot 20^2 + 20 \cdot 20}} = \frac{35000}{40} = 875.$

Hence, the supply is increasing at the rate of 875 units per month.

34. The hypotenuse is 40 cm; α is such that $d\alpha/dt = \frac{1}{36}\pi$ rad/sec. The measures of sides are 40 sin α and 40 cos α. A cm^2 is the area. $A = \frac{1}{2}(40 \sin\alpha)(40\cos\alpha) = 400 \sin 2\alpha$. When $\alpha = \frac{1}{6}\pi$,

$\frac{dA}{dt} = 800 \cos 2\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt} = 800 \cos \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{36}\pi = 800 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{36}\pi = \frac{100}{9}\pi$. The area is increasing at about 34.9 cm^2/sec.

In Exercises 36 and 37, a horizontal trough is 16 meters long, and its ends are isosceles trapezoids with an altitude of 4 m, a lower base of 4 m, and and upper base of 6 m.

36. Water is being poured into the trough at the rate of 10 m^3/min. How fast is the water level rising when the water is 2 m deep?

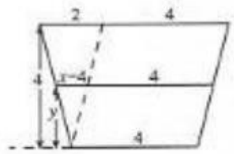
37. If the water level is decreasing at the rate of 25 cm/min when the water is 3 m deep, at what rate is water being drawn from the trough?

The figure illustrates one end of the trough. Let y m be the depth of the water, x m the width of the surface of the water, and V m^3 its volume, t minutes after water began pouring into the trough

Because water is being poured into the trough at the rate of 10 m^3/min, we are given that $dV/dt = 10$. Since dy/dt is the rate at which the depth of the water is changing, we want to find dy/dt when $y = 2$. The water that is in the trough is in the shape of a prism with altitude 16 m and base a trapezoid. Because the volume of a prism is the area of the base times its altitude, and the area of a trapezoid is given by the formula $A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \cdot h$, we have

$$V = \tfrac{1}{2}(4 + x) \cdot y \cdot 16; \; V = 8y(x + 4) \qquad (1)$$

We express x as a function of y. By similar triangles in the figure,



$$\frac{x - 4}{y} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad x = \frac{y}{2} + 4$$

Substituting the value for x into Eq. (1), we obtain

$$V = 8y\left(\frac{y}{2} + 8\right); \qquad V = 4y^2 + 64y; \qquad \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = (8y + 64)\frac{dy}{dt}$$

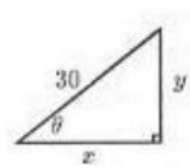
In Exercise 36, we substitute $\frac{dV}{dt} = 10$ and $y = 2$. Then $\quad 10 = 80\frac{dy}{dt}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{8}$

Thus, the water level is rising at the rate of $\frac{1}{8}$ m/min when the water is 2 m deep.

In Exercise 37, we substitute $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{4}$ and $y = 3$. Then $\quad \frac{dV}{dt} = (8 \cdot 3 + 64)\left(-\frac{1}{4}\right) = -22.$

Thus, water is being drawn from the trough at the rate of 22m^3/min.

40. If a ladder of length 30 ft that is leaning against a wall has its upper end sliding down the wall at the rate of $\frac{1}{2}$ft/sec, what is the rate of change of the measure of the acute angle made by the ladder with the ground when the upper end is 18 ft above the ground?



At t sec, let the distance from the bottom of the wall to the bottom of the ladder be x ft and to the top of the ladder be y ft. Let θ radians be the measure of the acute angle made by the ladder with the ground at t sec.

See the figure. $\sin\theta = \frac{y}{30}$; $\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{30}\frac{dy}{dt}$; $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{30\cos\theta}\frac{dy}{dt}$

When $y = 18$, $x = \sqrt{30^2 - 18^2} = \sqrt{576} = 24$; so $\cos\theta = \frac{24}{30}$; $30\cos\theta = 24$. Since $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}$, we have $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{y=18} = \frac{1}{24}(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{48}$. Hence, the measure of the acute angle made by the ladder with the ground is decreasing at the rate of $\frac{1}{48}$ rad/sec at the given instant.

43. At t sec after lift-off the rocket is x yd high and the radar dish makes an angle θ with the ground. After 10 sec the average velocity is 50 yd/sec so its height is 500 yd. $x = 1000\tan\theta$, $\frac{dx}{dt} = 1000\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}$;

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{dx/dt}{1000(\tan^2\theta + 1)} = \frac{100}{1000[(500/1000)^2 + 1]} = \frac{2}{25}.$$ The dish revolves at $\frac{2}{25}$ rad/sec.

VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE FUNCIONES

3.1.1 Definición de valor máximo relativo

La función f tiene un **valor máximo relativo** en el número c si existe un intervalo abierto que contiene a c, en el que f está definida, tal que $f(c) \geq f(x)$ para toda x en ese intervalo.

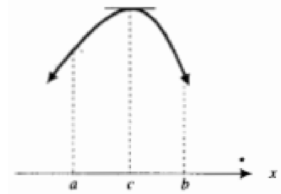


FIGURA 1

Las figuras 1 y 2 muestran una porción de la gráfica de una función que tiene un valor máximo relativo en c.

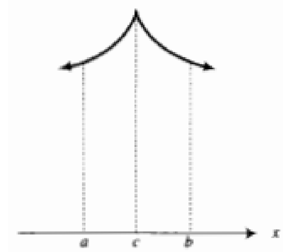


FIGURA 2

3.1.2 Definición de valor mínimo relativo

La función f tiene un **valor mínimo relativo** en el número c si existe un intervalo abierto que contiene a c, en el que f está definida, tal que $f(c) \leq f(x)$ para toda x en este intervalo.

Las figuras 3 y 4 muestran una porción de la gráfica de una función que tiene un valor mínimo relativo en c.

Si una función tiene un valor máximo relativo o mínimo relativo en c, entonces se dice que la función tiene un **extremo relativo** en c.

El teorema siguiente se utiliza para determinar los números posibles en los que una función tiene un extremo relativo.

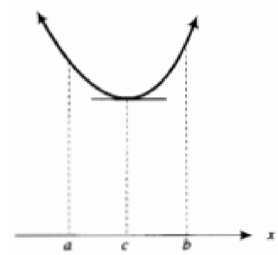


FIGURA 3

3.1.3 Teorema

Si $f(x)$ existe para todos los valores de x en el intervalo abierto (a, b), y si f tiene un extremo relativo en c, donde $a < c < b$, y además $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

3.1.4 Definición de número crítico

Si c es un número del dominio de la función f, y si $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe, entonces c es un **número crítico** de f.

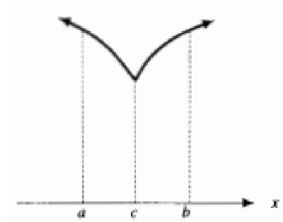


FIGURA 4

EJEMPLO 2

(a) Determine los números críticos de la función definida por

$$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$$

Apoye las respuestas del inciso (a) gráficamente en dos formas: **(b)** trace la gráfica de f; **(c)** trace la gráfica de NDER($f(x)$, x).

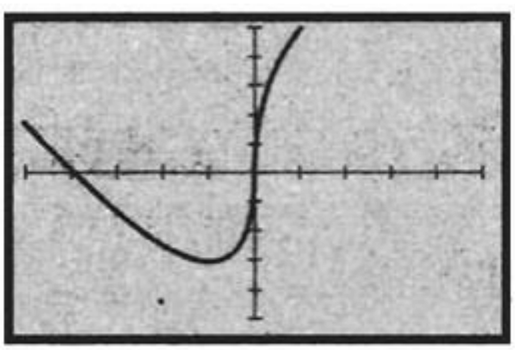
Solución

(a)
$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{4}{3}x^{1/3} + \tfrac{4}{3}x^{-2/3} \\ &= \tfrac{4}{3}x^{-2/3}(x + 1) \\ &= \frac{4(x + 1)}{3x^{2/3}} \end{aligned}$$

Cuando $x = -1$, $f'(x) = 0$, y cuando $x = 0$, $f'(x)$ no existe. Tanto -1 como 0 están en el dominio de f; por tanto, los números críticos de f son -1 y 0.

(b) La figura 10 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$. La gráfica parece tener una rectatangente horizontal en el punto $(-1, -3)$ y una recta tangente vertical en el punto $(0, 0)$. Por tanto, la pendiente de la recta tangente es 0 cuando $x = -1$ y la recta tangente no tiene pendiente cuando $x = 0$. Estos hechos apoyan las respuestas del inciso (a).

(c) La figura 11 presenta la gráfica de NDER($f(x)$, x) trazada en el rectángulo de inspección de $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$. Como la gráfica de $f'(x)$ intersecta al eje x en $(-1, 0)$, $f'(-1) = 0$. La gráfica de $f'(x)$ tiene al eje y como asíntota vertical, lo cual indica que $f'(0)$ no existe. De nuevo, esto apoya las respuestas del inciso (a). ◀



$[-5, 5]$ por $[-5, 5]$

$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$

FIGURA 10

EJEMPLO 3 Determine los números críticos de la función definida por

$$g(x) = \operatorname{sen} x \cos x$$

Solución Como $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$,

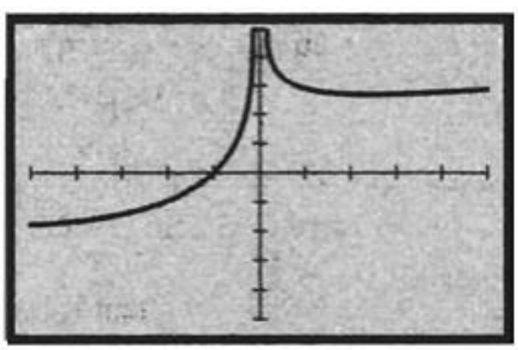
$$\begin{aligned} g(x) &= \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x \\ g'(x) &= \tfrac{1}{2}(\cos 2x)2 \\ &= \cos 2x \end{aligned}$$

Puesto que $g'(x)$ existe para toda x, los únicos números críticos son aquellos para los que $g'(x) = 0$. Como $\cos 2x = 0$ cuando

$$2x = \tfrac{1}{2}\pi + k\pi \quad \text{donde } k \text{ es cualquier número entero}$$

así, los números críticos de g son $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$, donde k es cualquier número entero. ◀

Con frecuencia se trata con funciones definidas en un intervalo dado, y se desea determinar el valor de función más grande o más pequeño en el intervalo. Estos intervalos pueden ser cerrados, abiertos o cerrados en un extremo y abiertos en el otro. El valor más grande de la función en un intervalo se denomina *valor máximo absoluto*, y el valor más pequeño de la función en el intervalo se llama *valor mínimo absoluto*. A continuación se dan las definiciones precisas.



[−5, 5] por [−5, 5]

NDER $(x^{4/3} + 4x^{1/3}, x)$

FIGURA 11

3.1.5 Definición de valor máximo absoluto en un intervalo

La función f tiene un **valor máximo absoluto en un intervalo** si existe algún número c en el intervalo tal que $f(c) \geq f(x)$ para toda x del intervalo. El número $f(c)$ es el valor máximo absoluto de f en el intervalo.

3.1.6 Definición de valor mínimo absoluto en un intervalo

La función f tiene un **valor mínimo absoluto en un intervalo** si existe algún número c en el intervalo tal que $f(c) \leq f(x)$ para toda x del intervalo. El número $f(c)$ es el valor mínimo absoluto de f en el intervalo.

3.1.7 Teorema del valor extremo

Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en $[a, b]$.

El teorema del valor extremo establece que la continuidad de una función en un intervalo cerrado es una condición suficiente para garantizar que la función tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en el intervalo. Sin embargo, no es una condición necesaria. Por ejemplo, la función cuya gráfica se muestra en la figura 18 tiene un valor máximo absoluto en $x = c$ y un valor mínimo absoluto en $x = d$, aunque la función es discontinua en el intervalo abierto $(-1, 1)$.

Un extremo absoluto de una función continua en un intervalo cerrado debe ser un extremo relativo o un valor de función en un extremo del intervalo. Debido a que una condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo en un número c es que c sea un número crítico, de modo que el valor máximo absoluto y el valor mínimo absoluto de una función f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ puede determinarse mediante el procedimiento siguiente:

1. Determine los valores de la función en los números críticos de f en (a, b).
2. Determine los valores de $f(a)$ y $f(b)$.
3. El mayor de los valores determinados en los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto, y el menor de los valores es el valor mínimo absoluto.

EJEMPLO 4 Determine los extremos absolutos de f en $[-2, 3]$ si

$$f(x) = x^3 - 6x - 1$$

y apoye la respuesta gráficamente.

Solución Como f es continua en $[-2, 3]$, puede aplicarse el teorema del valor extremo. Para determinar los números críticos de f, primero se calcula $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 6$$

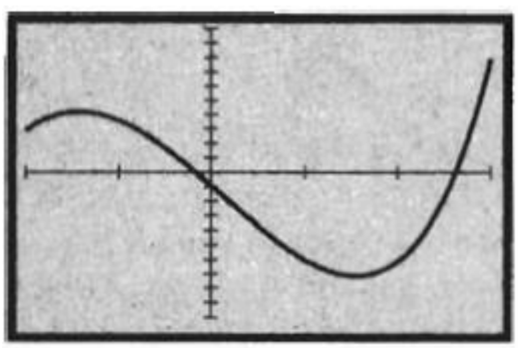
Debido a que $f'(x)$ existe para todos los números reales, los únicos números críticos serán los valores de x para los que $f'(x) = 0$. Al igualar $f'(x)$ a cero y resolver para x se tiene

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6 &= 0 \\ x &= \pm\sqrt{2} \\ x &\approx \pm 1.41 \end{aligned}$$

De modo que los números críticos de f son aproximadamente ± 1.41 y cada uno de estos números está en el intervalo cerrado $[-2, 3]$. Los valores de función de los números críticos y de los extremos se muestran en la tabla 1.

Por tanto, el valor máximo absoluto de f en el intervalo $[-2, 3]$ es 8, el cual ocurre en el extremo derecho 3, y el valor mínimo absoluto de f en el intervalo $[-2, 3]$ es aproximadamente -6.66, el cual ocurre en el número crítico 1.41.

La figura 19 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-2, 3]$ por $[-10, 10]$. Esta gráfica apoya las respuestas dadas. ◀



$[-2, 3]$ por $[-10, 10]$

$f(x) = x^3 - 6x - 1$

FIGURE 19

EJEMPLO 5 Estime gráficamente los extremos absolutos de f en [1, 5] si

$$f(x) = (x - 2)^{2/3}$$

y confirme las respuestas analíticamente.

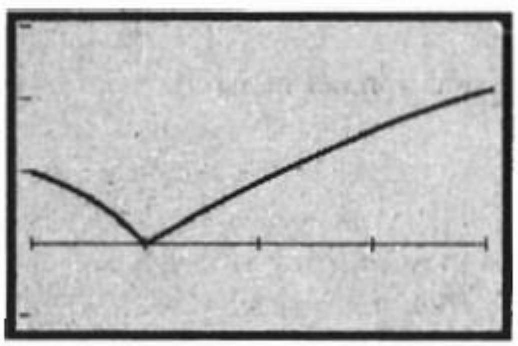
Solución La gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [1, 5] por [−1, 3] se muestra en la figura 20. De la gráfica, el valor mínimo absoluto es 0 y ocurre en $x = 2$. El valor máximo absoluto se tiene en el extremo derecho 5, y en la calculadora, se estima que $f(5) = 2.08$.

Al aplicar el teorema del valor extremo se confirman las respuestas analíticamente, puesto que f es continua en [1, 5]. Como

$$f'(x) = \frac{2}{3(x - 2)^{1/3}}$$

no existe valor de x para el cual $f'(x) = 0$. Sin embargo, como $f'(x)$ no existe en 2, se concluye que 2 es un número crítico de f; de modo que el valor mínimo absoluto ocurre en 2 o en un extremo del intervalo. Los valores de función de estos números se muestran en la tabla 2.

De la tabla se concluye que el valor mínimo asbsoluto de f en [1, 5] es 0 y el valor máximo absoluto es $\sqrt[3]{9} \approx 2.08$, lo que confirma las respuestas anteriores. ◀



[1, 5] por [−1, 3]

$f(x) = (x - 2)^{2/3}$

FIGURA 20

Tabla 2

x	1	2	5
$f(x)$	1	0	$\sqrt[3]{9}$

3.1.8 Teorema

(i) Si $\lim_{x \to c} f(x)$ existe y es positivo, entonces existe un intervalo abierto que contiene a c tal que $f(x) > 0$ para toda $x \neq c$ del intervalo.

(ii) Si $\lim_{x \to c} f(x)$ existe y es negativo, entonces existe un intervalo abierto que contiene a c tal que $f(x) < 0$ para toda $x \neq c$ del intervalo.

Problemas

En los ejercicios 9 a 14, (a) determine los números críticos de la función f analíticamente. Apoye las respuestas del inciso (a) en dos formas: (b) trace la gráfica de f; (c) trace la gráfica de NDER ($f(x)$, x).

9. $f(x) = x^4 + 11x^3 + 34x^2 + 15x - 2$

10. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$

11. $f(t) = (t^2 - 4)^{2/3}$

12. $f(w) = (w^3 - 3w^2 + 4)^{1/3}$

13. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x - 2}$

14. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x - 1}$

En los ejercicios 15 a 18, determine los números críticos de la función.

15. $f(x) = \operatorname{sen} 2x \cos 2x$

16. $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos 2x$

17. $F(x) = \sec^2 3x$

18. $G(x) = \tan^2 4x$

En los ejercicios 19 a 38, (a) dibuje la gráfica de la función en el intervalo indicado; (b) determine los extremos absolutos de la función en el intervalo, si existe alguno, y determine los valores de x en los que ocurren los extremos absolutos.

19. $f(x) = 4 - 3x$; $(-1, 2]$

20. $f(x) = x^2 - 2x + 4$; $(-\infty, +\infty)$

21. $g(x) = \dfrac{1}{x}$; $[-2, 3]$

24. $G(x) = -3 \operatorname{sen} x$; $[0, \frac{3}{4}\pi)$

25. $f(x) = \sqrt{3 + x}$; $[-3, +\infty)$

26. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$; $(-2, 2)$

27. $h(x) = \dfrac{4}{(x - 3)^2}$; $[2, 5)$

29. $F(x) = |x - 4| + 1$; $(0, 6)$

33. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x - 5} & \text{si } x \neq 5 \\ 2 & \text{si } x = 5 \end{cases}$; $[3, 5]$

34. $F(x) = U(x) - U(x - 1)$ donde

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}; (-1, 1)$$

En los ejercicios 53 a 56, (a) dibuje la gráfica de la función en el intervalo indicado. (b) Determine los extremos absolutos de la función en el intervalo.

53. $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } -3 \leq x \leq 2 \\ 4 - x & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$; $[-3, 3]$

56. $G(x) = \begin{cases} 4 - (x + 5)^2 & \text{si } -6 \leq x \leq -4 \\ 12 - (x + 1)^2 & \text{si } -4 < x \leq 0 \end{cases}$; $[-6, 0]$

Solucionario

Exercises 9–14, (a) Calculate the critical numbers. Check by plotting (b) f; and (c) NDER$(f(x), x)$.

9. $f(x) = x^4 + 11x^3 + 34x^2 + 15x - 2$. $f'(x) = 4x^3 + 33x^2 + 68x + 15 = (x+5)(4x+1)(x+3)$. $f'(x) = 0$ when $x = -5$, $x = -\frac{1}{4}$, and $x = -3$. Thus $-5, -\frac{1}{4}, -3$ are the critical numbers of f.

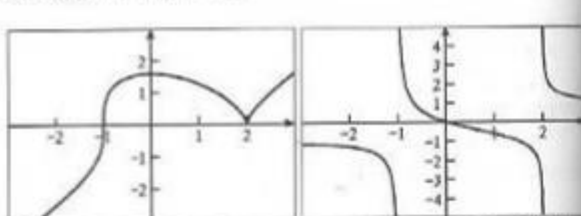
10. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$; $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 4x - 12 = 4[x^2(x+3) - (x+3)] = 4(x-1)(x+1)(x+3)$ $f'(x) = 0$ when $x = 1$, $x = -1$, and $x = -3$. Thus $1, -1, -3$ are the critical numbers of f.

11. $f(t) = (t^2 - 4)^{2/3}$; $f'(t) = \frac{2}{3}(t^2 - 4)^{-1/3}(2t)$. $f'(-2)$ and $f'(2)$ do not exist and -2 and 2 are in the domain of f; $f'(t) = 0$ when $t = 0$. Thus $-2, 2, 0$ are the critical numbers of f.

12. $f(w) = (w^3 - 3w^2 + 4)^{1/3}$

▹ The domain of f is $(-\infty, +\infty)$. Plots of f and NDER(f) are shown below

$$f'(w) = \frac{1}{3}(w^3 - 3w^2 + 4)^{-2/3}(3w^2 - 6w) = \frac{w(w-2)}{(w^3 - 3w^2 + 4)^{2/3}} = \frac{w(w-2)}{[(w+1)(w-2)^2]^{2/3}} = \frac{w}{(w+1)^{2/3}(w-2)^{1/3}}$$



The factored form of the denominator $w^3 - 3w^2 + 4$ was found by trial and error using synthetic division. Because $f'(w)$ is not defined at -1 and at 2, both -1 and 2 are critical numbers of f. Because $f'(0) = 0$, then 0 is also a critical number of f.

13. $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x-2}$; $f'(x) = \dfrac{2x(x-2) - (x^2+4)1}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x - 4}{(x-2)^2}$. f' is defined when f is defined and $f'(x) = 0$ when $x^2 - 4x - 4 = 0$; $x = 2 \pm 2\sqrt{2}$. Hence the critical numbers of f are $2 + 2\sqrt{2}$ and $2 - \sqrt{2}$.

14. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x - 1}$; $f'(x) = \dfrac{(2x+2)(x-1) - (x^2 + 2x + 5)1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 7}{(x-1)^2}$. f' is defined when f is defined and $f'(x) = 0$ when $x^2 - 2x - 7 = 0$; $x = 1 \pm 2\sqrt{2}$. Hence the critical numbers of f are $1 + 2\sqrt{2}$ and $1 - \sqrt{2}$.

In Exercises 15–18, find the critical numbers of the function.

15. $f(x) = \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2}\sin 4x$; $f'(x) = 2\cos 4x$. $f'(x) = 0$ when $4x = \frac{1}{2}(2k+1)\pi$, where k is any integer.

▪ The critical numbers of f are all numbers $\frac{1}{8}(2k+1)\pi$, where k is any integer.

16. $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$

▹ The domain of f is $(-\infty, +\infty)$. We have

$$f'(x) = 2\cos 2x - 2\sin 2x$$

Thus, $f'(x)$ is defined for all x. If $f'(x) = 0$, we have

$$2\cos 2x - 2\sin 2x = 0; \quad \sin 2x = \cos 2x$$

Dividing on both sides by $\cos 2x$, we obtain

$$\tan 2x = 1$$

Thus, $\quad 2x = \frac{1}{4}\pi + n\pi;\ x = \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2}n\pi$

▪ Each number of the form $\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2}n\pi$, where n is an integer, is a critical number.

17. $F(x) = \sec^2 3x$; $F'(x) = 2\sec 3x \cdot \sec 3x \tan 3x(3) = 6\sec^2 3x \tan 3x$. $f'(x)$ does not exist when $3x = \frac{1}{2}(2k+1)\pi$ where k is any integer, but these values of x are not in the domain of f; $f'(x) = 0$ when $3x = k\pi$, where k is any integer. Thus the critical numbers of f are all numbers $\frac{1}{3}k\pi$, where k is any integer.

18. $G(x) = \tan^2 4x$; $G'(x) = 8\tan 4x \sec^2 4x$. $G'(x)$ does not exist when $4x = \frac{1}{2}(2k+1)\pi$ where k is any integer, but these values of x are not in the domain of G; $G'(x) = 0$ when $4x = k\pi$, where k is any integer.

▪ The critical numbers of G are all numbers $\frac{1}{4}k\pi$, where k is any integer.

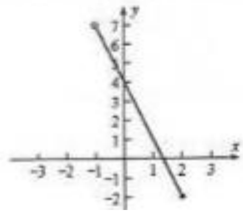
In Exercises 19–38, (a) sketch the graph of the function on the interval I. (b) Locate any extrema on the interval.

19. $f(x) = 4 - 3x$; $I = (-1, 2]$; $f'(x) = 3$

$f'(x)$ is never 0, so f has no relative extrema.

$f(2) = -2$ is an absolute minimum on I.

There is no absolute maximum on I because $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 7$ but $f(x) < 7$ on I.



$f(x) = x^2 - 2x + 4$; $I = (-\infty, +\infty)$

(a) The graph of the function is given at the right.

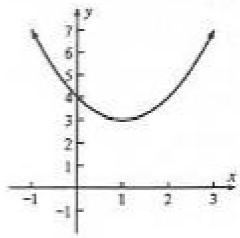
(b) $f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$. $f'(1) = 0$ and 0 is in I.

Therefore 1 is the critical number of f in I.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

and so f has no absolute maximum on I.

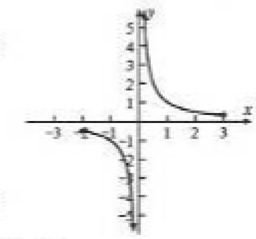
$f(1) = 3$ is an absolute minimum on I.



$g(x) = \frac{1}{x}$, $I = [-2, 3]$

0 is in I and $\lim_{x\to0^+} g(x) = +\infty$ and $\lim_{x\to0^-} g(x) = -\infty$.

Hence g has neither an absolute maximum value nor an absolute minimum value on I.



$G(x) = -3\sin x$; $I = [0, \frac{3}{4}\pi)$

(a) The graph of the function is given at the right.

(b) $f'(x) = -3\cos x$. $f'(\frac{1}{2}\pi) = 0$ and $\frac{1}{2}\pi$ is in I.

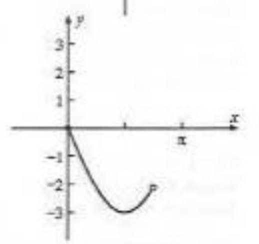
Therefore $\frac{1}{2}\pi$ is the critical number of G in I.

$f(0) = -3\sin 0 = 0$; $f(\frac{1}{2}\pi) = -3\sin\frac{1}{2}\pi = -3$

and $\lim_{x\to3/4\pi^-} G(x) = -3\sin\frac{3}{4}\pi = -\frac{3}{2}\sqrt{2} \approx -2.12$.

The absolute minimum value of f on I is -3 and $f(\frac{1}{2}\pi) = -3$.

The absolute maximum value of f on I is 0 and $f(0) = 0$.

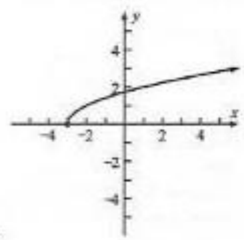


$f(x) = \sqrt{3+x}$, $I = [-3, +\infty)$; $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3+x}}$

$f(-3) = 0$ and $f(x) > 0$ on I.

Thus the absolute minimum value of f on I is 0.

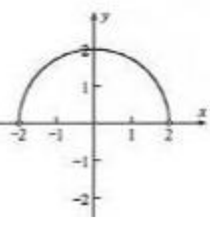
Because $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, there is no absolute maximum value of f on I.



$f(x) = \sqrt{4-x^2}$; $I = (-2, 2)$

$f'(x) = \frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

The only critical number of f in I is 0. Because $f(x) \le 2$ on I and $f(0) = 2$, then the absolute maximum value of f on I is 2. There is no absolute minimum value of f on I because $\lim_{x\to2^-} f(x) = 0$ but $f(x) > 0$ on I.

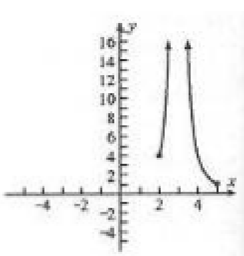


27. $h(x) = \frac{4}{(x-3)^2}$, $I = [2, 5]$; $h'(x) = -\frac{8}{(x-3)^3}$

3 is in I and $\lim_{x\to3} h(x) = +\infty$. Therefore h has no absolute maximum value on I.

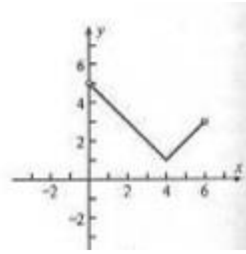
$h'(x)$ is never 0 so there are no critical numbers of h.

$h(2) = 4$ and $h(5) = 1$, so the absolute minimum value of h on I is 1.



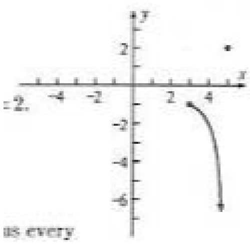
29. $F(x) = |x-4|+1$, $I = (0,6)$; $F'(x) = \dfrac{x-4}{|x-4|} = \operatorname{sgn}(x-4)$, $x \neq 4$.

$F'(4)$ does not exist and 4 is in I;
$F'(x)$ is never 0, so 4 is the critical number.
$F(0) = 5$, $F(4) = 1$, $F(6) = 3$
F has an absolute minimum value of 1 on I and $F(4) = 1$.
$\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = 5$ but $F(x) < 5$ for all x in I.
Hence F has no absolute maximum value on I.



$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x-5} & \text{if } x \neq 5 \\ 2 & \text{if } x = 5 \end{cases}$, $I = [3,5]$

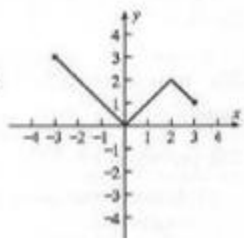
Because $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = -\infty$, there is no absolute minimum value of f on I.
The absolute maximum value of f on I is 2 and $f(5) = 2$.



$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{if } -3 \le x \le 2 \\ 4-x & \text{if } 2 < x \le 3 \end{cases}$, $I = [-3,3]$; $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x \in (-3,0) \cup (2,3) \\ 1 & \text{if } 0 < x < 3 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} |x| = 2$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (4-x) = 2$

Because f is continuous on I, f has an absolute maximum value and an absolute minimum value on I. Because $f'(0)$ and $f'(2)$ do not exist and $f'(x)$ is never 0, 0 and 2 are the critical numbers of f.
$f(-3) = |3| = 3$, $f(0) = |0| = 0$, $f(2) = |2| = 2$, $f(3) = 4 - 3 = 1$
The absolute minimum value is 0; the absolute maximum value is 3.



56. $G(x) = \begin{cases} 4-(x+5)^2 & \text{if } -6 \le x \le -4 \\ 12-(x+1)^2 & \text{if } -4 < x \le 0 \end{cases}$; $I = [-6,0]$

$$G'(x) = \begin{cases} -2(x+5) & \text{if } -6 < x < -4 \\ -2(x+1) & \text{if } -4 < x < 0 \end{cases}$$

Because $G'(-5) = 0$ and $G'(-1) = 0$, then -5 and -1 are critical numbers of G. Furthermore,

$$G'_-(-4) = \lim_{x \to -4^-} G'(x) = \lim_{x \to -4^-} -2(x+5) = -2$$

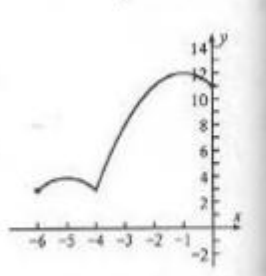
and

$$G'_+(-4) = \lim_{x \to -4^+} G'(x) = \lim_{x \to -4^+} -2(x+1) = 6$$

Therefore, $G'(-4)$ is not defined, and so -4 is a critical number of G. We evaluate G at each endpoint of $[-6,0]$ and at each critical number of G.

$$G(-6) = 3 \quad G(-5) = 4 \quad G(-4) = 3 \quad G(-1) = 12 \quad G(0) = 11$$

The absolute maximum value of G on I is 12 which occurs at -1, and the absolute minimum value of G on I is 3 which occurs at both -6 and -4. The graph is shown at the right.



APLICACIONES QU EINVOLUCRAN UN EXTREMO ABSOLUTO EN UN INTERVALO CERRADO

EJEMPLO 1 Los puntos A y B están en las orillas de un río recto de 3 km de ancho y son opuestos uno del otro. El punto C está en la misma orilla que B pero a k kilómetros de B río abajo. Una compañía telefónica desea tender un cable de A a C donde el costo por kilómetro de cable en tierra es de \$10 000 y el de cable subacuático es de \$12 500. Sea P un punto en la misma orilla que B y C de modo que el cable se tienda de A a P y luego a C. Consulte la figura 3. **(a)** Si x kilómetros es la distancia de B a P, obtenga una ecuación que defina a $C(x)$ si $C(x)$ dólares es el costo total del cable tendido y establezca el dominio de C. **(b)** Si $k = 2$, estime en la graficadora el valor de x para el cual el costo del cable tendido sea el menor costo posible. Después confirme la estimación analíticamente.

Solución

(a) La distancia de P a C es $(k - x)$ kilómetros, y, del teorema de Pitágoras, la distancia de A a P es $\sqrt{3^2 + x^2}$ kilómetros. Por tanto,

$$C(x) = 12\,500\sqrt{9 + x^2} + 10\,000(k - x) \quad \textbf{(1)}$$

El dominio de C es $[0, k]$.

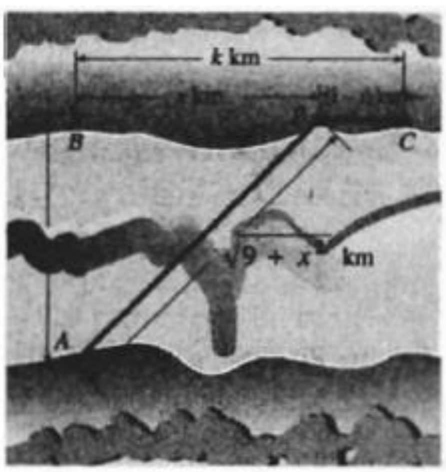
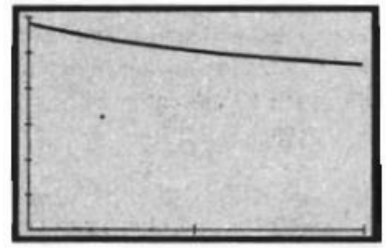


FIGURA 3

(b) Con $k = 2$ en la ecuacion (1), se tiene

$$C(x) = 12\,500\sqrt{9 + x^2} + 10\,000(2 - x) \tag{2}$$

con $x \in [0, 2]$. La gráfica de esta ecuación trazada en el rectángulo de inspección de $[0, 2]$ por $[0, 60\,000]$ se muestra en la figura 4, la cual indica que el valor mínimo absoluto de C en $[0, 2]$ ocurre en el extremo derecho. Al utilizar la tecla $\boxed{\text{TRACE}}$ (*rastreo*) de la graficadora, se obtiene $C(2) = 45\,069$. Por tanto, se estima que el costo del cable tendido es mínimo cuando $x = 2$ y el costo mínimo es de \$45 069.



$[0, 2]$ por $[0, 60\,000]$

$C(x) = 12\,500\sqrt{9 + x^2} + 10\,000\,(2 - x)$

FIGURA 4

Ahora se confirmará analíticamente esta estimación. Como C es continua en $[0, 2]$, se aplica el teorema del valor extremo; por lo que C tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en $[0, 2]$. Se desea determinar el valor mínimo absoluto. De la ecuación (2),

$$C'(x) = \frac{12\,500x}{\sqrt{9 + x^2}} - 10\,000$$

$C'(x)$ existe para todos los valores de x. Al igualar $C'(x)$ a cero y resolver para x se tiene

$$\begin{aligned} \frac{12\,500x}{\sqrt{9 + x^2}} - 10\,000 &= 0 \\ 12\,500x - 10\,000\sqrt{9 + x^2} &= 0 \\ 5x &= 4\sqrt{9 + x^2} \qquad (3) \\ 25x^2 &= 16(9 + x^2) \\ 9x^2 &= 16 \cdot 9 \\ x^2 &= 16 \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

El número -4 es una raíz extraña de la ecuación (3), y 4 no está en el intervalo $[0, 2]$, lo cual indica que no existen números críticos de C en $[0, 2]$. Por tanto, el valor mínimo absoluto de C en $[0, 2]$ debe ocurrir en algún extremo del intervalo. Si se calcula $C(0)$ y $C(2)$, se obtiene

$$C(0) = 57\,500 \quad \text{y} \quad C(2) = 45\,069$$

De modo que el valor mínimo absoluto de C en $[0, 2]$ es 45 069 cuando $x = 2$, lo cual confirma lo estimado anteriormente.

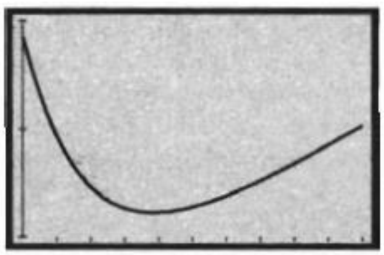
Conclusión: El costo del cable es mínimo cuando éste se tiende directamente de A a C bajo el agua. ◀

EJEMPLO 2 Haga el inciso (b) del ejemplo 1 considerando ahora que $k = 10$.

Solución Con $k = 10$ en la ecuación (1), se tiene

$$C(x) = 12\,500\sqrt{9 + x^2} + 10\,000(10 - x) \tag{4}$$

para $x \in [0, 10]$. La figura 5 muestra la gráfica de esta ecuación trazada en el rectángulo de inspección de $[0, 10]$ por $[120\,000, 140\,000]$. Las coordenadas del punto más bajo de la curva son, aproximadamente, $(4, 122\,500)$. Por tanto, se estima que el costo del cable tendido, en este caso, es mínimo cuando $x = 4$ y el costo mínimo es de \$122 500.



$[0, 10]$ por $[120\,000, 140\,000]$

$C(x) = 12\,500\sqrt{9 + x^2} + 10\,000\,(10 - x)$

FIGURA 5

Esta estimación se confirma analíticamente en la misma forma en que se hizo en el ejemplo 1. De la ecuación (4), la expresión para $C'(x)$ es igual a la que se obtuvo de la ecuación (2). Por tanto, otra vez se obtiene $x = \pm 4$ cuando $C'(x)$ se iguala a cero y se resuelve para x. Como 4 está en el intervalo cerrado $[0, 10]$, ahora 4 es un número crítico de C. Si se calculan $C(0)$, $C(4)$ y $C(10)$ se obtiene

$$C(0) = 137\,500 \qquad C(4) = 122\,500 \qquad C(10) = 130\,504$$

En consecuencia, el valor mínimo absoluto de C en $[0, 10]$ es 122 500 cuando $x = 4$, lo cual confirma lo estimado anteriormente.

Conclusión: En este caso, el costo del cable es mínimo cuando se tiende de A a P el cual debe estar a 4 km de B. ◀

Para la función C definida por la ecuación (1) con $x \in [0, k]$, se mostró en el ejemplo 1 que cuando $k = 2$, el valor mínimo absoluto de C ocurre en el extremo derecho del intervalo $[0, 2]$ mientras que en el ejemplo 2, cuando $k = 10$, se mostró que el valor mínimo absoluto de C ocurre en el intervalo abierto $(0, 10)$. En el ejercicio 36 se le pedirá que determine los valores de k para los que el valor mínimo absoluto de C ocurrirá en un número del intervalo abierto $(0, k)$.

EJEMPLO 3 Un terreno rectangular se encuentra en la orilla de un río y se desea delimitar de modo que no se utilice cerca a lo largo de la orilla. Si el material para la cerca de los lados cuesta \$12 por pie colocado y \$18 por pie colocado para al lado paralelo al río, determine las dimesiones del terreno de mayor área posible que pueda limitarse con \$5 400 de cerca. Apoye gráficamente a la respuesta.

Solución Sean x pies la longitud de los lados del terreno no paralelos al río, y pies la longitud del lado paralelo al río y A pies cuadrados el área del terreno. Refiérase a la figura 6. En consecuencia,

$$A = xy \tag{5}$$

Como el costo del material para cada lado no paralelo al río es de \$12 por pie colocado y la longitud de estos lados es x pies, entonces el costo total de la cerca para cada uno de estos lados es $12x$ dólares. De manera similar, el costo de la cerca del tercer lado es $18y$ dólares. Por tanto,

$$12x + 12x + 18y = 5\,400 \tag{6}$$

A fin de expresar A en términos de sólo una variable, se resuelve (6) para y en términos de x y se sustituye este valor en (5), obteniéndose A como una función de x. Así

$$A(x) = x(300 - \tfrac{4}{3}x) \tag{7}$$

De (6), si $y = 0$, $x = 225$, y si $x = 0$, $y = 300$. Puesto que x y y no deben ser negativos, el valor de x que hará de A un máximo absoluto, debe estar en el intervalo cerrado $[0, 225]$. Como A es continua en el intervalo $[0, 225]$,

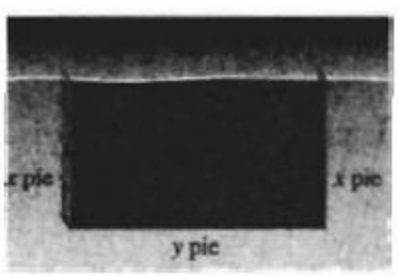


FIGURA 6

por el teorema del valor extremo, A tiene valor máximo absoluto en el intervalo. De (7), se tiene

$$A(x) = 300x - \tfrac{4}{3}x^2$$
$$A'(x) = 300 - \tfrac{8}{3}x$$

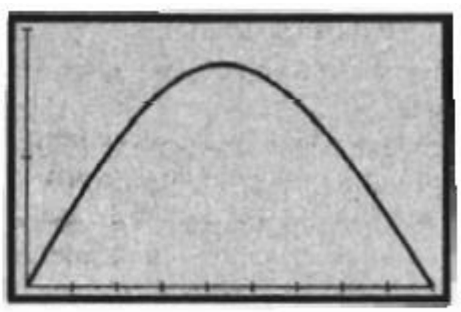
Como $A'(x)$ existe para todo x, los números críticos de A se determinan al considerar $A'(x) = 0$, de lo que se obtiene

$$x = 112.5$$

El único número crítico de A es 112.5, el cual se encuentra en el intervalo cerrado $[0, 225]$. Por lo que el valor máximo absoluto de A debe ocurrir en 0, 112.5 o 225. Debido a que $A(0) = 0$, $A(225) = 0$ y $A(112.5) = 16\,875$, el valor máximo absoluto de A en $[0, 225]$ es 16 875, el cual ocurre cuando $x = 112.5$ y $y = 150$ (obtenido de (6) al sustituir 112.5 por x).

Con el fin de apoyar gráficamente la respuesta, se traza la gráfica de la función A definida por la ecuación (7) en el rectángulo de inspección de $[0, 225]$ por $[0, 20\,000]$, como se muestra en la figura 7. Se determina que el punto más alto de la gráfica es $(112.5, 16\,875)$, lo cual confirma la respuesta.

Conclusión: El terreno de mayor área posible que se puede encerrar con \$5 400 de cerca tiene un área de 16 875 pie^2, obtenido cuando la longitud del lado paralelo al río mide 150 pie y la longitud de cada lado no paralelo al río es de 112.5 pie. ◀



$[0, 225]$ por $[0, 20\,000]$

$A(x) = x(300 - \tfrac{4}{3}x)$

FIGURA 7

EJEMPLO 4 En el ejemplo 6 de la sección 1.3, se tuvo la situación siguiente: En una comunidad de 8 000 personas, la tasa a la cual se difunde un rumor es conjuntamente proporcional al número de persona que han escuchado el rumor y al número de personas que no lo han escuchado. Cuando 20 personas han escuchado el rumor, éste se difunde a una tasa de 200 personas por hora. Determine analíticamente cuántas personas han escuchado el rumor cuando éste se difunde a la mayor tasa posible.

Solución En la sección 1.3 se obtuvo el modelo matemático

$$f(x) = \tfrac{1}{798}(8\,000x - x^2)$$

donde $f(x)$ personas por hora es la tasa a la que se difunde el rumor cuando x personas lo han escuchado. Puesto que la comunidad tiene una población de 8 000, x está en el intervalo cerrado $[0, 8\,000]$. A fin de aplicar el concepto de continuidad, se considerará que x es cualquier número real de este intervalo. Como $f(x)$ es un polinomio, entonces f es continua en $[0, 8\,000]$, por lo que puede aplicarse el teorema del valor extremo. Al calcular $f'(x)$ se tiene

$$f'(x) = \tfrac{1}{798}(8\,000 - 2x)$$

El único número crítico de f se tiene cuando $f'(x) = 0$, y es $x = 4\,000$. Como

$$f(0) = 0 \qquad f(4\,000) = 20\,050.1 \qquad f(8\,000) = 0$$

el valor máximo absoluto de f ocurre cuando $x = 4\,000$. Este valor de x es acorde con el que se obtuvo gráficamente en la sección 1.3.

<u>Conclusión:</u> El rumor se difunde a la mayor tasa posible cuando 4 000 personas, la mitad de la población, han escuchado el rumor.

EJEMPLO 5 En el ejemplo 4 de la sección 2.2 se tuvo la situación siguiente: En la planeación de una cafetería, la ganancia diaria se estimó en \$16 por lugar si la capacidad es de 40 a 80 lugares. Sin embargo, si la capacidad es mayor que 80 lugares, la ganancia diaria por lugar disminuirá en \$0.08 veces el número de lugares que exceden a 80. ¿Cuál debe ser la capacidad de la cafetería de modo que se obtenga la máxima ganancia diaria?

Solución En la sección 2.2 se obtuvo el modelo matemático

$$P(x) = \begin{cases} 16x & \text{si } 40 \leq x \leq 80 \\ 22.40x - 0.08x^2 & \text{si } 80 < x \leq 280 \end{cases}$$

donde $P(x)$ dólares es la ganancia diaria de la cafetería cuando su capacidad es de x lugares. Además, en la sección 2.2, se consideró que x toma todos los valores reales de su dominio $[40, 280]$ y se mostró que P es continua en ese intervalo cerrado y que no es diferenciable en 80.

De la continuidad de P en $[40, 280]$, el teorema del valor extremo garantiza que P tiene un valor máximo absoluto en ese intervalo. Como $P'(80)$ no existe, 80 es un número crítico de P. Para determinar cualquier otro número crítico de P, se calcula $P'(x)$:

$$P'(x) = \begin{cases} 16 & \text{si } 40 < x < 80 \\ 22.40 - 0.16x & \text{si } 80 < x < 280 \end{cases}$$

$P'(x) = 0$ cuando

$$\begin{aligned} 22.40 - 0.16x &= 0 \\ x &= 140 \end{aligned}$$

Por lo que 140 es un número crítico de P. Enseguida se calcula $P(x)$ en los extremos del intervalo $[40, 280]$ y en los números críticos de P:

$$P(40) = 640 \quad P(80) = 1\,280 \quad P(140) = 1\,568 \quad P(280) = 0$$

Por tanto, el valor máximo absoluto de P es 1 568 y ocurre cuando $x = 140$.

Conclusión: La capacidad de la cafetería debe ser de 140 lugares, lo que proporcionará una ganancia diaria de \$1 568.

EJEMPLO 6 (a) En la graficadora, estime las dimensiones del cilindro circular recto de mayor volumen que pueda inscribirse en un cono circular recto cuyo radio mide 5 cm y su altura es de 12 cm. (b) Confirme analíticamente las estimaciones del inciso (a).

Solución

(a) Sean r centímetros la longitud del radio del cilindro, h centímetros su altura y V centímetros cúbicos su volumen.

La figura 8 muestra el cilindro inscrito en el cono, mientras que la figura 9 presenta una sección plana que contiene al eje del cono.

Si $r = 0$ y $h = 12$, se tiene un cilindro degenerado, el cual es el eje del cono. Si $r = 5$ y $h = 0$, también se tiene un cilindro degenerado, el cual es la base del cono. El número r está en el intervalo cerrado $[0, 5]$, y el número h pertenece al intervalo cerrado $[0, 12]$.

La fórmula siguiente expresa V en términos de r y h:

$$V = \pi r^2 h \qquad \textbf{(8)}$$

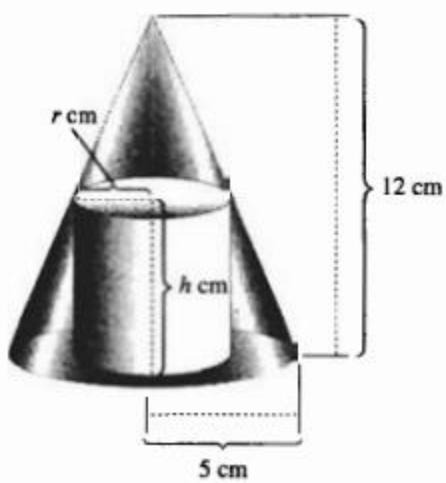


FIGURA 8

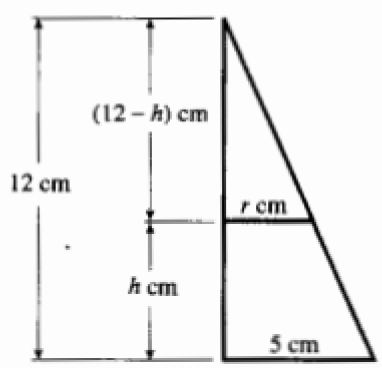
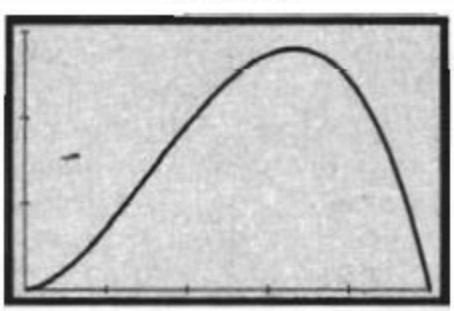


FIGURA 9



[0, 5] por [0, 150]

$V(x) = \frac{12}{5}\pi(5r^2 - r^3)$

FIGURA 10

A fin de expresar V en términos de sólo una variable se necesita otra ecuación que contenga a r y h. De los triángulos semejantes de la figura 9, se tiene

$$\frac{12 - h}{r} = \frac{12}{5}$$

$$h = \frac{60 - 12r}{5} \tag{9}$$

Si se sustituye de (9) en la fórmula (8), se obtiene V como una función de r, lo que se escribe como

$$V(r) = \tfrac{12}{5}\pi(5r^2 - r^3) \qquad r \in [0, 5] \tag{10}$$

La figura 10 muestra la gráfica de V trazada en el rectángulo de inspección de $[0, 5]$ por $[0, 150]$. En la graficadora, se determina que el punto más alto es (3.33, 139.63). Por tanto, se estima que el radio del cilindro circular recto mide 3.33 cm y, en consecuencia, de (9) se estima que su altura es de 4.01 cm.

(b) Para confirmar analíticamente las estimaciones, se aplica el teorema del valor extremo ya que V, definida por la ecuación (10), es continua en el intervalo cerrado $[0, 5]$. Se desea determinar los valores de r y h que proporcionen el valor máximo absoluto de V. De (10) se tiene

$$V'(r) = \tfrac{12}{5}\pi(10r - 3r^2)$$

Con objeto de determinar los números críticos de V, se considera $V'(r) = 0$ y se despeja r:

$$r(10 - 3r) = 0$$

$$r = 0 \qquad\qquad r = \tfrac{10}{3}$$

Como $V'(r)$ existe para todos los valores de r, los únicos números críticos de V son 0 y $\frac{10}{3}$, los cuales están en el intervalo cerrado $[0, 5]$. El valor máximo absoluto de V en $[0, 5]$ debe ocurrir en 0, $\frac{10}{3}$ o 5. De (10) se obtiene

$$V(0) = 0 \qquad V(\tfrac{10}{3}) = \tfrac{400}{9}\pi \qquad V(5) = 0$$

Por tanto, el valor máximo absoluto de V es $\frac{400}{9}\pi \approx 139.63$, el cual se obtiene cuando $r = \frac{10}{3} \approx 3.33$. Cuando $r = \frac{10}{3}$, se obtiene de (9), $h = 4$. Estos resultados confirman las estimaciones anteriores y proporcionan los valores exactos de r y h.

Conclusión: El cilindro circular recto de mayor volumen inscrito en el cono dado tiene un volumen de $\frac{400}{9}\pi\ \text{cm}^3$, lo que ocurre cuando $r = \frac{10}{3}$ cm y $h = 4$ cm. ◀

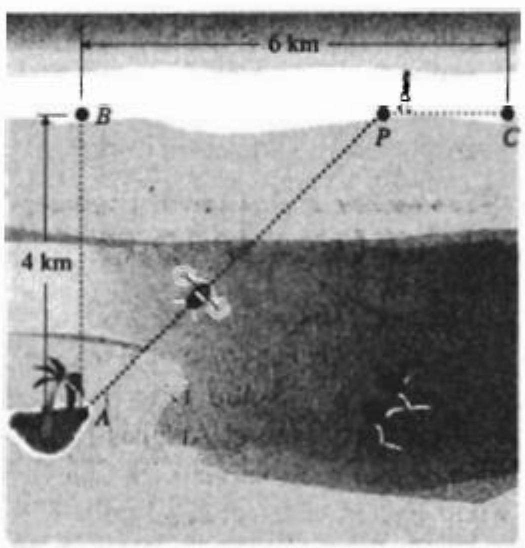
Problemas

En estos ejercicios defina precisamente todas las variables como números. Asegúrese de escribir una conclusión al final de cada ejercicio.

1. Determine un número del intervalo $[\frac{1}{3}, 2]$ tal que la suma del número y su recíproco sea **(a)** un mínimo y **(b)** un máximo. Apoye gráficamente las respuestas.

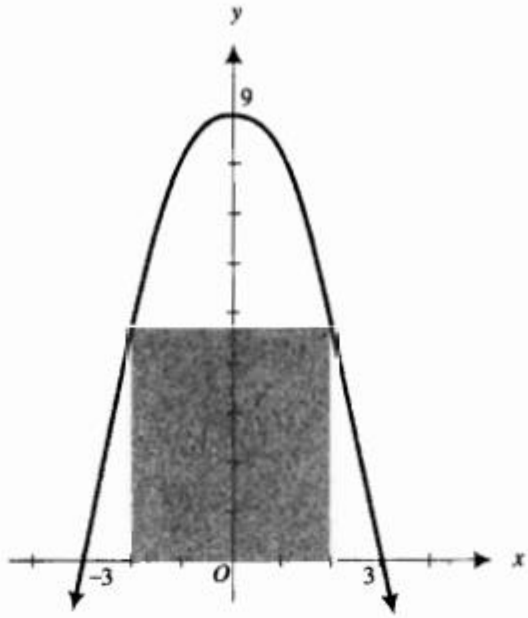
2. Determine un número del intervalo $[-1, 1]$ tal que la diferencia del número menos su cuadrado sea **(a)** un máximo y **(b)** un mínimo. Apoye gráficamente las respuestas.

21. Una isla está ubicada en el punto A, 4 km mar adentro del punto más cercano B de una playa recta. Una mujer, en la isla, desea ir al punto C, a 6 km de B playa abajo. La mujer puede dirigirse hacia el punto P, entre B y C, en un bote de remos a 5 km/h y después caminar en forma recta de P a C a 8 km/h. **(a)** Estime en la graficadora la ruta de A a C que ella pueda recorrer en el menor tiempo. **(b)** Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente.



22. Resuelva el ejercicio 21 considerando ahora que el punto C está a 3 km de B playa abajo.

26. **(a)** Determine el área del rectángulo más grande que tenga dos vértices en el eje x y los otros dos en la parábola $y = 9 - x^2$, por arriba del eje x. **(b)** Apoye gráficamente la respuesta del inciso (a).

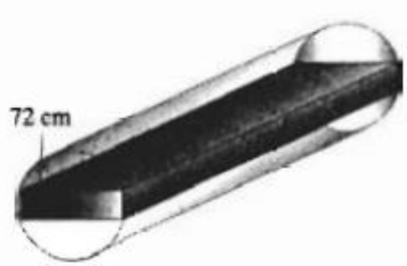


27. Considere que la disminución de la presión sanguínea de una persona depende de la cantidad de cierta sustancia administrada a la persona. De modo que si se administran x miligramos de la sustancia, la disminución de la presión sanguínea es una función de x. Suponga que $f(x)$ define esta función y que

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2(k - x)$$

si $x \in [0, k]$, donde k es una constante positiva. Determine el valor de x que ocasiona la mayor disminución de la presión sanguínea.

29. La resistencia de una viga rectangular es conjuntamente proporcional a su anchura y al cuadrado de su espesor. Determine las dimensiones de la viga de mayor resistencia que pueda cortarse de un tronco con forma de cilindro circular recto cuyo radio es de 72 cm.



34. Si un cuerpo que pesa W libras se arrastra a lo largo de un piso horizontal a una velocidad constante mediante una fuerza de F libras de magnitud y dirigida un ángulo de θ radianes con respecto al plano del piso, entonces F está dada por la ecuación

$$F = \frac{kW}{k \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

donde k es una constante llamada *coeficiente de fricción* y $0 < k < 1$. Si $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$, determine $\cos \theta$ cuando F es mínima.

35. En una fábrica se elaboran dos productos, A y B. Si C es el costo total de producción de una jornada de 8 horas, entonces $C = 3x^2 + 42y$, donde x es el número de máquinas utilizadas en la elaboración del producto A, y y es el número de máquinas empleadas en la elaboración del producto B, y durante una jornada de 8 horas trabajan 15 máquinas. **(a)** Determine analíticamente cuántas de estas máquinas deben utilizarse para elaborar el producto A y cuántas para elaborar el producto B de modo que el costo total sea mínimo. **(b)** Apoye las respuestas del inciso (a) gráficamente.

36. **(a)** En el ejemplo 1, ¿para qué valores de k ocurrirá el valor máximo absoluto de C en un número del intervalo abierto $(0, k)$? **(b)** Los ejemplos 1 y 2, y los ejercicios 21 y 22 son casos especiales del siguiente problema más general: Sea

$$f(x) = u\sqrt{a^2 + x^2} + v(b - x)$$

donde x está en el intervalo $[0, b]$ y $u > v > 0$. Demuestre que para que el valor máximo absoluto de f ocurra en un número del intervalo abierto $(0, b)$, se debe satisfacer la desigualdad siguiente: $av < b\sqrt{u^2 - v^2}$.

Solucionario

Find a number in $I=[\frac{1}{3},2]$ such that the sum of the number and its reciprocal is (a) minimum; (b) maximum.

Let x be the number. We seek the extrema of $f(x)=x+\frac{1}{x}$; $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$. f is continuous and $f'(x)$ exists on any interval that does not contain 0. $f'(x)=0$ when $1=\frac{1}{x^2}$, $x^2=1$, $x=\pm 1$, but only $x=1$ is in I.
$f(\frac{1}{3})=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$, $f(1)=1+1=2$, $f(2)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$. (a) $x=1$ minimizes the sum (b) $x=\frac{1}{3}$ maximizes

Find the number in $I=[-1,1]$ such that the number minus its square is (a) maximum; (b) minimum.

Let x be the number. We seek the extrema of $f(x)=x-x^2$; $f'(x)=1-2x$. f is continuous and $f'(x)$ exists on any interval. $f'(x)=0$ when $2x=1$; $x=\frac{1}{2}\in$ I. $f(-1)=-2$, $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$, $f(1)=0$ (a) $x=\frac{1}{2}$ maximizes the difference (b) $x=-1$ minimizes the difference.

A woman on an island at A, 4 km from the nearest point B on a beach, wishes to go in the least time to C, 6 km down the beach from B. She rows at 5 km/hr to point P between B and C, then walks at 8 km/hr to C.

Let x km be the distance from B to P. Then $\sqrt{x^2+16}$ km is the distance from P to A and $(6-x)$ km is the distance from P to C. The time of the trip equals the time of the part by water plus the time of the part by land. If the trip takes $f(x)$ hours, then

$f(x)=\frac{1}{5}\sqrt{x^2+16}+\frac{1}{8}(6-x)$, $0\le x\le 6$; $f'(x)=\dfrac{x}{5\sqrt{x^2+16}}-\dfrac{1}{8}$

f is continuous on $[0,6]$. Therefore f has an absolute minimum value on $[0,6]$.

Set $f'(x)=0$: $\dfrac{x}{5\sqrt{x^2+16}}-\dfrac{1}{8}=0$; $8x=5\sqrt{x^2+16}$; $64x^2=25x^2+400$; $39x^2=400$; $x^2=\frac{400}{39}$; $x=\pm\dfrac{20}{\sqrt{39}}$

Because $f'(x)$ exists everywhere, $20/\sqrt{39}\approx 3.20$ is the only critical number of f in $[0,6]$.

$$f(0)=\tfrac{31}{20}=1.55,\ f(20/\sqrt{39})=\tfrac{1}{10}\sqrt{39}+\tfrac{3}{4}\approx 1.37,\ f(6)=\tfrac{2}{5}\sqrt{13}\approx 1.44$$

The absolute minimum value of f is 1.37 when $x=20/\sqrt{39}$. For the fastest route, P is 3.2 km from B.

A woman on an island at A, 4 km from the nearest point B on a beach, wishes to go in the least time to C, 3 km down the beach from B. She rows at 5 km/hr to point P between B and C, then walks at 8 km/hr to C.

Let x km be the distance from B to P. Then $\sqrt{x^2+16}$ km is the distance from P to A and $(3-x)$ km is the distance from P to C. The time of the trip equals the time of the part by water plus the time of the part by land. If the trip takes $f(x)$ hours, then

$f(x)=\frac{1}{5}\sqrt{x^2+16}+\frac{1}{8}(3-x)$, $0\le x\le 3$; $f'(x)=\dfrac{x}{5\sqrt{x^2+16}}-\dfrac{1}{8}$

f is continuous on $[0,3]$. Therefore f has an absolute minimum value on $[0,3]$.

Set $f'(x)=0$: $\dfrac{x}{5\sqrt{x^2+16}}-\dfrac{1}{8}=0$; $8x=5\sqrt{x^2+16}$; $64x^2=25x^2+400$; $39x^2=400$; $x^2=\frac{400}{39}$; $x=\pm\dfrac{20}{\sqrt{39}}$

Because $f'(x)$ exists everywhere and $20/\sqrt{39}\approx 3.20$, there is no critical number of f in $[0,3]$.

$$f(0)=\tfrac{47}{40}=1.175,\ f(3)=1$$

- The absolute minimum value of f is 1 when $x=3$. Hence, for the fastest route the point P should be C.

Find the area of the largest rectangle with two vertices on the x-axis and two on the parabola $y=9-x^2$.

Because the parabola is symmetric with respect to the y-axis, if one vertex is at $(x,0)$, $0\le x\le 3$, another is at $(-x,0)$. The two on the parabola are $(\pm x, 9-x^2)$. We wish to maximize the area $A(x)=2x(9-x^2)$ $=18x-2x^3$; $A'(x)=18-6x^2$. $A'(x)=0$ when $6x^2=18$, $x^2=3$, $x=\sqrt{3}\in$ I and $x=-\sqrt{3}\notin$ I.

$$A(0)=0,\ A(\sqrt{3})=2\sqrt{3}(9-3)=12\sqrt{3},\ A(3)=0$$

- The largest rectangle has area $12\sqrt{3}\approx 20.78$.

$f(x)=\frac{1}{2}x^2(k-x)=\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{2}x^3$, $0\le x\le k$; $f'(x)=kx-\frac{3}{2}x^2=x(k-\frac{3}{2}x)$
f is continuous on $[0,k]$ so f has an absolute maximum value on $[0,k]$.
$f'(0)=0$, $f'(\frac{2}{3}k)=0$ and $f'(x)$ exists on $[0,k]$. Hence $\frac{2}{3}k$ is the only critical number.

$$f(0)=0,\ f(\tfrac{2}{3}k)=\tfrac{2}{27}k^3,\ f(k)=0$$

Thus f has an absolute maximum value at $\frac{2}{3}k$.

- The greatest decrease in blood pressure occurs when $\frac{2}{3}k$ mg of the drug is taken.

33. Let $S(x)$ be the strength of the beam when its breadth is x cm. Because a diagonal of the beam is a diameter of the log, its depth is $\sqrt{144^2 - x^2}$ cm, and for some positive constant k,
$S(x) = kx(144^2 - x^2) = k(144^2x - x^3)$, $0 \le x \le 144$; $S'(x) = k(144^2 - 3x^2) = 3k(3 \cdot 48^2 - x^2)$
S is continuous on $[0, 144]$. Therefore S has an absolute maximum value on $[0, 144]$.
$S'(x) = 0$ when $x = \pm 48\sqrt{3}$ and $S'(x)$ exists on $[0, 144]$, so $48\sqrt{3}$ is the critical number.

$$S(0) = 0,\ S(48\sqrt{3}) = 663{,}552\sqrt{3}\,k,\ S(144) = 0$$

Thus S has an absolute maximum value when $x = 48\sqrt{3}$ and $\sqrt{144^2 - x^2} = 48\sqrt{6}$.
- The dimensions of the strongest beam are $48\sqrt{3} \approx 83.14$ cm by $48\sqrt{6} \approx 117.58$ cm.

34. If a body of weight W pounds is dragged along a horizontal floor at a constant velocity by means of a force of magnitude F pounds and directed at an angle of θ radians with the plane of the floor, then F is given by the equation $F = \dfrac{kW}{k \sin \theta + \cos \theta}$ where k is a constant called the coefficient of friction and $0 < k < 1$. If $0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi$, find $\cos \theta$ when F is least.

- Because $0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi$, both $\sin \theta$ and $\cos \theta$ are positive. Furthermore, k and W are positive. Therefore F is least when $g(\theta) = k \sin \theta + \cos \theta$ is greatest.

$$g'(\theta) = k \cos \theta - \sin \theta$$

Note that $g'(\theta)$ is defined for all θ. If $g'(\theta) = 0$, then

$$k \cos \theta = \sin \theta;\quad k^2 \cos^2 \theta = \sin^2 \theta;\ k^2 \cos^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta;\qquad (k^2 + 1)\cos^2 \theta = 1$$
$$\cos^2 \theta = \frac{1}{k^2 + 1};\qquad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

The only critical number of F occurs when $\cos \theta = (k^2 + 1)^{-1/2}$. We evaluate $g(\theta)$ at the endpoints of the interval $[0, \frac{1}{2}\pi]$ and at the critical number.

$$g(0) = k \sin 0 + \cos 0 = 1$$
$$g(\tfrac{1}{2}\pi) = k \sin \tfrac{1}{2}\pi + \cos \tfrac{1}{2}\pi = k$$

Because $\sin \theta = k \cos \theta$ at the critical number, then

$$g(\theta) = k \sin \theta + \cos \theta = k(k \cos \theta) + \cos \theta = (k^2 + 1)\cos \theta = \frac{k^2 + 1}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{k^2 + 1}$$

Because $\sqrt{k^2 + 1}$ is greater than both k and 1, we conclude that the maximum value of g and the minimum value of F occur when $\cos \theta = (k^2 + 1)^{-1/2}$.

35. C dollars is the cost when x machines are used to produce A and y machines are used to produce B, where $C = 3x^2 + 42y$. If 15 machines are working, how many should be used to produce each product for the cost to be least?

- Because $y = 15 - x$, $C(x) = 3x^2 + 42(15 - x)$, $0 \le x \le 15$. $C'(x) = 6x - 42 = 0$ when $x = 7 \in I$. $C(0) = 630$, $C(7) = 483$, $C(15) = 675$. The cost is least when 7 machines produce A and 8 produce B.

36. (a) In Example 1, $C(x) = 12{,}500\sqrt{9 + x^2} + 10{,}000(k - x)$, where $k \ge 0$ and $C'(x) = 0$ when $x = \pm 4$. For what values of k will the absolute minimum value of C occur at a number in the open interval $(0, k)$?
(b) More generally, Let $f(x) = u\sqrt{a^2 + x^2} + v(b - x)$, $x \in [0, b]$, $u > v > 0$. If the absolute minimum value of f occur at a number in the open interval $(0, b)$, show that $av < b\sqrt{u^2 - v^2}$.

- (a) If the absolute minimum value of C occurs in the interval $(0, k)$ then the critical number 4 must be in that interval, that is $k > 4$.
(b) To locate the critical number, we find the derivative, set it to zero and solve for x.

$$f'(x) = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}} - v = 0 \text{ when } \frac{ux}{\sqrt{a^2 + x^2}} = v;\ ux = v\sqrt{a^2 + x^2};\ u^2x^2 = v^2(a^2 + x^2);\ u^2x^2 = a^2v^2 + v^2x^2;$$
$$u^2x^2 - v^2x^2 = a^2v^2;\ (u^2 - v^2)x^2 = a^2v^2;\ x^2 = \frac{a^2v^2}{u^2 - v^2};\ x = \pm\frac{av}{\sqrt{u^2 - v^2}}$$

If the absolute minimum value of f occurs in the interval $I = (0, b)$ then the critical number must be in I, that is, the positive root must be less than b.

$$\frac{av}{\sqrt{u^2 - v^2}} < b;\ av < \sqrt{u^2 - v^2}$$

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES, Y CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

3.4.1 Definición de función creciente

Una función definida en un intervalo es **creciente** en ese intervalo si y sólo si

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{siempre que} \quad x_1 < x_2$$

donde x_1 y x_2 son dos números cualesquiera del intervalo.

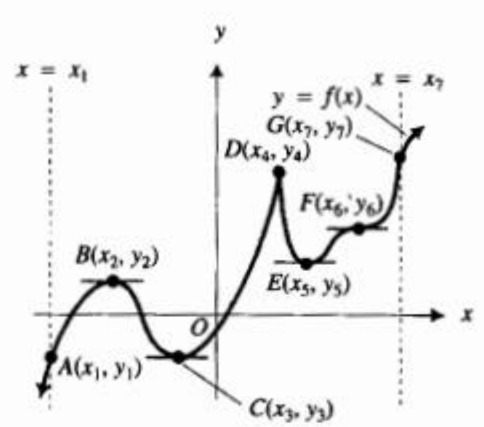


FIGURA 1

La función de la figura 1 es creciente en los intervalos cerrados siguientes: $[x_1, x_2]$; $[x_3, x_4]$; $[x_5, x_6]$;$[x_6, x_7]$; $[x_5, x_7]$.

3.4.2 Definición de función decreciente

Una función definida en un intervalo es **decreciente** en ese intervalo si y sólo si

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{siempre que} \quad x_1 < x_2$$

donde x_1 y x_2 son dos números cualesquiera del intervalo.

La función de la figura 1 es decreciente en los intervalos cerrados siguientes: $[x_2, x_3]$; $[x_4, x_5]$.

3.4.3 Teorema

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b):

(i) si $f'(x) > 0$ para toda x en (a, b), entonces f es creciente en $[a, b]$;
(ii) si $f'(x) < 0$ para toda x en (a, b), entonces f es decreciente en $[a, b]$.

3.4.4 Teorema Criterio de la primera derivada para extremos relativos

Sea f una función continua en todos los puntos del intervalo abierto (a, b) que contiene al número c, y suponga que f' existe en todos los puntos de (a, b) excepto posiblemente en c:

(i) si $f'(x) > 0$ para todos los valores de x en algún intervalo abierto que contenga a c como su extremo derecho, y si $f'(x) < 0$ para todos los valores de x de algún intervalo abierto que contenga a c como su extremo izquierdo, entonces f tiene un valor máximo relativo en c;
(ii) si $f'(x) < 0$ para todos los valores de x en algún intervalo abierto que contenga a c como su extremo derecho, y si $f'(x) > 0$ para todos los valores de x de algún intervalo abierto que contenga a c como su extremo izquierdo, entonces f tiene un valor mínimo relativo en c.

Para determinar analíticamente los extremos relativos de f:

1. Calcule $f'(x)$.
2. Determine los números críticos de f, es decir, los valores de x para los cuales $f'(x) = 0$ o para los que $f'(x)$ no existe.
3. Aplique el criterio de la primera derivada (teorema 3.4.4).

EJEMPLO 1 Trace la gráfica de la función definida por

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Determine a partir de la gráfica los extremos relativos de f, los valores de x en los que ocurren los extremos relativos, los intervalos en los que f es creciente, y en los que f es decreciente. Confirme analíticamente la información obtenida gráficamente.

Solución La figura 7 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-3, 5]$ por $[-2, 6]$. A partir de la gráfica, se determina que f tiene un valor máximo relativo de 5 en $x = 1$, y un valor mínimo relativo de 1 en $x = 3$. También, a partir de la gráfica se determina que f es creciente en los intervalos $(-\infty, 1]$ y $[3, +\infty)$, y es decreciente en el intervalo $[1, 3]$.

Ahora se confirmará esta información mediante el criterio de la primera derivada calculando primero la derivada de f:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

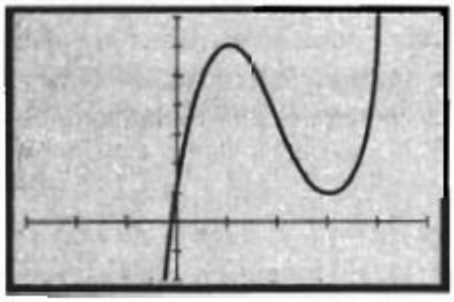
Los únicos números críticos son aquellos para los que $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x + 9 &= 0 \\ 3(x - 3)(x - 1) &= 0 \\ x = 3 \qquad x &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto, los números críticos de f son 1 y 3. Para determinar si f tiene un extremo relativo en estos números, se aplica el criterio de la primera derivada y los resultados se presentan en la tabla 1.

Tabla 1

	$f(x)$	$f'(x)$	*Conclusión*
$x < 1$		$+$	f es creciente
$x = 1$	5	0	f tiene un valor máximo relativo
$1 < x < 3$		$-$	f es decreciente
$x = 3$	1	0	f tiene un valor mínimo relativo
$3 < x$		$+$	f es creciente



[−3, 5] por [−2, 6]

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

FIGURA 7

Las conclusiones de la tabla confirman la información determinada gráficamente. ◀

EJEMPLO 2 Sea

$$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$$

Determine los extremos relativos de f y los valores de x en donde ellos ocurren. También determine los intervalos en los que f es creciente y en los que es decreciente. Apoye las respuestas gráficamente.

Solución Al diferenciar f se tiene

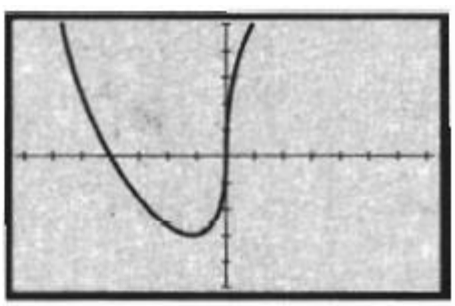
$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{4}{3}x^{1/3} + \tfrac{4}{3}x^{-2/3} \\ &= \tfrac{4}{3}x^{-2/3}(x + 1) \end{aligned}$$

Como $f'(x)$ no existe cuando $x = 0$, y $f'(x) = 0$ cuando $x = -1$, entonces los números críticos de f son -1 y 0. Se aplica el criterio de la primera derivada y se resumen los resultados en la tabla 2. En la tabla, la abreviación n.e. significa *no existe*.

Tabla 2

	$f(x)$	$f'(x)$	*Conclusión*
$x < -1$		$-$	f es decreciente
$x = -1$	-3	0	f tiene un valor mínimo relativo
$-1 < x < 0$		$+$	f es creciente
$x = 0$	0	n.e.	f no tiene un extremo relativo en $x = 0$
$0 < x$		$+$	f es creciente

La información de la tabla se apoya al trazar la gráfica de f en el rectángulo de inspección de $[-7.5, 7.5]$ por $[-5, 5]$, como se muestra en la figura 8. ◀



$[-7.5, 7.5]$ por $[-5, 5]$

$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$

FIGURA 8

EJEMPLO 3 Dada

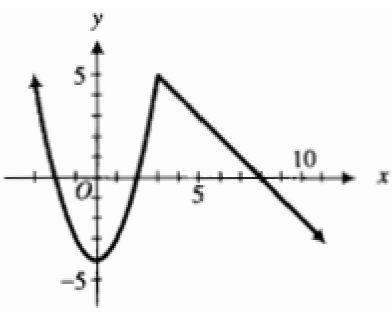
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 3 \\ 8 - x & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

determine los extremos relativos de f y los valores de x en los que ellos ocurren. También determine analíticamente los intervalos en los que f es creciente y en los que f es decreciente. Dibuje la gráfica.

Solución Al calcular $f'(x)$ se obtiene

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 3 \\ -1 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

Observe que f es continua en 3. Como $f'_-(3) = 6$ y $f'_+(3) = -1$, $f'(3)$ no existe. Por tanto, 3 es un número crítico de f. Otro número crítico de f es 0 porque $f'(x) = 0$ cuando $x = 0$. En la tabla 3 se resumen los resultados obtenidos al aplicar el criterio de la primera derivada. La gráfica de f se muestra en la figura 9.



$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 3 \\ 8 - x & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

FIGURA 9

Tabla 3

	$f(x)$	$f'(x)$	*Conclusión*
$x < 0$		$-$	f es decreciente
$x = 0$	-4	0	f tiene un valor mínimo relativo
$0 < x < 3$		$+$	f es creciente
$x = 3$	5	n.e.	f tiene un valor máximo relativo
$3 < x$		$-$	f es decreciente

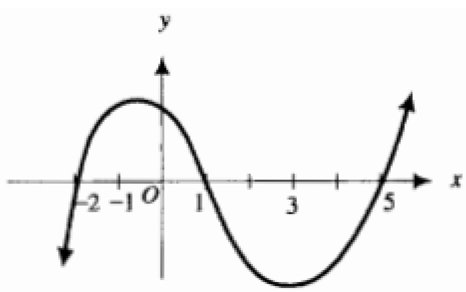
Como se hizo en los ejemplos ilustrativos 1 y 2, ahora se mostrará en los dos ejemplos siguientes cómo puede obtenerse el comportamiento de una función a partir de la gráfica de su derivada.

EJEMPLO 4 La figura 10 muestra la gráfica de la derivada de una función f cuyo dominio es el conjunto de los números reales. A partir de la gráfica determine los números críticos de f, los intervalos en los que f es creciente y en los que f es decreciente, y los extremos relativos de f.

Solución De la gráfica, se observa que $f'(x)$ existe en cualquier número real y que $f'(-2)$, $f'(1)$ y $f'(5)$ son iguales a cero. Por tanto, -2, 1 y 5 son números críticos de f. Como $f'(x) < 0$ cuando $x < -2$ o $1 < x < 5$, f es decreciente en los intervalos $(-\infty, -2]$ y $[1, 5]$. Debido a que $f'(x) > 0$ cuando $-2 < x < 1$ o $x > 5$, f es creciente en los intervalos $[-2, 1]$ y $[5, +\infty)$. La tabla 4 resume estos hechos, además de que f tiene valores mínimos relativos en $x = -2$ y $x = 5$, y f tiene un valor máximo relativo en $x = 1$, obtenidos al aplicar el criterio de la primera derivada.

Tabla 4

	$f'(x)$	*Conclusión*
$x < -2$	$-$	f es decreciente
$x = -2$	0	f tiene un valor mínimo relativo
$-2 < x < 1$	$+$	f es creciente
$x = 1$	0	f tiene un valor máximo relativo
$1 < x < 5$	$-$	f es decreciente
$x = 5$	0	f tiene un valor mínimo relativo
$5 < x$	$+$	f es creciente

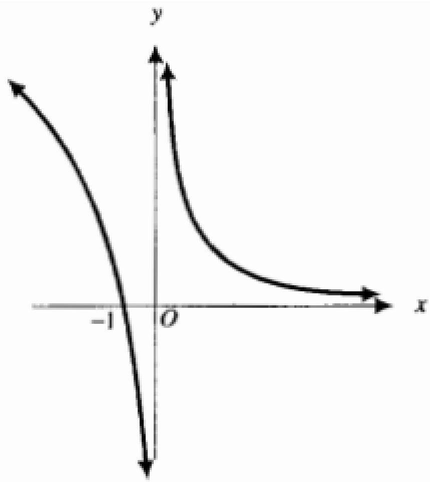


Gráfica de f'

FIGURA 10

EJEMPLO 5 Siga las instrucciones del ejemplo 4 para la función g, continua en su dominio el cual es el conjunto de los números reales, para la cual la figura 11 muestra la gráfica de su derivada.

Solución De la gráfica, como $g'(-1) = 0$, -1 es un número crítico de g. Debido a que el eje y es una asíntota vertical de gráfica de g', $g'(0)$ no existe, aunque 0 esté en el dominio de g. En consecuencia, también 0 es número crítico de g. Como $g'(x) > 0$ cuando $x < -1$ o $x > 0$, g es creciente en los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[0, +\infty)$. Ya que $g'(x) < 0$ cuando $-1 < x < 0$, g es decreciente en el intervalo $[-1, 0]$. Estos hechos se resumen en la tabla 5, teniendo en cuenta que se aplicó el criterio de la primera derivada para determinar los extremos relativos.



Gráfica de g'

FIGURA 11

Tabla 5

	$g'(x)$	*Conclusión*
$x < -1$	+	g es creciente
$x = -1$	0	g tiene un valor máximo relativo
$-1 < x < 0$	−	g es decreciente
$x = 0$	n.e.	g tiene un valor mínimo relativo
$0 < x$	+	g es creciente

En la sección 3.6, se obtendrán algunas propiedades adicionales de la función f del ejemplo 4 y de la función g del ejemplo 5 a partir de las gráficas de sus derivadas; después, a partir de estas propiedades, así como de las obtenidas en esta sección, se dibujarán posibles gráficas de f y g.

Problemas

En los ejercicios 1 a 18, (a) trace la gráfica, y determine a partir de ella: (b) los extremos relativos de f, (c) los valores de x en los que ocurren los extremos relativos, (d) los intervalos en los que f es creciente, (e) los intervalos en los que f es decreciente. Confirme analíticamente la información obtenida gráficamente.

2. $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$

5. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$

7. $f(x) = 4 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x; x \in [-2\pi, 2\pi]$

9. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

10. $f(x) = \frac{x - 2}{x + 2}$

11. $f(x) = (1 - x)^2(1 + x)^3$

16. $f(x) = x^{2/3}(x - 1)^2$

17. $f(x) = x^{5/4} + 10x^{1/4}$

En los ejercicios 19 a 32, haga lo siguiente analíticamente: (a) determine los extremos relativos de f; (b) determine los valores de x en los que ocurren los extremos relativos; (c) determine los intervalos en los que f es creciente; (d) determine los intervalos en los que f es decreciente. Apoye las respuestas gráficamente.

19. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2$

22. $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x - 2$

23. $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$

25. $f(x) = 2x\sqrt{3 - x}$

27. $f(x) = 2 - 3(x - 4)^{2/3}$

29. $f(x) = \frac{1}{2} \sec 4x; x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

32. $f(x) = (x + 1)^{2/3}(x - 2)^{1/3}$

En los ejercicios 33 a 38, haga lo siguiente analíticamente: (a) determine los extremos relativos de la función; (b) determine los valores de x en los que ocurren los extremos relativos; (c) determine los intervalos en los que la función es creciente; (d) determine los intervalos en los que la función es decreciente. (e) Dibuje la gráfica de la función a partir de las respuestas de los incisos (a)–(d).

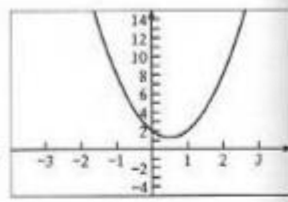
37. $f(x) = \begin{cases} (x+9)^2 - 8 & \text{si } x < -7 \\ -\sqrt{25 - (x+4)^2} & \text{si } -7 \le x \le 0 \\ (x-2)^2 - 7 & \text{si } 0 < x \end{cases}$

Solucionario

2. $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$; $f'(x) = 6x - 3$

Set $f'(x) = 0$ and obtain the critical number $\frac{1}{2}$.

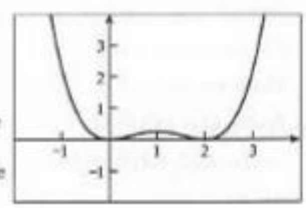
	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusion
$x < \frac{1}{2}$		$-$	f is decreasing on $(-\infty, \frac{1}{2}]$
$x = \frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	0	f has a relative minimum value
$\frac{1}{2} < x$		$+$	f is increasing on $[\frac{1}{2}, +\infty)$



5. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$; $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

Set $f'(x) = 0$: $x(x-1)(x-2) = 0$; $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusion
$x < 0$		$-$	f is decreasing on $(-\infty, 0]$
$x = 0$	0	0	f has a relative minimum value
$0 < x < 1$		$+$	f is increasing on $[0, 1]$
$x = 1$	$\frac{1}{4}$	0	f has a relative maximum value
$1 < x < 2$		$-$	f is decreasing on $[1, 2]$
$x = 2$	0	0	f has a relative minimum value
$2 < x$		$+$	f is increasing on $[2, +\infty)$

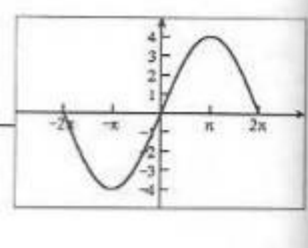


7. $f(x) = 4 \sin \frac{1}{2}x$, $x \in [-2\pi, 2\pi]$; $f'(x) = 2 \cos \frac{1}{2}x$

Because the sine function has period 2π, f has period 4π.

Set $f'(x) = 0$: $2 \cos \frac{1}{2}x = 0$; $\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\pi$ or $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi$; $x = -\pi$, $x = \pi$.

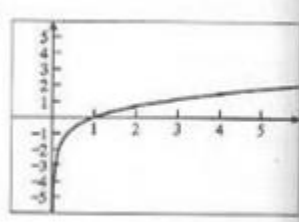
	$f(x)$	$f'(x)$	f is/has
$-2\pi \le x < -\pi$		$-$	decreasing on $[-2\pi, -\pi]$
$x = -\pi$	-4	0	a relative minimum value
$-\pi < x < \pi$		$+$	increasing on $[-\pi, \pi]$
$x = \pi$	4	0	a relative maximum value
$\pi < x \le 2\pi$		$-$	decreasing on $[\pi, 2\pi]$



9. $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{1/2} - x^{-1/2}$; $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}x^{-3/2} = \frac{1}{2}x^{-3/2}(x + 1)$

Set $f'(x) = 0$: $x = -1$. The domain of f is $(0, +\infty)$ and $f'(x)$ exists for all x in domain of f. -1 is not in the domain so there are no critical numbers and no relative extrema.

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusion
$0 < x$		$+$	f is increasing on $(0, +\infty)$



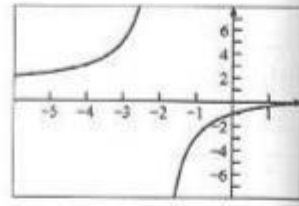
10. $f(x) = \frac{x-2}{x+2} = 1 - \frac{4}{x+2}$; $f'(x) = \frac{4}{(x+2)^2}$

f and f' are not defined at 2.

Because $f'(x) > 0$ at every number in its domain,

f is increasing on $(-\infty, -2)$ and $(2, +\infty)$.

There are no relative extrema.

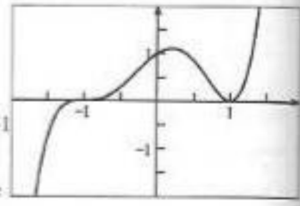


11. $f(x) = (1-x)^2(1+x)^3$. $f'(x) = -2(1-x)(1+x)^3 + 3(1+x)^2(1-x)^2$

$= (1-x)(1+x)^2[-2(1+x) + 3(1-x)] = (1-x)(1+x)^2(-5x+1)$

Set $f'(x) = 0$: $x = 1$, $x = -1$, $x = \frac{1}{5}$

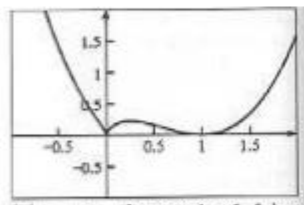
	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusion
$x < -1$		$+$	$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ is increasing on } (-\infty, \frac{1}{5}] \\ \text{no relative extremum at } x = -1 \end{array} \right.$
$x = -1$	0	0	
$-1 < x < \frac{1}{5}$		$+$	
$x = \frac{1}{5}$	$\frac{3456}{3125}$	0	f has a relative maximum value
$\frac{1}{5} < x < 1$		$-$	f is decreasing on $[\frac{1}{5}, 1]$
$x = 1$	0	0	f has a relative minimum value
$1 < x$		$+$	f is increasing $[1, +\infty)$



16. $f(x) = x^{2/3}(x-1)^2$

▹ A plot is shown at the right. f is continuous for all x.

$$f'(x) = x^{2/3}(2)(x-1) + (x-1)^2(\tfrac{2}{3}x^{-1/3})$$
$$= \tfrac{2}{3}x^{-1/3}(x-1)[3x + (x-1)]$$
$$= \frac{2(x-1)(4x-1)}{3x^{1/3}}$$



The critical numbers of f are 0, $\frac{1}{4}$, and 1. Because $f'_-(0) = -\infty$ and $f'_+(0) = +\infty$, the graph of f has a vertical tangent line at $x = 0$. Because the x axis is the normal line at $x = 0$ and the curve lies on one side of the normal line, the graph has a cusp at the origin. The table is filled in by rows.

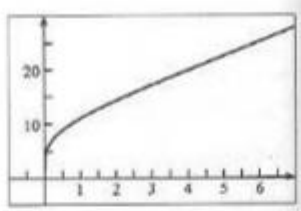
	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \frac{1}{4}$	$x = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$2(x-1)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$4x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$1/3x^{1/3}$	$-$	doesn't exist	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	doesn't exist	$+$	0	$-$	0	$+$
f is/has a	decreasing on $(-\infty, 0]$	relative minimum	increasing on $[0, \frac{1}{4}]$	relative maximum	decreasing on $[\frac{1}{4}, 1]$	relative minimum	increasing on $[1, +\infty)$
$f(x)$	$f(-.25) \approx .62$	0		$9/2^{16/3} \approx .22$		0	$f(1.5) \approx .32$

17. $f(x) = x^{5/4} + 10x^{1/4}$

$f'(x) = \frac{5}{4}x^{1/4} + \frac{10}{4}x^{-3/4}$

The domain of f is $[0, \infty)$. $f'(x) > 0$ if $x > 0$.

f is increasing on $[0, \infty)$.



In Exercises 19–32, compute (a) the relative extrema of f, (b) the values of x at which the relative extrema occur, (c) the intervals on which f is increasing, and (d) the intervals on which f is decreasing. Check by plotting.

19. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2$; $f'(x) = 6x^2 - 18x$

Set $f'(x) = 0$: $6x(x-3) = 0$; $x = 0$, $x = 3$

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusion
$x < 0$		+	f is increasing on $(-\infty, 0]$
$x = 0$	2	0	f has a relative maximum value
$0 < x < 3$		−	f is decreasing on $[0, 3]$
$x = 3$	−25	0	f has a relative minimum value
$3 < x$		+	f is increasing on $[3, +\infty)$

$f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x - 2$

$$f'(x) = 5x^4 - 15x^2 - 20 = 5(x+2)(x-2)(x^2+1)$$

Because $x^2 + 1 > 0$, the critical numbers are -2 and 2. The table is filled in one row at a time.

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$5(x+2)$	−	0	+	+	+
$x - 2$	−	−	−	0	+
$x^2 + 1$	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	−	0	+
f is/has a	increasing on $(-\infty, -2]$	relative maximum	decreasing on $[-2, 2]$	relative minimum	increasing on $[2, +\infty)$
$f(x)$	$f(-2.7) \approx -7$	46		−50	$f(2.7) \approx -11$

23. $f(x) = x + \frac{1}{x^2} = x + x^{-2}$; $f'(x) = 1 - 2x^{-3}$. Set $f'(x) = 0$: $\frac{x^3 - 2}{x^3} = 0$; $x = \sqrt[3]{}$

The domain of f is $\{x \mid x \neq 0\}$, and $f'(x)$ exists for all x in its domain.

The only critical number is $\sqrt[3]{2} \approx 1.26$.

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusion
$x < 0$		+	f is increasing on $(-\infty, 0)$
$x = 0$	not defined	not defined	vertical asymptote
$0 < x < \sqrt{2}$		−	f is decreasing on $(0, \sqrt{2}]$
$x = \sqrt{2}$	$\frac{3}{2}\sqrt{2} \approx 1.89$	0	f has a relative minimum value
$\sqrt{2} < x$		+	f is increasing on $[\sqrt{2}, +\infty)$

25. $f(x) = 2x\sqrt{3-x}$; $f'(x) = 2\sqrt{3-x} + 2x\left(-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}\right) = \frac{2(3-x) - x}{\sqrt{3-x}} = \frac{6-3x}{\sqrt{3-x}}$

Set $f'(x) = 0$: $6 - 3x = 0$; $x = 2$

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusion
$x < 2$		+	f is increasing on $(-\infty, 2]$
$x = 2$	4	0	f has a relative maximum value
$2 < x < 3$		−	f is decreasing on $[2, 3]$

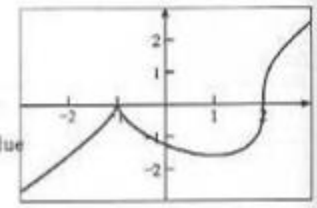
$f(x) = 2 - 3(x-4)^{2/3}$; $f'(x) = -2(x-4)^{-1/3}$. $f'(x) \neq 0$ for any value of x.
$f'(4)$ does not exist and 4 is in the domain of f. Therefore 4 is a critical number.

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusion
$x < 4$		+	f is increasing on $(-\infty, 4]$
$x = 4$	2	doesn't exist	f has a relative maximum value
$4 < x$		−	f is decreasing on $[4, +\infty)$

[illegible]. $f(x) = \frac{1}{2} \sec 4x$, $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$; $f'(x) = \frac{1}{2} \sec 4x \tan 4x(4) = 2 \sec 4x \tan 4x$
Set $f'(x) = 0$: $\tan 4x = 0$; $4x = 0$ or $4x = \pi$; $x = 0$, $x = \frac{1}{4}\pi$.
Because the secant function has period 2π, f has period $\frac{1}{2}\pi$. Thus we add $\frac{1}{2}k\pi$, where k is -1 or 0.

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusion
$x = \frac{1}{2}k\pi$	$\frac{1}{2}$	0	f has a relative minimum value
$\frac{1}{2}k\pi < x < \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi$		+	f is increasing
$x = \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi$	not defined	not defined	
$\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi < x < \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$		+	f is increasing
$x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$	$-\frac{1}{2}$	0	f has a relative maximum value
$\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi < x < \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi$		−	f is decreasing
$x = \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi$	not defined	not defined	
$\frac{3}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi < x < \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}k\pi$		−	f is decreasing

32. $f(x) = (x+1)^{2/3}(x-2)^{1/3}$. $f'(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{-1/3}(x-2)^{1/3} + \frac{1}{3}(x-2)^{-2/3}(x+1)^{2/3}$
$= \frac{1}{3}(x+1)^{-1/3}(x-2)^{-2/3}[2(x-2) + (x+1)] = (x+1)^{-1/3}(x-2)^{-2/3}(x-1)$
Set $f'(x) = 0$: $x = 1$. $f'(-1)$ and $f'(2)$ do not exist and -1 and 2 are in the domain of f. The critical numbers of f are -1, 1, and 2.

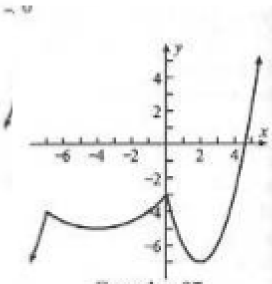


	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusion
$x < -1$		+	f is increasing on $(-\infty, -1]$
$x = -1$	0	does not exist	f has a relative maximum value; graph has a cusp
$-1 < x < 1$		−	f is decreasing on $[-1, 1]$
$x = 1$	$-\sqrt[3]{4}$	0	f has a relative minimum value
$1 < x < 2$		+	f is increasing on $[1, +\infty)$
$x = 2$	0	does not exist	no relative extremum at 2
$2 < x$		+	

37. $f(x) = \begin{cases} (x+9)^2 - 8 & \text{if } x < -7 \\ -\sqrt{25 - (x+4)^2} & \text{if } -7 \le x \le 0 \\ (x-2)^2 - 7 & \text{if } 0 < x \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} 2(x+9) & \text{if } x < -7 \\ \dfrac{x+4}{\sqrt{25 - (x+4)^2}} & \text{if } -7 < x < 0 \\ 2(x-2) & \text{if } 0 < x \end{cases}$

$f'(-7)$ and $f'(0)$ do not exist. Also, $f'(-9) = 0$, $f'(-4) = 0$, $f'(2) = 0$.
The critical numbers of f are -9, -7, -4, 0, and 2.

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusion
$x < -9$		−	f is decreasing on $[-\infty, -9]$
$x = -9$	-8	0	f has a relative minimum value
$-9 < x < -7$		+	f is increasing on $[-9, -7]$
$x = -7$	-4	doesn't exist	f has a relative maximum value
$-7 < x < -4$		−	f is decreasing on $[-7, -4]$
$x = -4$	-5	0	f has a relative minimum value
$-4 < x < 0$		+	f is increasing on $[-4, 0]$
$x = 0$	-3	doesn't exist	f has a relative maximum value
$0 < x < 2$		−	f is decreasing on $[0, 2]$
$x = 2$	-7	0	f has a relative minimum value
$2 < x$		+	f is increasing on $[2, +\infty)$



Exercise 37

CONCAVIDAD, PUNTOS DE INFLEXIÓN Y CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

3.5.1 Definición de concavidad hacia arriba

Se dice que la gráfica de una función es **cóncava hacia arriba** en el punto $(c, f(c))$ si existen $f'(c)$ y un intervalo abierto I que contiene a c tal que para todos los valores de $x \neq c$ en I, el punto $(x, f(x))$ de la gráfica está arriba de la recta tangente a la gráfica en $(c, f(c))$.

3.5.2 Definición de concavidad hacia abajo

Se dice que la gráfica de una función es **cóncava hacia abajo** en el punto $(c, f(c))$ si existen $f'(c)$ y un intervalo abierto I que contiene a c tal que para todos los valores de $x \neq c$ en I, el punto $(x, f(x))$ de la gráfica está debajo de la recta tangente a la gráfica en $(c, f(c))$.

3.5.3 Teorema

Sea f una función que es diferenciable en algún intervalo abierto que contiene a c. Entonces

(i) si $f''(c) > 0$, la gráfica de f es cóncava hacia arriba en $(c, f(c))$.
(ii) si $f''(c) < 0$, la gráfica de f es cóncava hacia abajo en $(c, f(c))$.

3.5.4 Definición de punto de inflexión

El punto $(c, f(c))$ es un **punto de inflexión** de la gráfica de la función f si la gráfica tiene una recta tangente en ese punto, y si existe un intervalo abierto I que contiene a c tal que si x está en I, entonces

(i) $f''(x) < 0$ si $x < c$ y $f''(x) > 0$ si $x > c$; o
(ii) $f''(x) > 0$ si $x < c$ y $f''(x) < 0$ si $x > c$.

3.5.5 Teorema

Suponga que la función f es diferenciable en algún intervalo abierto que contiene a c, y $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f. Entonces, si $f''(c)$ existe, $f''(c) = 0$.

EJEMPLO 1 La función del ejemplo 1 de la sección 3.4 está definida por

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Encuentre el punto de inflexión de la gráfica de f y determine dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Apoye la respuesta trazando en el mismo rectángulo de inspección la gráfica de f y la tangente de inflexión (la recta tangente en el punto de inflexión).

Solución Las derivadas primera y segunda de f son

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \quad \text{y} \quad f''(x) = 6x - 12$$

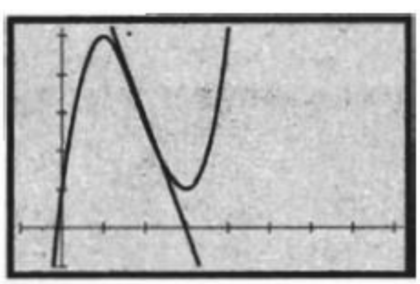
Como $f''(x)$ existe para todos los valores de x, el único punto de inflexión posible de f ocurre donde $f''(x) = 0$, el cual ocurre en $x = 2$. Para determinar si se tiene un punto de inflexión en $x = 2$, debe verificarse si $f''(x)$ cambia de signo, al mismo tiempo se determina la concavidad de la gráfica para los intervalos respectivos. Los resultados se resumen en la tabla 2.

Tabla 2

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < 2$			$-$	La gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 2$	3	-3	0	La gráfica de f tiene un punto de inflexión
$2 < x$			$+$	La gráfica de f es cóncava hacia arriba

En el ejemplo 1 de la sección 3.4, se mostró que f tiene un valor máximo relativo en 1 y un valor mínimo relativo en 3. La figura 13 muestra la gráfica de f y la tangente de inflexión en el rectángulo de inspección de $[-1, 8.4]$ por $[-1, 5.2]$, lo cual apoya la información de la tabla 2.

La gráfica de una función puede tener un punto de inflexión en el punto donde la segunda derivada no existe, esto se ilustra en el ejemplo siguiente.



$[-1, 8.4]$ por $[-1, 5.2]$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

FIGURA 13

EJEMPLO 2 Dada

$$f(x) = x^{1/3}$$

encuentre el punto de inflexión de la gráfica de f y determine dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Apoye las respuestas gráficamente.

Solución Las derivadas primera y segunda de f son

$$f'(x) = \tfrac{1}{3}x^{-2/3} \quad \text{y} \quad f''(x) = -\tfrac{2}{9}x^{-5/3}$$

De las ecuaciones anteriores se observa que $f'(0)$ y $f''(0)$ no existen. En el ejemplo ilustrativo 3 de la sección 2.2, se mostró que el eje y es la recta tangente de la gráfica de esta función en el origen. Además,

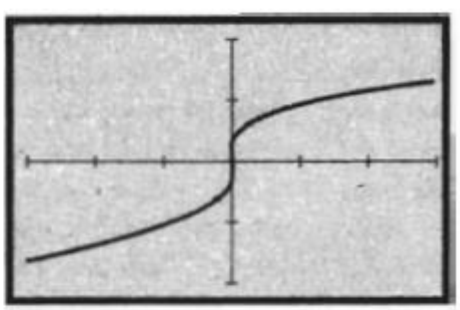
$$f''(x) > 0 \quad \text{si } x < 0 \quad \text{y} \quad f''(x) < 0 \quad \text{si } x > 0$$

Por tanto, de la definición 3.5.4 (ii), f tiene un punto de inflexión en el origen. La concavidad de la gráfica se determina a partir del signo de $f''(x)$, los resultados se resumen en la tabla 3.

Tabla 3

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < 0$		+	+	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = 0$	0	n.e.	n.e.	La gráfica de f tiene un punto de inflexión
$0 < x$		+	−	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo

La figura 14, que muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [−3, 3] por [−2, 2], apoya la información de la tabla 3. ◀



[−3, 3] por [−2, 2]

$f(x) = x^{1/3}$

FIGURA 14

EJEMPLO 3 Sea

$$f(x) = (1 - 2x)^3$$

Trace la gráfica, y a partir de ésta, estime el punto de inflexión y dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Confirme las estimaciones analíticamente.

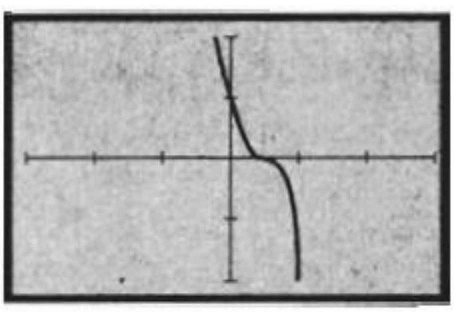
Solución La figura 15 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$. De la gráfica se estima que el punto de inflexión está en $(0.5, 0)$, la gráfica es cóncava hacia arriba para $x < 0.5$. y la gráfica es cóncava hacia abajo para $x > 0.5$. Ahora se confirmarán estas estimaciones analíticamente. Las derivadas primera y segunda de f son

$$f'(x) = -6(1 - 2x)^2 \quad \text{y} \quad f''(x) = 24(1 - 2x)$$

Como $f''(x)$ existe para todos los valores de x, el único punto de inflexión posible es donde $f''(x) = 0$, esto es, en $x = 0.5$. De los resultados resumidos en la tabla 4, $f''(x)$ cambia de signo, de + a −, en $x = 0.5$; de modo que la gráfica tiene un punto de inflexión ahí. Observe también que debido a que $f'(0.5) = 0$, la gráfica tiene una recta tangente horizontal en el punto de inflexión.

Tabla 4

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < 0.5$			+	La gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = 0.5$	0	0	0	La gráfica de f tiene un punto de inflexión
$0.5 < x$			−	La gráfica de f es cóncava hacia abajo



$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

$f(x) = (1 - 2x)^3$

FIGURA 15

3.5.6 Teorema Criterio de la segunda derivada para extremos relativos

Sea c un número crítico de una función f en el que $f'(c) = 0$, y suponga que f'' existe para todos los valores de x en un intervalo abierto que contiene a c.

(i) Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un valor máximo relativo en c.
(ii) Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un valor mínimo relativo en c.

▶ ***EJEMPLO 4*** Sea

$$f(x) = x^4 + \tfrac{4}{3}x^3 - 4x^2$$

determine los extremos relativos de f aplicando el criterio de la segunda derivada. Utilice esta información para dibujar la gráfica de f. Apoye los resultados en una graficadora.

Solución Se calculan las derivadas primera y segunda de f:

$$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x \qquad f''(x) = 12x^2 + 8x - 8$$

Al considerar $f'(x) = 0$ se obtiene

$$4x(x + 2)(x - 1) = 0$$
$$x = 0 \qquad x = -2 \qquad x = 1$$

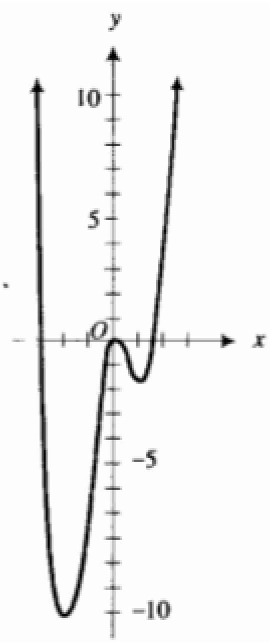
Por tanto, los números críticos de f son -2, 0 y 1. Para determinar si existe o no un extremo relativo en alguno de estos números críticos, se considera el signo de la segunda derivada en ellos. Los resultados se resumen en la tabla 5.

Tabla 5

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x = -2$	$-\frac{32}{3}$	0	+	f tiene un valor mínimo relativo
$x = 0$	0	0	−	f tiene un valor máximo relativo
$x = 1$	$-\frac{5}{3}$	0	+	f tiene un valor mínimo relativo

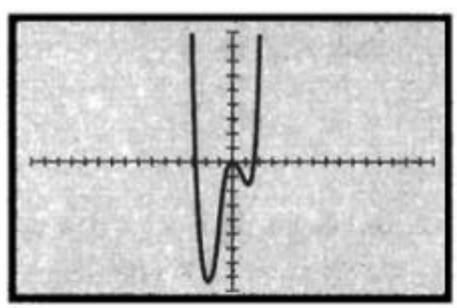
A partir de la información de esta tabla y localizando algunos puntos más, se dibuja la gráfica de f, mostrada en la figura 18. La figura 19, que presenta la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-15, 15]$ por $[-11, 9]$, apoya los resultados. ◀

Si $f''(c) = 0$ y $f'(c) = 0$, nada puede concluirse acerca de un extremo relativo de f en c. Los tres ejemplos ilustrativos siguientes justifican esta afirmación.



$f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$

FIGURA 18

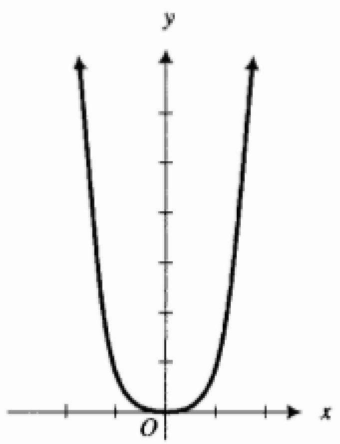


$[-15, 15]$ por $[-11, 9]$

$f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$

FIGURA 19

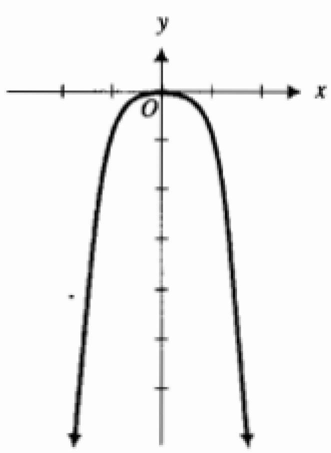
EJEMPLO ILUSTRATIVO 6 Si $f(x) = x^4$, entonces $f'(x) = 4x^3$ y $f''(x) = 12x^2$. De modo que, $f(0)$, $f'(0)$ y $f''(0)$ son iguales a cero. Al aplicar el criterio de la primera derivada se aprecia que f tiene un valor mínimo relativo en 0. La gráfica de f se muestra en la figura 20.



$f(x) = x^4$

FIGURA 20

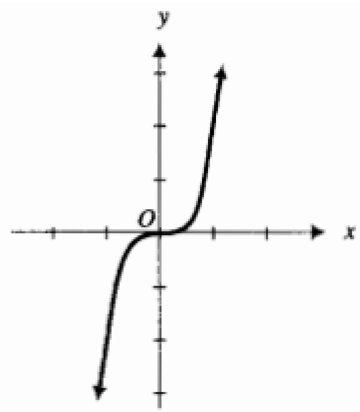
EJEMPLO ILUSTRATIVO 7 Si $g(x) = -x^4$, entonces $g'(x) = -4x^3$ y $g''(x) = -12x^2$. Por tanto, $g(0)$, $g'(0)$ y $g''(0)$ son iguales a cero. En este caso g tiene un valor máximo relativo en 0, como puede verse al aplicar el criterio de la primera derivada. La figura 21 muestra la gráfica de g.



$g(x) = -x^4$

FIGURA 21

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 8** Si $h(x) = x^3$, entonces $h'(x) = 3x^2$ y $h''(x) = 6x$, por lo que $h(0)$, $h'(0)$ y $h''(0)$ son iguales a cero. La función h no tiene extremo relativo en 0 porque si $x < 0$, $h(x) < h(0)$; y si $x > 0$, $h(x) > h(0)$. La gráfica de h se presenta en la figura 22. ◀



$h(x) = x^3$

FIGURA 22

▶ ***EJEMPLO 5*** Para la función seno, determine los extremos relativos aplicando el criterio de la segunda derivada, y encuentre los puntos de inflexión de su gráfica. También determine las pendientes de las tangentes de inflexión. Trace la gráfica de la función seno en un intervalo de longitud 2π que contenga el punto de inflexión que posea la menor abscisa positiva. En el mismo rectángulo de inspección, trace la tangente de inflexión.

Solución Sean

$$f(x) = \text{sen } x \qquad f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\text{sen } x$$

Las funciones f, f' y f'' están definidas para toda x. Los números críticos se obtiene al considerar $f'(x) = 0$:

$$\cos x = 0$$
$$x = \tfrac{1}{2}\pi + k\pi \qquad k \text{ es cualquier número entero}$$

A fin de determinar si existe o no un extremo relativo en alguno de estos números críticos se obtiene el signo de la segunda derivada en cada uno de ellos.

$$\begin{aligned} f''(\tfrac{1}{2}\pi + k\pi) &= -\text{sen}(\tfrac{1}{2}\pi + k\pi) \\ &= -\cos k\pi \\ &= \begin{cases} -1 & \text{si } k \text{ es un entero par} \\ \ \ 1 & \text{si } k \text{ es un entero impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Los resultados obtenidos al aplicar el criterio de la segunda derivada se resumen en la tabla 6.

Tabla 6

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ (k es un entero par)	1	0	−	f tiene un valor máximo relativo
$x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ (k es un entero impar)	−1	0	+	f tiene un valor mínimo relativo

Para determinar los puntos de inflexión se considera $f''(x) = 0$:

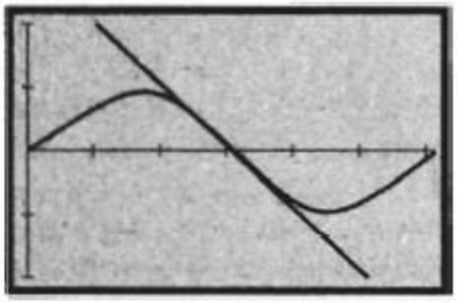
$$-\ \text{sen}\, x = 0$$
$$x = k\pi \qquad k \text{ es cualquier entero}$$

Como $f''(x)$ cambia de signo en cada uno de estos valores de x, la gráfica tiene un punto de inflexión en cada punto que tiene alguna de estas abscisas. En cada punto de inflexión,

$$\begin{aligned} f'(k\pi) &= \cos k\pi \qquad k \text{ es cualquier entero} \\ &= \begin{cases} \ \ 1 & \text{si } k \text{ es un entero par} \\ -1 & \text{si } k \text{ es un entero impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto, las pendientes de las tangentes de inflexión son +1 o −1.

La figura 23 muestra la gráfica de la función seno y la tangente de inflexión en el punto $(\pi, 0)$ trazadas en el rectángulo de inspección de $[0, 2\pi]$ por $[-2, 2]$. ◀



$[0, 2\pi]$ por $[-2, 2]$

$f(x) = \text{sen}\, x$

FIGURA 23

Problemas

En los ejercicios 1 a 8, encuentre los puntos de inflexión de la función y determine dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Apoye las respuestas trazando en el mismo rectángulo de inspección la gráfica de la función y las tangentes de inflexión.

2. $g(x) = x^3 - 6x^2 + 20$

3. $g(x) = x^4 - 8x^3$

4. $f(x) = x^4 - 2x^3$

5. $F(x) = \dfrac{2}{x^2 + 3}$

8. $f(x) = 3 \cos 2x; x \in [-\pi, \pi]$

En los ejercicios 9 a 16, trace la gráfica de la función y a partir de la gráfica estime el punto de inflexión y dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y en dónde lo es hacia abajo. Confirme las estimaciones analíticamente.

10. $g(x) = 2x^3 - 1$

11. $G(x) = (x - 1)^3$

12. $F(x) = (x + 2)^3$

13. $f(x) = (x + 2)^{1/3}$

14. $g(x) = (x - 1)^{1/3}$

15. $g(x) = \tan \frac{1}{2}x; x \in (-\pi, \pi)$

16. $f(x) = \cot 2x; x \in (0, \frac{1}{2}\pi)$

En los ejercicios 17 a 22, encuentre el punto de inflexión de la gráfica de la función, si existe alguno, y determine dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Dibuje la gráfica.

18. $f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 4 - x^2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$

19. $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{si } 0 < x \end{cases}$

20. $g(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$

Solucionario

2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 20$; $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$; $f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$.

The critical number for f' is 2.

	$x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f''(x)=6(x-2)$	$-$	0	$+$
graph is/ has a	concave downward	point of inflection	concave upward
$f(x)$; $f'(x)$		4; -12	

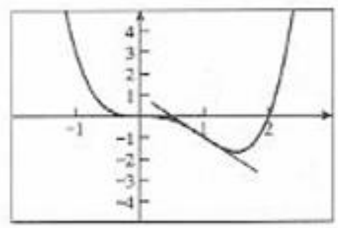
3. $g(x) = x^4 - 8x^3$; $g'(x) = 4x^3 - 24x^2$; $g''(x) = 12x^2 - 48x = 12x(x-4)$. Set $g''(x) = 0$: $x = 0$, $x = 4$

	$g(x)$	$g'(x)$	$g''(x)$	Conclusion
$x < 0$			$+$	graph is concave upward
$x = 0$	0	0	0	point of inflection
$0 < x < 4$			$-$	graph is concave downward
$x = 4$	-256	-128	0	point of inflection
$4 < x$			$+$	graph is concave upward

4. $f(x) = x^4 - 2x^3$; $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$; $f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$.

The critical numbers for f' are 0 and 1. A plot is shown at the right.

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$12x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
graph is/ has a	concave upward	point of inflection	concave downward	point of inflection	concave upward



5. $F(x) = 2(x^2+3)^{-1}$; $F'(x) = -4x(x^2+3)^{-2}$

$F''(x) = -4(x^2+3)^{-2} + 8x(x^2+3)^{-3}(2x) = 4(x^2+3)^{-3}[-(x^2+3) + 4x^2]$

$= 4(x^2+3)^{-3}(3x^2-3) = 12(x^2+3)^{-3}(x+1)(x-1)$

Set $F''(x) = 0$: $x = -1$, $x = 1$

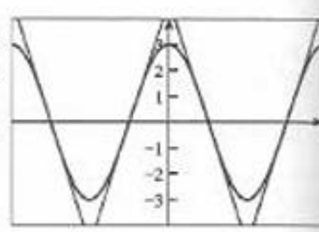
	$F(x)$	$F'(x)$	$F''(x)$	Conclusion
$x < -1$			$+$	graph is concave upward
$x = -1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	point of inflection
$-1 < x < 1$			$-$	graph is concave downward
$x = 1$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	point of inflection
$1 < x$			$+$	graph is concave upward

8. $f(x) = 3\cos 2x$, $x \in [-\pi, \pi]$; $f'(x) = -6\sin 2x$; $f''(x) = -12\cos 2x$

Because the graph is symmetric with respect to the y-axis, we consider $[0, \pi]$.

Because $f''(x) = 0$ if $2x = \frac{1}{2}\pi$ or $\frac{3}{2}\pi$, the critical numbers of f' are $\frac{1}{4}\pi$ and $\frac{3}{4}\pi$.

	$x < \frac{1}{4}\pi$	$x = \frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{4}\pi < x < \frac{3}{4}\pi$	$x = \frac{3}{4}\pi$	$x > \frac{3}{4}\pi$
$f'' = -12\cos 2x$	$-$	0	$+$	0	$-$
graph is/ has a	concave downward	point of inflection	concave upward	point of inflection	concave downward
$f(x)$; $f'(x)$		0; -6		0; 6	



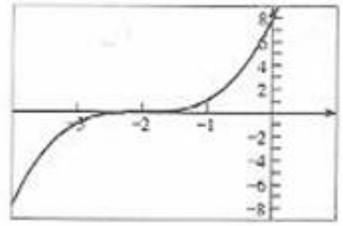
10. $g(x) = 2x^3 - 1$; $g'(x) = 6x^2$; $g''(x) = 12x$. Set $g''(x) = 0$: $12x = 0$; $x = 0$

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$g''(x) = 12x$	$-$	0	$+$
graph is/ has a	concave downward	point of inflection	concave upward

11. $G(x) = (x-1)^3$; $G'(x) = 3(x-1)^2$; $g''(x) = 6(x-1)$
Set $g''(x) = 0$: $x = 1$

	$G(x)$	$G'(x)$	$G''(x)$	Conclusion
$x < 1$			$-$	graph is concave downward
$x = 1$	0	0	0	point of inflection
$1 < x$			$+$	graph is concave upward

12. $F(x) = (x+2)^3$
» A plot is shown at the right. $F'(x) = 3(x+2)^2$; $F''(x) = 6(x+2)$
The critical number for F' is -2.



	$x < -2$	$x = -2$	$x > -2$
$F'(x) = 6(x+2)$	$-$	0	$+$
graph is/ has a	concave downward	point of inflection	concave upward
$F(x)$; $F'(x)$		0; 0	

13. $f(x) = (x+2)^{1/3}$; $f'(x) = \frac{1}{3}(x+2)^{-2/3}$; $f''(x) = -\frac{2}{9}(x+2)^{-5/3}$
$f''(x)$ is never 0; $f''(-2)$ does not exist but f is continuous at -2
and $\lim_{x \to -2} f'(x) = +\infty$ so there is a vertical tangent line at $x = -2$.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusion
$x < -2$			$+$	graph is concave upward
$x = -2$	0	doesn't exist	doesn't exist	point of inflection
$-2 < x$			$-$	graph is concave downward

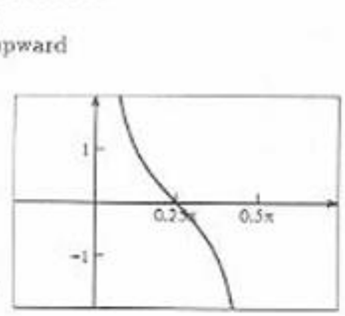
14. $g(x) = (x-1)^{1/3}$; $g'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-2/3}$; $g''(x) = -\frac{2}{9}(x-1)^{-5/3}$
$g''(x)$ is never 0; $g''(1)$ does not exist but g is continuous at 1
and $\lim_{x \to 1} g'(x) = +\infty$ so there is a vertical tangent line at $x = 1$.

	$g(x)$	$g'(x)$	$g''(x)$	Conclusion
$x < 1$			$+$	graph is concave upward
$x = 1$	0	doesn't exist	doesn't exist	point of inflection
$1 < x$			$-$	graph is concave downward

15. $f(x) = \tan \frac{1}{2}x$, $x \in (-\pi, \pi)$; $f'(x) = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{1}{2}x$; $f''(x) = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{1}{2}x \tan \frac{1}{2}x$
Set $f''(x) = 0$: $\tan \frac{1}{2}x = 0$, $\frac{1}{2}x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$; $\frac{1}{2}x = 0$; $x = 0$

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusion
$-\pi < x < 0$			$-$	graph is concave downward
$x = 0$	0	$\frac{1}{2}$	0	point of inflection
$0 < x < \pi$			$+$	graph is concave upward

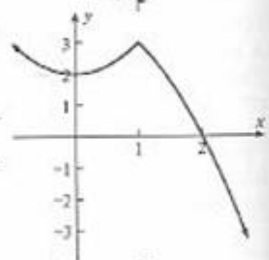
16. $g(x) = \cot 2x$; $x \in (0, \frac{1}{2}\pi)$
» A plot is shown at the right.



$$g'(x) = -2 \csc^2 2x; \qquad g''(x) = 8 \csc^2 2x \cot 2x$$

If $g''(x) = 0$, then $\cot 2x = 0$, so $2x = \frac{1}{2}\pi$ and $x = \frac{1}{4}\pi$.
If $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ then $g''(x) > 0$, and the graph is concave upward.
If $\frac{1}{4}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ then $g''(x) < 0$, and the graph is concave downward.
Because $g'(\frac{1}{4}\pi) = -2$ and $g(\frac{1}{4}\pi) = 0$, the point $(\frac{1}{4}\pi, 0)$ is a point of inflection

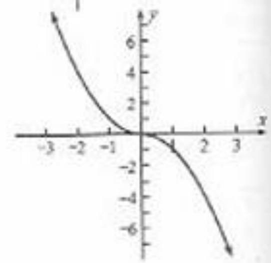
18. $f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & \text{if } x \le 1 \\ 4 - x^2 & \text{if } 1 < x \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } x < 1 \\ -2x & \text{if } 1 < x \end{cases}$; $f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } x < 1 \\ -2 & \text{if } 1 < x \end{cases}$



$f''(x)$ is never 0; $f'(1)$ does not exist so there is no tangent line there.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Graph is/has a
$x < 1$			+	concave upward
$x = 1$	3	doesn't exist	doesn't exist	not a point of inflection
$1 < x$			−	concave downward

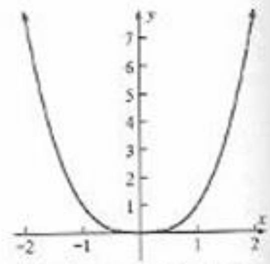
19. $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \le 0 \\ -x^2 & \text{if } 0 < x \end{cases}$; $g'(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } x \le 0 \\ -2x & \text{if } 0 < x \end{cases}$; $g''(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } x < 0 \\ -2 & \text{if } 0 < x \end{cases}$



$g''(x)$ is never 0; $g''(0)$ does not exist but there is a tangent line at 0.

	$g(x)$	$g'(x)$	$g''(x)$	Graph is/has a
$x < 0$			+	concave upward
$x = 0$	0	0	doesn't exist	point of inflection
$0 < x$			−	concave downward

20. $g(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{if } x < 0 \\ x^3 & \text{if } 0 \le x \end{cases}$

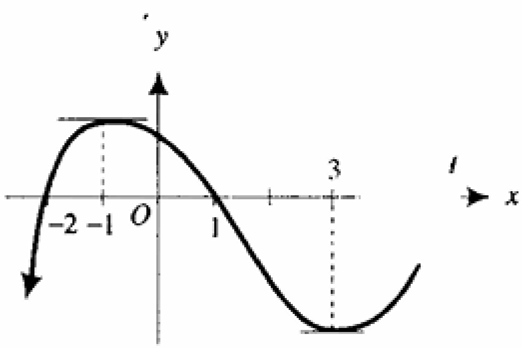


▹ $g'(x) = \begin{cases} -3x^2 & \text{if } x < 0 \\ 3x^2 & \text{if } 0 < x \end{cases}$ $g''(x) = \begin{cases} -6x & \text{if } x < 0 \\ 6x & \text{if } 0 < x \end{cases}$

From Theorem 4.3.4 we have $g'_-(0) = -3(0^2) = 0$ and $g'_+(0) = 3(0^2) = 0$ and so $g'(0) = 0$. Similarly, $g''_-(0) = 0$ and $g''_+(0) = 0$ and so $g''(0) = 0$. Because $g''(x) > 0$ if $x \ne 0$, we conclude that the graph of g is concave upward at every point (including the point where $x = 0$). Thus there is no point of inflection. Because $g'(x) < 0$ if $x < 0$, then g is decreasing on the interval $(-\infty, 0]$. Because $g'(x) > 0$ if $x > 0$, the g is increasing on the interval $[0, +\infty)$. Thus $g(0) = 0$ is a relative minimum value of g, and because $g'(0) = 0$, the graph of g has a horizontal tangent line at the point $(0, 0)$. The graph is shown at the right.

TRAZO DE LAS GRÁFICAS DE FUNCIONES Y DE SUS DERIVADAS

EJEMPLO 1 La gráfica de la derivada de la función del ejemplo 4 de la sección 3.4 se muestra en la figura 1. A partir de esta gráfica determine las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de f y dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Dibuje una posible gráfica de f que tenga estas propiedades así como las propiedades obtenidas en el ejemplo 4 de la sección 3.4. Suponga que los únicos ceros de f son 3.5 y 6.



Gráfica de f'

FIGURA 1

Solución La segunda derivada f'' evaluada en el número c es la pendiente de la recta tangente en el punto donde $x = c$ de la gráfica de f'. En consecuencia, como la gráfica de f' tiene rectas tangentes horizontales en $x = -1$ y en $x = 3$, $f''(-1) = 0$ y $f''(3) = 0$. En la figura 1 se observa que f' es creciente, es decir, $f''(x) > 0$ cuando $x < -1$ y cuando $x > 3$; por tanto, por el teorema 3.5.3(i), la gráfica de f es cóncava hacia arriba para estos valores de x. Además, f' es decreciente, esto es, $f''(x) < 0$ cuando $-1 < x < 3$; por tanto, por el teorema 3.5.3(ii), la gráfica de f es cóncava hacia abajo para estos valores de x. Más aún, de la definición 3.5.4, se puede concluir que la gráfica de f tiene puntos de inflexión donde $x = -1$ y $x = 3$. Estos hechos se resumen en la tabla 1.

Tabla 1

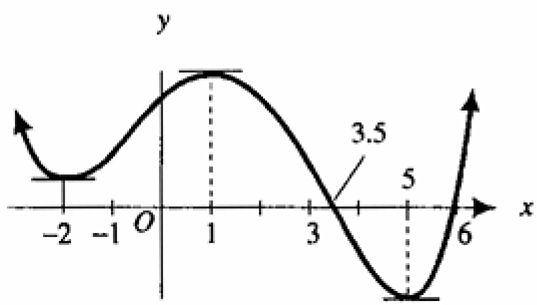
	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < -1$	+	La gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = -1$	0	La gráfica de f tiene un punto de inflexión
$-1 < x < 3$	−	La gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 3$	0	La gráfica de f tiene un punto de inflexión
$3 < x$	+	La gráfica de f es cóncava hacia arriba

Ahora refiérase a la tabla 2, la cual contiene los hechos de la tabla 1 anterior y de la tabla 4 de la sección 3.4.

Tabla 2

	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < -2$	−	+	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = -2$	0	+	f tiene un valor mínimo relativo; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$-2 < x < -1$	+	+	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = -1$	+	0	f es creciente; la gráfica de f tiene un punto de inflexión
$-1 < x < 1$	+	−	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 1$	0	−	f tiene un valor máximo relativo; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$1 < x < 3$	−	−	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 3$	−	0	f es decreciente; la gráfica de f tiene un punto de inflexión
$3 < x < 5$	−	+	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = 5$	0	+	f tiene un valor mínimo relativo; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$5 < x$	+	+	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba.

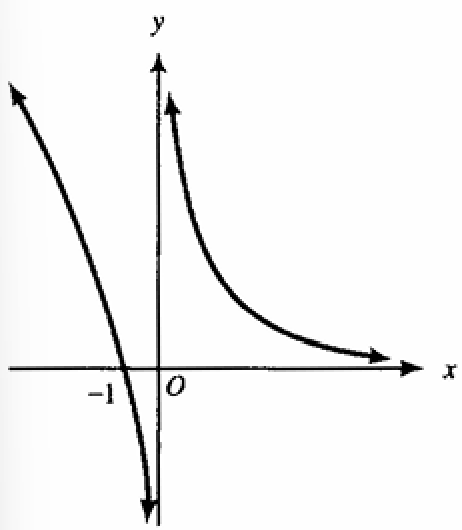
Puesto que los únicos ceros de f son 3.5 y 6, estos números son las únicas intercepciones x de la gráfica. Con esta información y las propiedades de la tabla 2, se dibuja una posible gráfica de f, la cual se muestra en la figura 2. ◀



Gráfica de f

FIGURA 2

EJEMPLO 2 La figura 3 muestra la gráfica de la derivada de la función g del ejemplo 5 de la sección 3.4. A partir de esta gráfica determine las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de g y dónde la gráfica de g es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Dibuje una posible gráfica de g que tenga estas propiedades así como las propiedades obtenidas en el ejemplo 5 de la sección 3.4. Suponga que los únicos ceros de g son −2 y 0.



Gráfica de g'

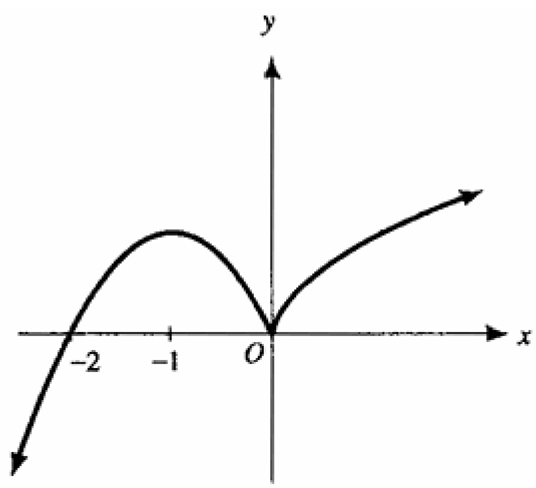
FIGURA 3

Solución De la gráfica de g', g' es decreciente, es decir, $g''(x) < 0$ cuando $x < 0$ y cuando $x > 0$. Por tanto, la gráfica de g es cóncava hacia abajo para estos valores de x. La gráfica de g nunca es cóncava hacia arriba. Como $g'(0)$ no existe, tampoco existe $g''(0)$. Puesto que $g''(x)$ no cambia de signo, la gráfica de g no tiene puntos de inflexión. Esta información se incorpora a la de la tabla 5 de la sección 3.4 para obtener la tabla 3.

Tabla 3

	$g'(x)$	$g''(x)$	*Conclusión*
$x < -1$	+	−	g es creciente; la gráfica de g es cóncava hacia abajo
$x = -1$	0	−	g tiene un valor máximo relativo; la gráfica de g es cóncava hacia abajo
$-1 < x < 0$	−	−	g es decreciente; la gráfica de g es cóncava hacia abajo
$x = 0$	n. e.	n. e.	g tiene un valor mínimo relativo
$0 < x$	+	−	g es creciente; la gráfica de g es cóncava hacia abajo

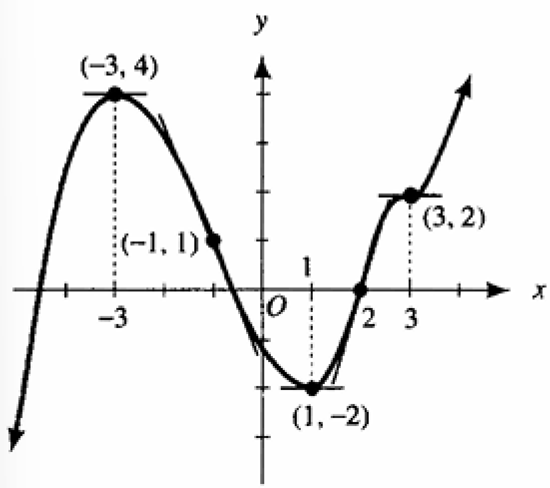
La figura 4 muestra una posible gráfica de g dibujada a partir de las propiedades de la tabla 3 y del hecho de que los únicos ceros de g son −2 y 0. ◀



Gráfica de g

FIGURA 4

EJEMPLO 3 En la figura 5 se muestran la gráfica de una función f y segmentos de las tangentes de inflexión. A partir de la figura, determine la información siguiente e incorpórela en una tabla semejante a las tabla 2 y 3: (i) los intervalos en los que f es creciente; (ii) los intervalos en los que f es decreciente; (iii) los extremos relativos de f; (iv) los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia arriba; (v) los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia abajo; (vi) las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de f. A partir de la información de la tabla, dibuje posibles gráficas de f' y f''.



Gráfica de f

FIGURA 5

Solución De la figura se obtiene la información siguiente:

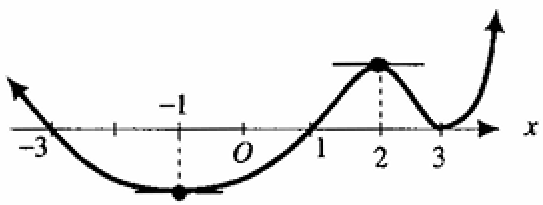
(i) f es creciente en $(-\infty, -3]$, $[1, 3]$ y $[3, +\infty)$;
(ii) f es decreciente en $[-3, 1]$;
(iii) f tiene un valor máximo relativo de 4 en $x = -3$, y un valor mínimo relativo de -2 en $x = 1$;
(iv) la gráfica de f es cóncava hacia arriba para x en los intervalos $(-1, 2)$ y $(3, +\infty)$;
(v) la gráfica de f es cóncava hacia abajo para x en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(2, 3)$;
(vi) la gráfica de f tiene puntos de inflexión donde $x = -1$, $x = 2$ y $x = 3$.

En la tabla 4, se incorpora esta información junto con los signos de f' y f'' en los intervalos especificados en (i)–(vi).

Tabla 4

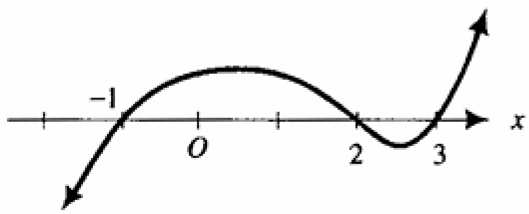
	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < -3$	+	−	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = -3$	0	−	f tiene un valor máximo relativo; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$-3 < x < -1$	−	−	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = -1$	−	0	f es decreciente; la gráfica de f tiene un punto de inflexión
$-1 < x < 1$	−	+	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = 1$	0	+	f tiene un valor mínimo relativo; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$1 < x < 2$	+	+	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = 2$	+	0	f es creciente; la gráfica de f tiene un punto de inflexión
$2 < x < 3$	+	−	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 3$	0	0	La gráfica de f tiene un punto de inflexión con una recta tangente horizontal
$3 < x$	+	+	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba.

A partir de la tabla se han dibujado en las figuras 6 y 7 posibles gráficas de f' y f'', respectivamente. ◀



Gráfica de f'

FIGURA 6



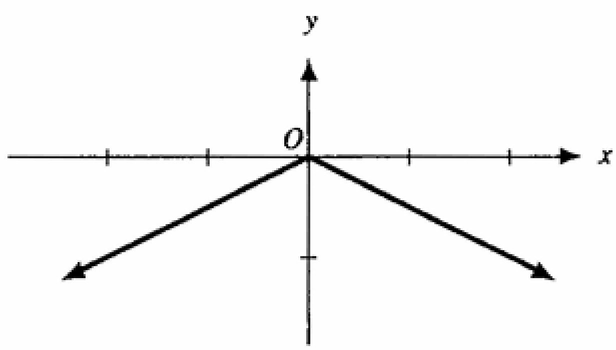
Gráfica de f''

FIGURA 7

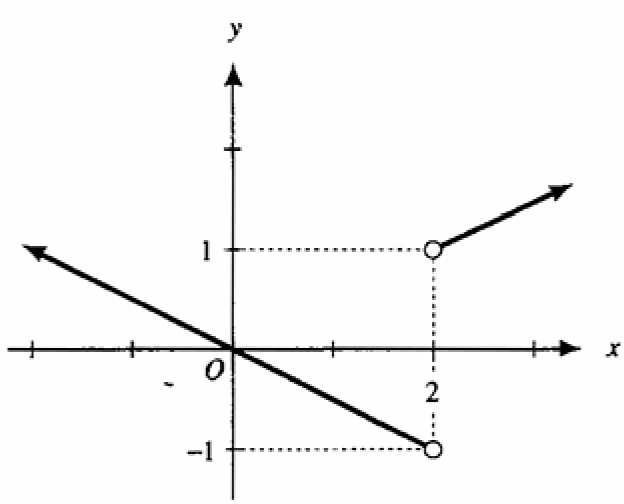
Problemas

En los ejercicios 7 a 18, la figura adjunta muestra la gráfica de la derivada de una función f cuyo dominio es el conjunto de los números reales y la cual es continua en todo número. A partir de la gráfica, determine la información siguiente e incorpórela en una tabla similar a las tablas 2 y 3 de esta sección: (i) los intervalos en los que f es creciente; (ii) los intervalos en los que f es decreciente; (iii) los extremos relativos de f; (iv) los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia arriba; (v) los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia abajo; (vi) las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de f. Dibuje una posible gráfica de f que tenga las propiedades de la tabla si los únicos ceros de f son los indicados en cada ejercicio.

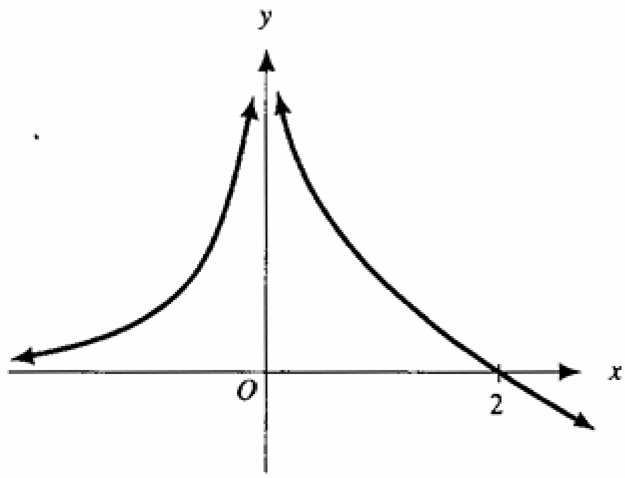
8. El cero de f es 0.



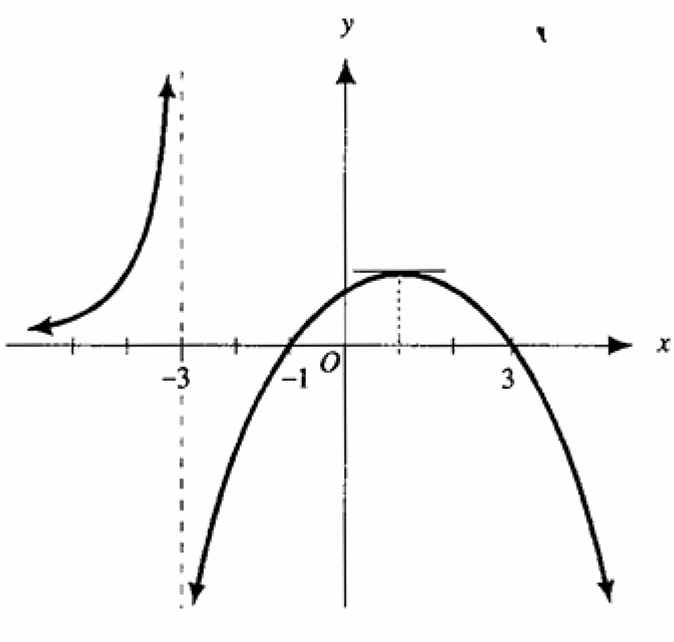
10. Los ceros de f son 0 y 4.



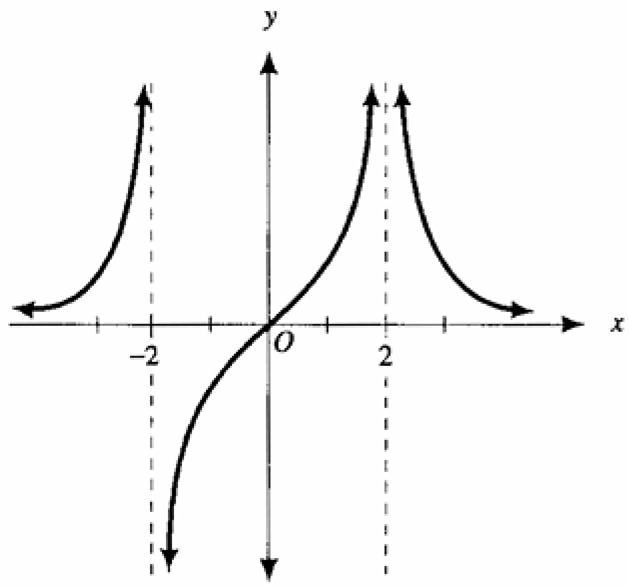
11. Los ceros de f son 0 y 3.



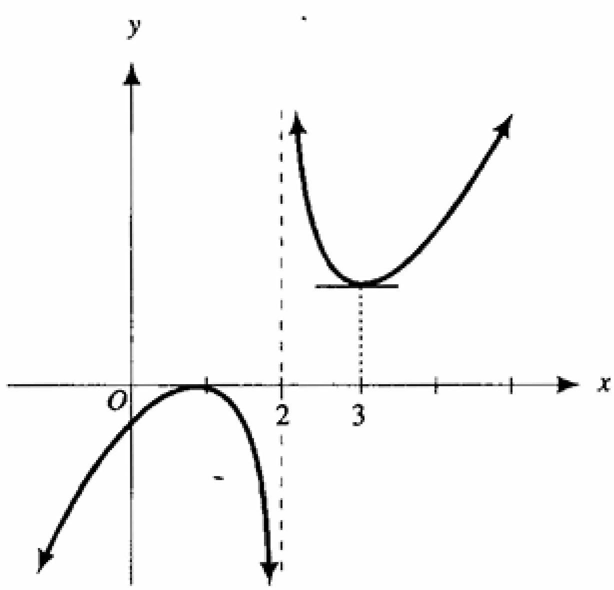
12. Los ceros de f son −4, −2, 1 y 5.



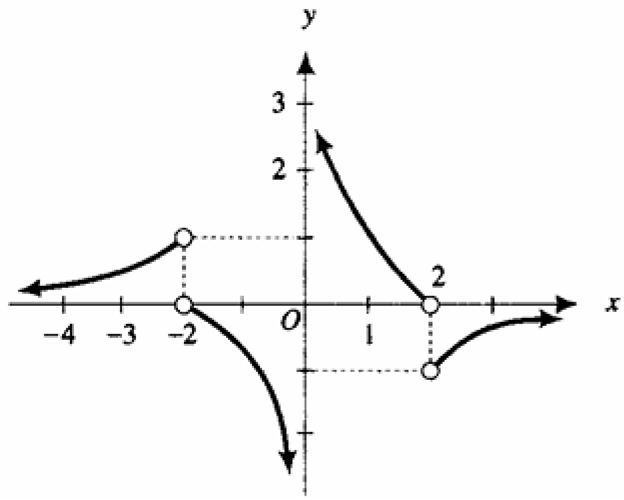
13. Los ceros de f son -3, -1 y 1.



16. Los ceros de f son 1 y 3.

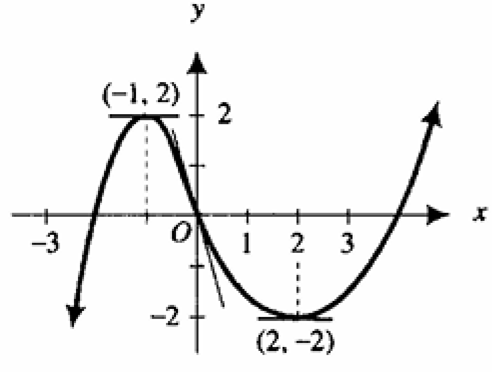


18. Los ceros de f son -3, 0 y 3.

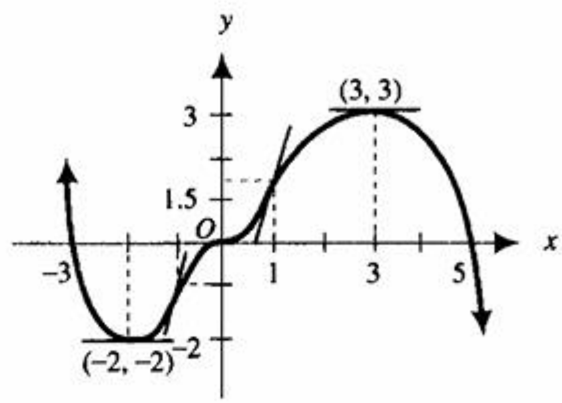


En los ejercicios 19 a 26, se muestran en la figura adjunta la gráfica de una función f y algunos segmentos de las tangentes de inflexión. A partir de la figura determine la siguiente información e incorpórela en una tabla semejante a la tabla 4: (*i*) *los intervalos en los que f es creciente;* (*ii*) *los intervalos en los que f es decreciente;* (*iii*) *los extremos relativos de f;* (*iv*) *los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia arriba;* (*v*) *los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia abajo;* (*vi*) *las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de f. A partir de la información de la tabla, dibuje posibles gráficas de f' y f''.*

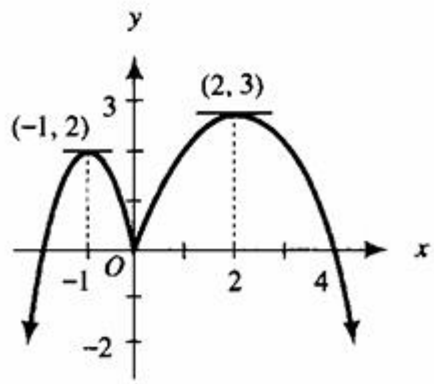
19.



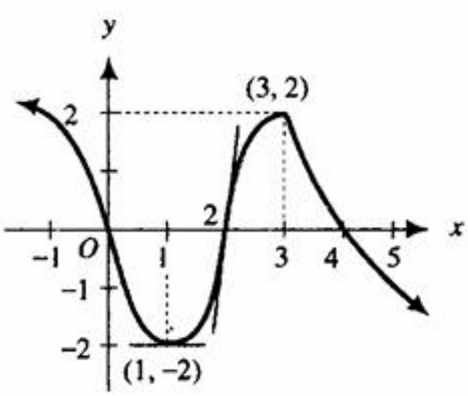
21.



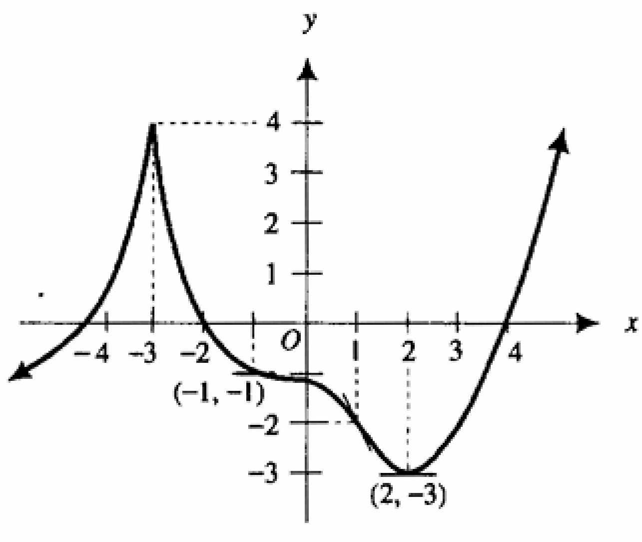
22.



23.

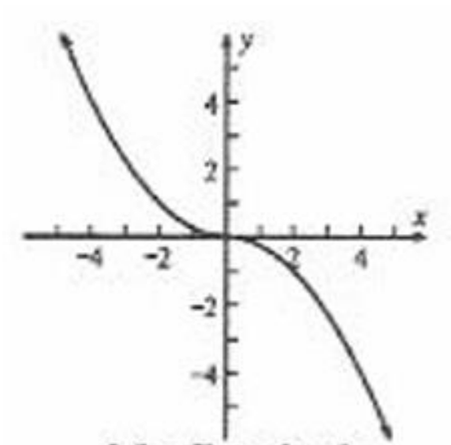


25.



Solucionario

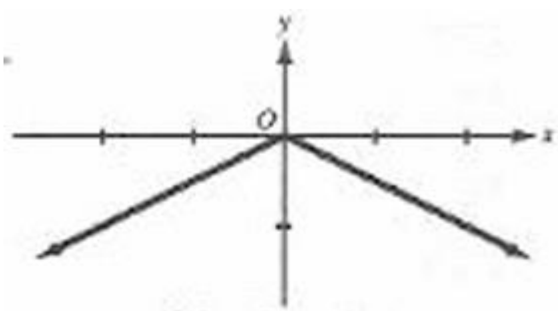
8



f for Exercise 8

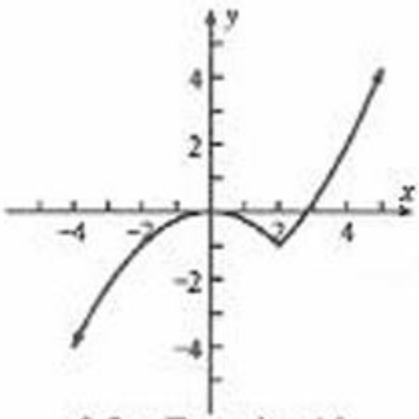
8. Zero of f is 0.

	$f'(x)$	$f''(x)$	f is/has a	graph is/has a
$x < 0$	$-$	$+$	decreasing	concave upward
$x = 0$	0	d.n.e.	stationary	point of inflection
$x > 0$	$-$	$-$	decreasing	concave downward



f' for Exercise 8

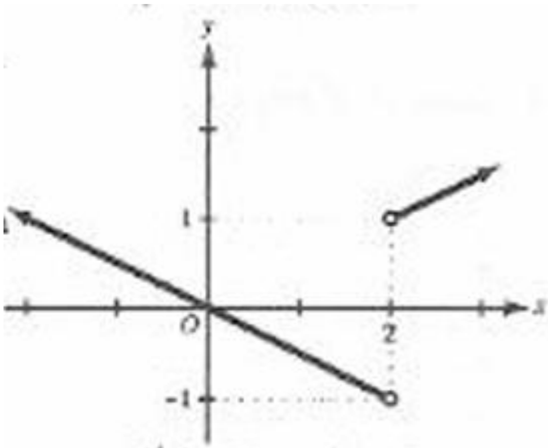
10



f for Exercise 10

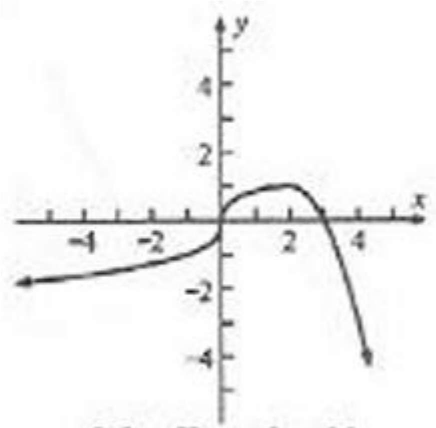
Zeros of f are 0 and 4.

	$f'(x)$	$f''(x)$	f is/has a	graph is/has a
$x < 0$	+	−	increasing	concave downward
$x = 0$	0	−	relative maximum	concave downward
$0 < x < 2$	−	−	decreasing	concave downward
$x = 2$	d.n.e.	d.n.e.	no tangent line	not a point of inflection
$x > 2$	+	+	increasing	concave upward



f' for Exercise 10

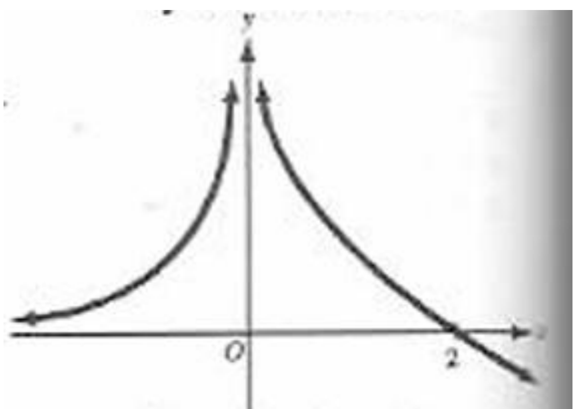
11



f for Exercise 11

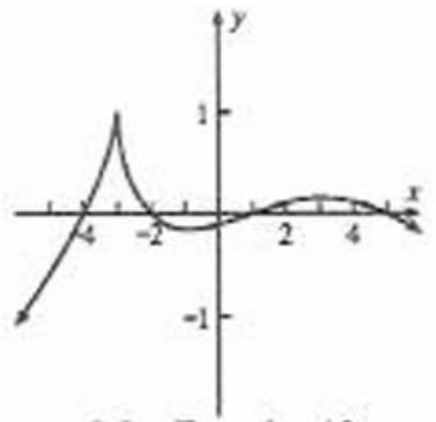
11. Zeros of f are 0 and 3.

	$f'(x)$	$f''(x)$	f is/has a	graph is/has a
$x < 0$	+	+	increasing	concave upward
$x = 0$	d.n.e.	d.n.e.	vertical tangent	point of inflection
$0 < x < 2$	+	−	increasing	concave downward
$x = 2$	0	−	relative maximum	concave downward
$x > 2$	−	−	decreasing	concave downward



f' for Exercise 11

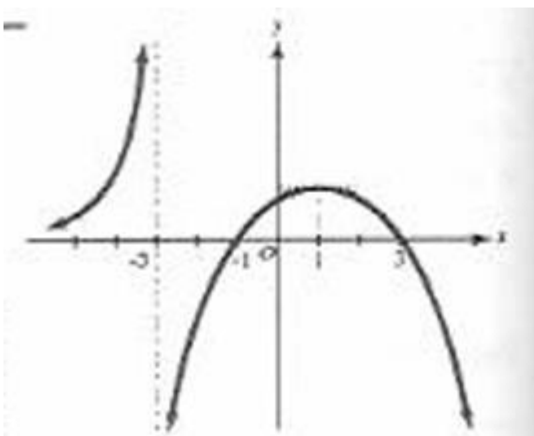
12



f for Exercise 12

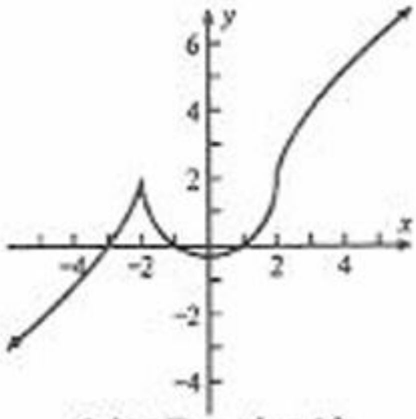
12. Zeros of f are -4, -2, 1 and 5.

	$f'(x)$	$f''(x)$	f is/has a	graph is/has a
$x < -3$	+	+	increasing	concave upward
$x = -3$	d.n.e.	d.n.e	relative maximum	vertical tangent
$-3 < x < -1$	−	+	decreasing	concave upward
$x = -1$	0	+	relative minimum	concave upward
$-1 < x < 1$	+	+	increasing	concave upward
$x = 1$	+	0	increasing	point of inflection
$1 < x < 3$	+	−	increasing	concave downward
$x = 3$	0	−	relative maximum	concave downward
$x > 3$	−	+	decreasing	concave downward



f' for Exercise 12

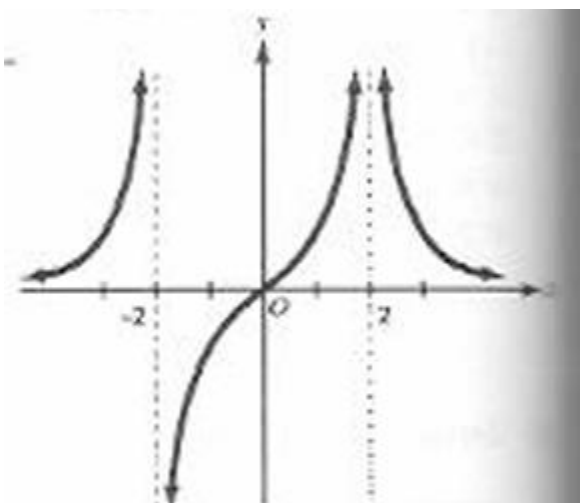
13



f for Exercise 13

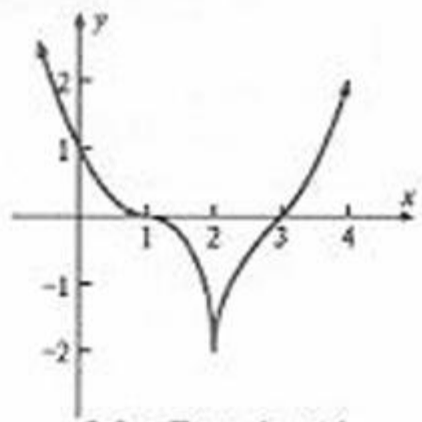
13. Zeros of f are -3, -1, and 1.

	$f'(x)$	$f''(x)$	f is/has a	graph is/has a
$x < -2$	$+$	$+$	increasing	concave upward
$x = -2$	d.n.e.	d.n.e.	relative maximum	vertical tangent
$-2 < x < 0$	$-$	$+$	decreasing	concave upward
$x = 0$	0	$+$	relative minimum	concave upward
$0 < x < 2$	$+$	$+$	increasing	concave upward
$x = 2$	d.n.e.	d.n.e.	vertical tangent	point of inflection
$x > 2$	$+$	$-$	increasing	concave downward



f' for Exercise 13

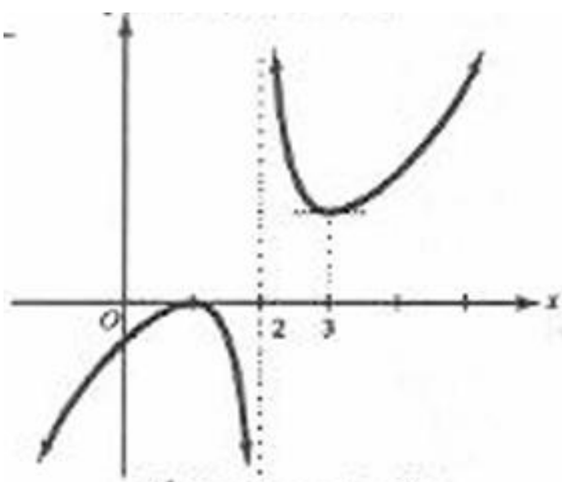
16



f for Exercise 16

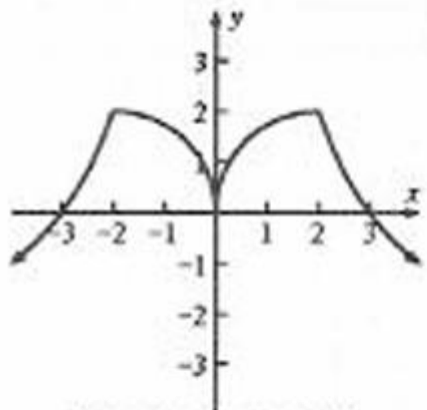
Zeros of f are 1 and 3.

	$f'(x)$	$f''(x)$	f is/has a	graph is/has a
$x < 1$	$-$	$+$	decreasing	concave upward
$x = 1$	0	0	stationary	point of inflection
$1 < x < 2$	$-$	$-$	decreasing	concave downward
$x = 2$	d.n.e.	d.n.e.	relative minimum	vertical tangent
$2 < x < 3$	$+$	$-$	increasing	concave downward
$x = 3$	$+$	0	increasing	point of inflection
$x > 3$	$+$	$+$	increasing	concave upward



f' for Exercise 16

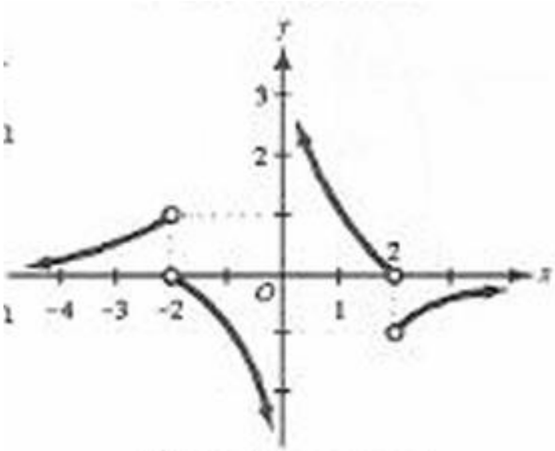
18



f for Exercise 18

Zeros of f are -3, 0 and 3.

	$f'(x)$	$f''(x)$	f is/has a	graph is/has a
$x < -2$	+	+	increasing	concave upward
$x = -2$	d.n.e.	d.n.e.	relative maximum	not a point of inflection
$-2 < x < 0$	−	−	decreasing	concave downward
$x = 0$	d.n.e.	d.n.e.	relative minimum	vertical tangent
$0 < x < 2$	+	−	increasing	concave downward
$x = 2$	d.n.e.	d.n.e.	relative maximum	not a point of inflection
$x > 2$	−	+	decreasing	concave upward

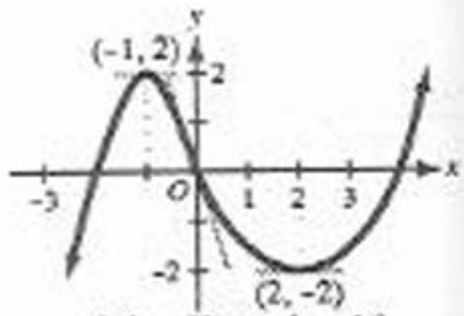


f' for Exercise 18

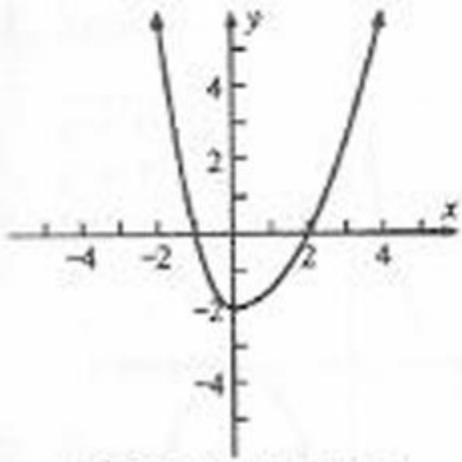
In Exercises 19–26, the graph of f and segments of the inflectional tangents appear in the figure. Make a table as in the previous Exercises and sketch possible graphs of f' and f''.

19.

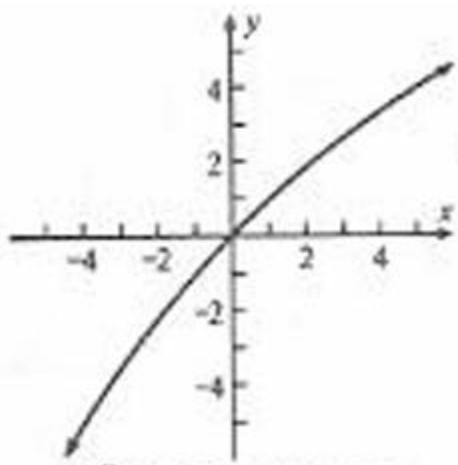
	$f'(x)$	$f''(x)$	f is/has a	graph is/has a
$x < -1$	+	−	increasing	concave downward
$x = -1$	0	−	relative maximum	concave downward
$-1 < x < 0$	−	−	decreasing	concave downward
$x = 0$	−2	0	decreasing	point of inflection
$0 < x < 2$	−	+	decreasing	concave upward
$x = 2$	0	+	relative minimum	concave upward
$x > 2$	+	+	increasing	concave upward



f for Exercise 19



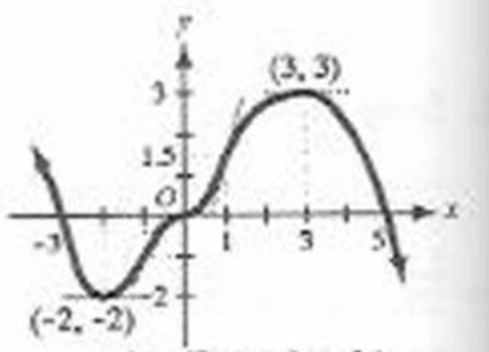
f' for Exercise 19



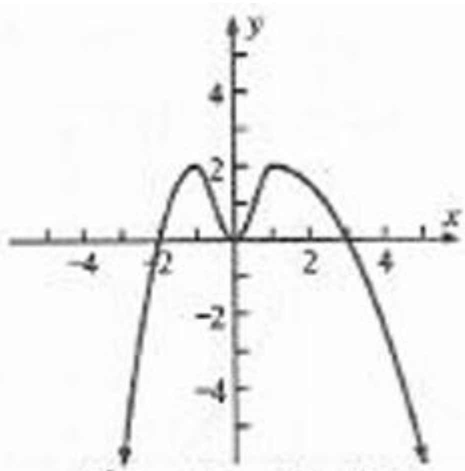
f'' for Exercise 19

21.

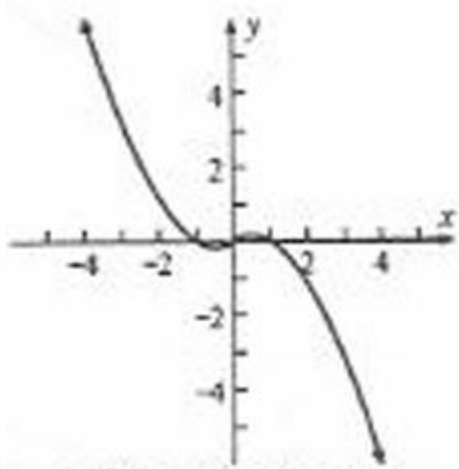
	$f'(x)$	$f''(x)$	f is/has a	graph is/has a
$x < -2$	$-$	$+$	decreasing	concave upward
$x = -2$	0	$+$	relative minimum	concave upward
$-2 < x < -1$	$+$	$+$	increasing	concave upward
$x = -1$	$+2$	0	increasing	point of inflection
$-1 < x < 0$	$+$	$-$	increasing	concave downward
$x = 0$	0	0	stationary	point of inflection
$0 < x < 1$	$+$	$+$	increasing	concave upward
$x = 1$	$+2$	0	increasing	point of inflection
$1 < x < 3$	$+$	$-$	increasing	concave downward
$x = 3$	0	$-$	relative maximum	concave downward
$x > 3$	$-$	$-$	decreasing	concave downward



f for Exercise 21

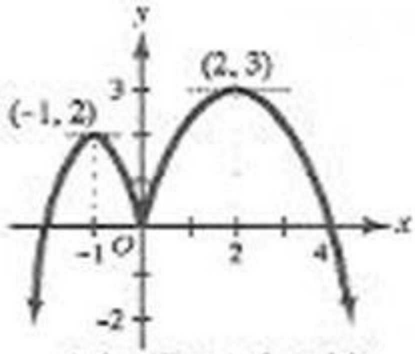


f' for Exercise 21

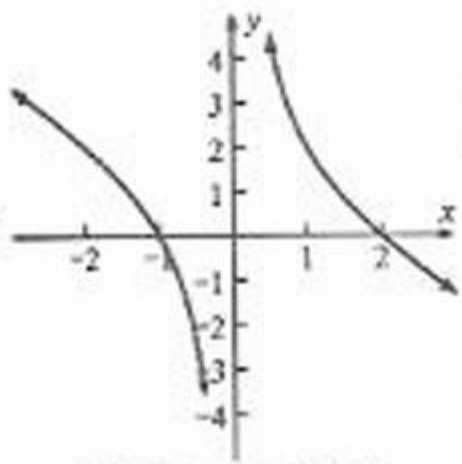


f'' for Exercise 21

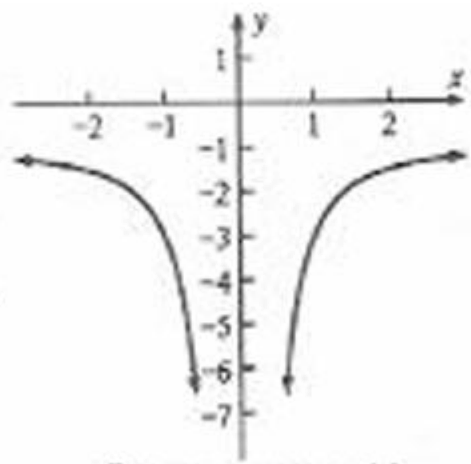
	$f'(x)$	$f''(x)$	f is/has a	graph is/has a
$x < -1$	+	−	increasing	concave downward
$x = -1$	0	−	relative maximum	concave downward
$-1 < x < 0$	−	−	decreasing	concave downward
$x = 0$	d.n.e.	d.n.e.	relative minimum	vertical tangent
$0 < x < 2$	+	−	increasing	concave downward
$x = 2$	0	−	relative maximum	concave downward
$x > 2$	−	−	decreasing	concave downward



f for Exercise 22

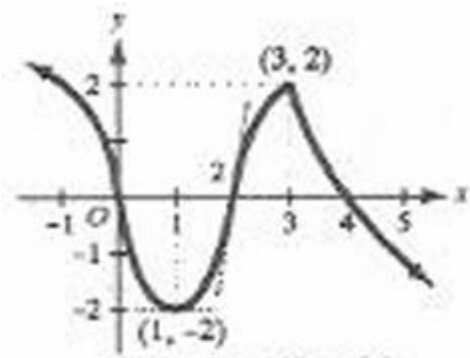


f' for Exercise 22

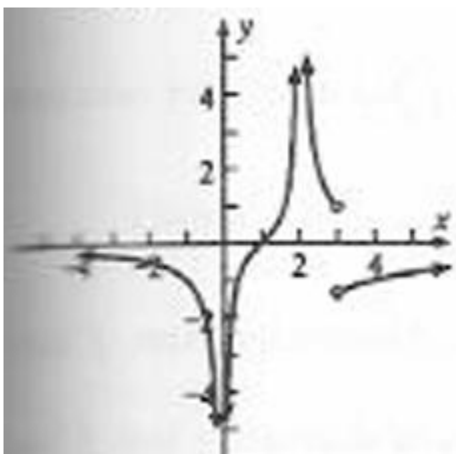


f'' for Exercise 22

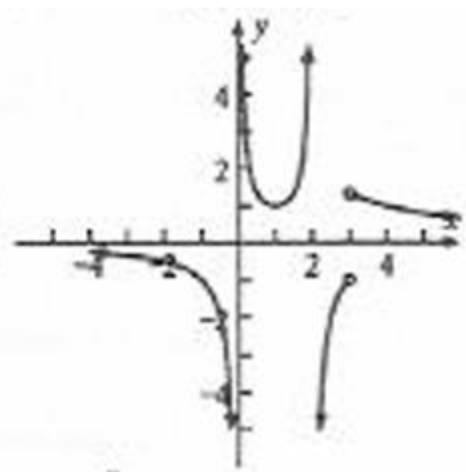
	$f'(x)$	$f''(x)$	f is/has a	graph is/has a
$x < 0$	$-$	$-$	decreasing	concave downward
$x = 0$	d.n.e.	d.n.e	vertical tangent	point of inflection
$0 < x < 1$	$-$	$+$	decreasing	concave upward
$x = 1$	0	$+$	relative minimum	concave upward
$1 < x < 2$	$+$	$+$	increasing	concave upward
$x = 2$	d.n.e.	d.n.e.	vertical tangent	point of inflection
$2 < x < 3$	$+$	$-$	increasing	concave downward
$x = 3$	d.n.e.	d.n.e.	relative maximum	not a point of inflection
$x > 3$	$-$	$+$	decreasing	concave upward



f for Exercise 23

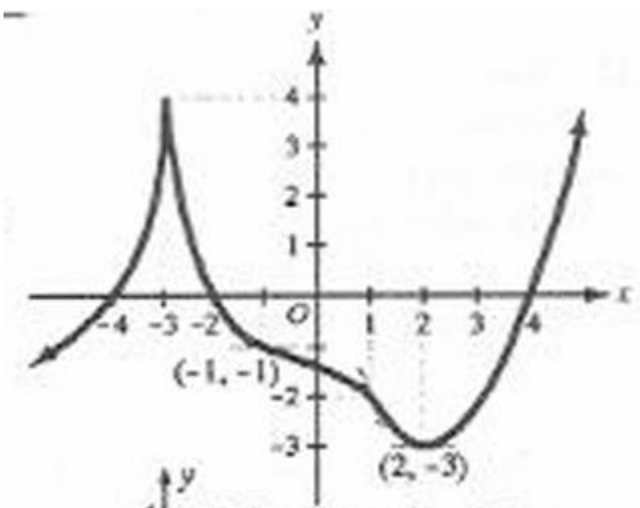


f' for Exercise 23

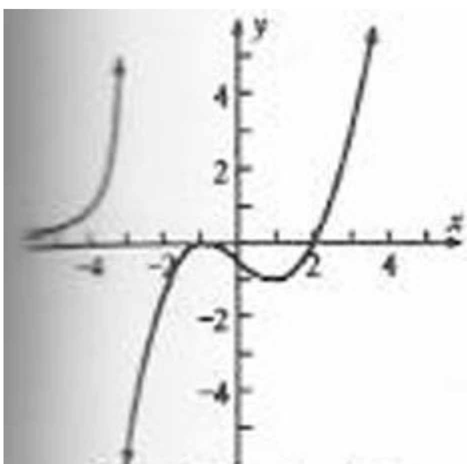


f'' for Exercise 23

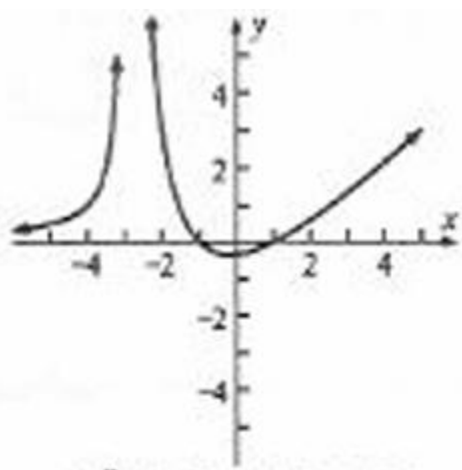
	$f'(x)$	$f''(x)$	f is/has a	graph is/has a
$x < -3$	$+$	$+$	increasing	concave upward
$x = -3$	d.n.e.	d.n.e.	relative maximum	vertical tangent
$-3 < x < -1$	$-$	$+$	decreasing	concave upward
$x = -1$	0	0	stationary	point of inflection
$-1 < x < 1$	$-$	$-$	decreasing	concave downward
$x = 1$	-1	0	decreasing	point of inflection
$1 < x < 2$	$-$	$+$	decreasing	concave upward
$x = 2$	0	$+$	relative minimum	concave upward
$x > 2$	$+$	$+$	increasing	concave upward



f for Exercise 25



f' for Exercise 25



f'' for Exercise 25

APLICACIONES ADICIONALES SOBRE EXTREMOS ABSOLUTOS (OPTIMIZACIÓN)

A fin de aplicar el teorema del valor extremo para determinar los extremos absolutos de una función, la función debe ser continua en un intervalo cerrado. En la sección 3.2 las aplicaciones trataron sobre tales funciones. Ahora se considerarán aplicaciones que involucran extremos absolutos para las cuales no puede emplearse el teorema del valor extremo. Sin embargo, primero se presentará un teorema, el cual en ocasiones es útil para determinar si un extremo relativo es un extremo absoluto.

Para ilustrar el teorema, refiérase a las funciones cuyas gráficas se presentan en las figuras 1 y 2. Cada una de estas funciones es continua en el intervalo I y tiene sólo un extremo relativo, $f(c)$, en I. En los dos casos el teorema siguiente garantiza que el extremo relativo es un extremo absoluto.

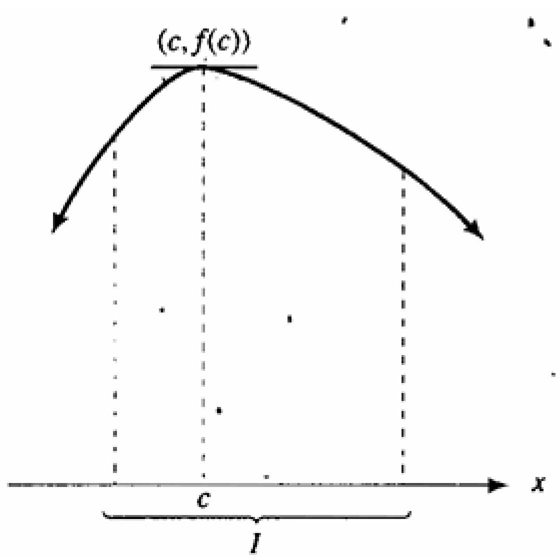


FIGURA 1

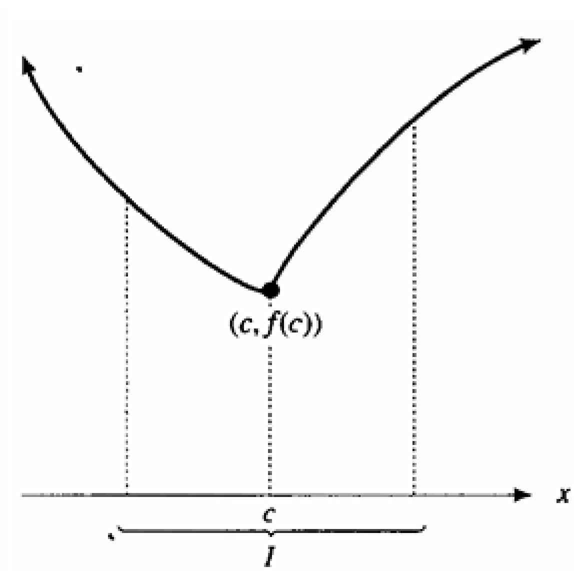


FIGURA 2

3.9.1 Teorema

Suponga que la función f es continua en el intervalo I que contiene al número c. Si $f(c)$ es un extremo relativo de f en I y c es el único número en I para el cual f tiene un extremo relativo, entonces $f(c)$ es un extremo absoluto de f en I.

EJEMPLO 1 Si un envase de hojalata cerrado de 60 $pulg^3$ de volumen tiene forma de cilindro circular recto, determine analíticamente el radio de la base del envase si se emplea la mínima cantidad de hojalata en su elaboración.

Solución La figura 3 muestra el envase cilíndrico donde el radio de la base mide r pulgadas. Se determinará el radio de la base para el cual el área de la superficie total del envase es un mínimo absoluto. En el ejemplo 5 de la sección 1.3, se mostró que si $S(r)$ pulgadas cuadradas es el área de la superficie total, entonces

$$S(r) = \frac{120}{r} + 2\pi r^2$$

El dominio de S es $(0, +\infty)$ y S es continua en su dominio.

Para terminar cualquier extremo relativo de S se calculan las derivadas primera y segunda de S:

$$S'(r) = -\frac{120}{r^2} + 4\pi r \qquad S''(r) = \frac{240}{r^3} + 4\pi$$

Observe que $S'(r)$ no existe cuando $r = 0$ y que 0 no pertenece al dominio de S. Por tanto, los únicos números críticos son aquellos que se obtienen al considerar $S'(r) = 0$, de donde se tiene

$$4\pi r^3 = 120$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{30}{\pi}}$$

En consecuencia, $\sqrt[3]{30/\pi}$ es un número crítico de S. Se aplica el criterio de la segunda derivada, y los resultados se resumen en la tabla 1.

Tabla 1

	$S'(r)$	$S''(r)$	*Conclusión*
$r = \sqrt[3]{\frac{30}{\pi}}$	0	+	S tiene un valor mínimo relativo

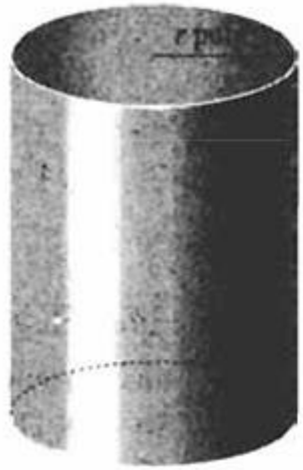


FIGURA 3

Debido a que S es continua en su dominio y el único extremo relativo de S en su dominio se tiene en $r = \sqrt[3]{30/\pi}$, se concluye, por el teorema 3.9.1, que este valor mínimo relativo de S es su valor mínimo absoluto.

Al aproximar a centésimos se tiene $\sqrt[3]{30/\pi} \approx 2.12$, lo cual es acorde con la respuesta del ejemplo 5 de la sección 1.3.

Conclusión: La mínima cantidad de hojalata se empleará en la elaboración del envase cuando el radio de la base sea $\sqrt[3]{30/\pi}$ pulg $\approx$ 2.12 pulg. ◀

▶ ***EJEMPLO 2*** Una caja cerrada con base cuadrada tiene un volumen de 2 000 pulg^3. El material de la tapa y de la base cuesta 3 centavos la pulgada cuadrada mientras que el material para los lados cuesta 1.5 centavos la pulgada cuadrada. Estime en la graficadora las dimensiones de la caja de modo que el costo total del material sea mínimo. Confirme la estimación analíticamente.

Solución Sean x pulgadas la longitud de un lado de la base cuadrada y $C(x)$ dólares el costo total del material. El área de la base es x^2 pulgadas cuadradas. Sea y pulgadas la profundidad de la caja. Vea la figura 4. Puesto que el volumen de la caja es el producto del área de la base y la profundidad, se tiene

$$x^2 y = 2\,000$$

$$y = \frac{2\,000}{x^2} \tag{1}$$

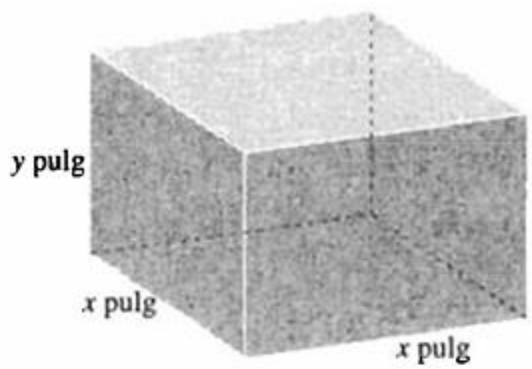


FIGURA 4

El número total de pulgadas cuadradas de las áreas de la tapa y de la base es $2x^2$, y el de los lados es $4xy$. Por tanto, el número de centavos del costo total del material es

$$3(2x^2) + \tfrac{3}{2}(4xy)$$

Al sustituir y de (1), se tiene

$$C(x) = 6x^2 + 6x\left(\frac{2\,000}{x^2}\right)$$

$$C(x) = 6x^2 + \frac{12\,000}{x}$$

El dominio de C es $(0, +\infty)$. La figura 5 muestra la gráfica de C trazada en el rectángulo de inspección de $[0, 20]$ por $[1\,000, 5\,000]$. Se estima que el punto más bajo de la gráfica se obtiene cuando $x = 10$. De (1), si $x = 10$, $y = 20$. Por tanto, se estima que el lado de la base del cuadrado debe medir 10 pulg y la profundidad debe ser de 20 pulg para que el costo del material se mínimo.

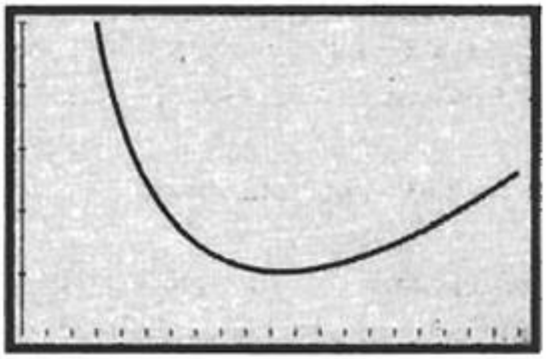
Para confirmar la estimación analíticamente, se calcula $C'(x)$ y $C''(x)$:

$$C'(x) = 12x - \frac{12\,000}{x^2} \qquad C''(x) = 12 + \frac{24\,000}{x^3}$$

Observe que $C'(x)$ no existe cuando $x = 0$ y que 0 no pertenece al dominio de C. Por tanto, los únicos números críticos son aquellos que se obtienen al considerar $C'(x) = 0$, de donde se tiene

$$12x - \frac{12\,000}{x^3} = 0$$

$$x^3 = 1000$$



[0, 20] por [1 000, 5 000]

$$C(x) = 6x^2 + \frac{12\,000}{x}$$

FIGURA 5

La única solución real de esta ecuación es 10. De este modo, el único número crítico es 10. Para determinar si $C(10)$ es un valor mínimo relativo para C, se aplica el criterio de la segunda derivada, y los resultados se resumen en la tabla 2.

Tabla 2

	$C'(x)$	$C''(x)$	*Conclusión*
$x = 10$	0	+	C tiene un valor mínimo relativo

Como C es continua en su dominio y el único extremo relativo de C se tiene en $x = 10$, se concluye, por el teorema 3.9.1, que el valor mínimo relativo de C es su valor mínimo absoluto. Por tanto, se ha confirmado la estimación.

Conclusión: El costo del material será mínimo cuando el lado de la base cuadrada mida 10 pulg y la profundidad mida 20 pulg. ◀

EJEMPLO 3 Si un envase de volumen fijo tiene la forma de un cilindro circular recto, determine la razón de la altura al radio de la base si se emplea la cantidad mínima de material en su elaboración.

Solución Se desea determinar una relación entre la altura y el radio de la base de un cilindro circular recto, de modo que el área de la superficie sea un mínimo absoluto para un volumen fijo. Por tanto, se considerará el volumen del cilindro como una constante.

Sean V unidades cúbicas el volumen del cilindro (una constante).

A continuación se definen las variables.

Sean r unidades la longitud del radio del cilindro; $r > 0$. Sean h unidades la altura del cilindro; $h > 0$. Sean S unidades cuadradas el área de la superficie total del cilindro (refiérase a la figura 6).

Así, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh \tag{2}$$
$$V = \pi r^2 h \tag{3}$$

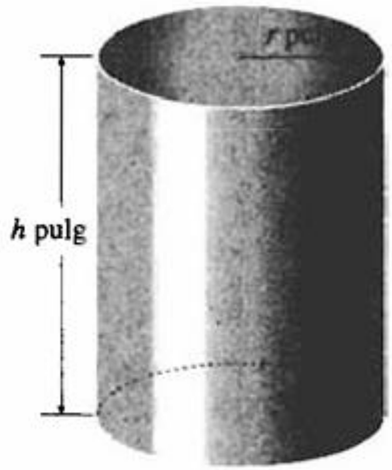


FIGURA 6

Puesto que V es una constante, se puede resolver (3) para r o para h en términos de la otra y sustituirla en (2), lo que hace de S una función de una variable. El método alternativo consiste en considerar a S como una función de las dos variables r y h; sin embargo, no son independientes una de la otra. Esto es, si se elige r como variable independiente, entonces S depende de r; también, h depende de r.

Al diferenciar S y V con respecto a r, teniendo en mente que h es una función de r, se tiene

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi r \frac{dh}{dr} \qquad \textbf{(4)}$$

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi rh + \pi r^2 \frac{dh}{dr}$$

Como V es un constante, entonces $\frac{dV}{dr} = 0$; por tanto, de la ecuación anterior,

$$2\pi rh + \pi r^2 \frac{dh}{dr} = 0$$

con $r \neq 0$. Si se divide entre r y se despeja $\frac{dh}{dr}$, se obtiene

$$\frac{dh}{dr} = -\frac{2h}{r} \qquad \textbf{(5)}$$

Al sustituir de (5) en (4) se tiene

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi\left[2r + h + r\left(-\frac{2h}{r}\right)\right]$$

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi(2r - h) \qquad \textbf{(6)}$$

Con objeto de determinar cuándo S tiene un valor mínimo relativo, se considera $\frac{dS}{dr} = 0$, obteniéndose $2r - h = 0$, de donde,

$$r = \tfrac{1}{2}h$$

A fin de determinar si esta relación entre r y h hace de S un mínimo relativo se aplica el criterio de la segunda derivada. De (6) se obtiene

$$\frac{d^2S}{dr^2} = 2\pi\left(2 - \frac{dh}{dr}\right)$$

Al sustituir de (5) en esta ecuación se tiene

$$\frac{d^2S}{dr^2} = 2\pi\left[2 - \left(\frac{-2h}{r}\right)\right]$$

$$= 2\pi\left(2 + \frac{2h}{r}\right)$$

Los resultados del criterio de la segunda derivada se resumen en la tabla 3.

Tabla 3

	$\frac{dS}{dr}$	$\frac{d^2s}{dr^2}$	*Conclusión*
$r = \frac{1}{2}h$	0	+	S tiene un valor mínimo relativo

De (2) y (3), S es una función continua de r en $(0, +\infty)$. Como el único extremo relativo de S en $(0, +\infty)$ se tiene en $r = \frac{1}{2}h$, se concluye, por el teorema 3.9.1, que S tiene un valor mínimo absoluto cuando $h/r = 2$.

Conclusión: El área de la superficie total del envase será mínimo, para un volumen específico, cuando la razón de la altura al radio de la base sea 2. ◀

▶ **EJEMPLO 4** Se inscribe un cilindro circular recto en una esfera de radio dado. Determine la razón de la altura al radio de la base del cilindro de mayor superficie lateral.

Solución Refiérase a la figura 7, donde la medida del radio de la esfera es constante e igual a a.

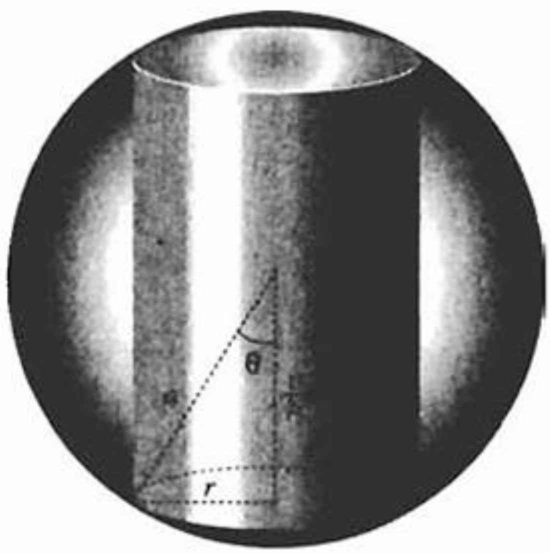


FIGURA 7

Sean θ radianes la medida del ángulo central subtendido por el radio del cilindro, r unidades la longitud del radio del cilindro, h unidades la altura del cilindro y S unidades cuadradas el área de la superficie lateral del cilindro. De la figura 7,

$$r = a \operatorname{sen} \theta \quad \text{y} \quad h = 2a \cos \theta$$

Como $S = 2\pi r h$,

$$\begin{aligned} S &= 2\pi(a \operatorname{sen} \theta)(2a \cos \theta) \\ &= 2\pi a^2(2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta) \\ &= 2\pi a^2 \operatorname{sen} 2\theta \end{aligned}$$

Así, S es una función de θ y su dominio es $(0, \frac{1}{2}\pi)$.

Al obtener las derivadas primera y segunda de S, se tiene

$$\frac{dS}{d\theta} = 4\pi a^2 \cos 2\theta \quad \text{y} \quad \frac{d^2S}{d\theta^2} = -8\pi a^2 \operatorname{sen} 2\theta$$

Considere $\frac{dS}{d\theta} = 0$, entonces

$$\cos 2\theta = 0$$

Como $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, entonces

$$\theta = \frac{1}{4}\pi$$

Se aplica el criterio de la segunda derivada y los resultados se resumen en la tabla 4.

Tabla 4

	$\frac{ds}{d\theta}$	$\frac{d^2S}{d\theta^2}$	*Conclusión*
$\theta = \frac{1}{4}\pi$	0	–	S tiene un valor máximo relativo

Como S es continua y tiene un único extremo relativo en su dominio, se concluye que el valor máximo relativo es un valor máximo absoluto.

Cuando $\theta = \frac{1}{4}\pi$,

$$r = a \operatorname{sen} \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,a \qquad h = 2a \cos \tfrac{1}{4}\pi = \sqrt{2}\,a$$

Por tanto, $h/r = 2$.

<u>**Conclusión:**</u> Para el cilindro que tiene la superficie lateral de mayor área, la razón de la altura al radio es 2. ◀

Problemas

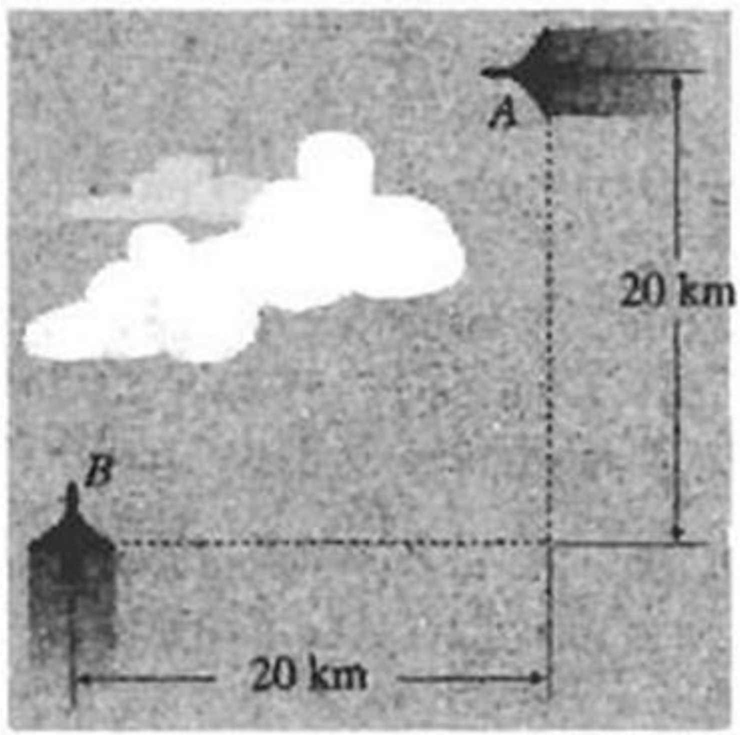
5. Se va a cercar un terreno rectangular de 2 700 m^2 de área, y se utilizará una valla adicional para dividir el terreno a la mitad. El costo de la cerca empleado para dividir el terreno a la mitad es de $24 por metro colocado, y el costo de la cerca para los lados es de $36 por metro colocado. (**a**) Utilice la graficadora para estimar las dimensiones del terreno de modo que el costo total del material para la cerca sea mínimo. (**b**) Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente.

6. Un tanque rectangular abierto, cuyo volumen es de 125 m^3, tiene base cuadrada. El costo del material para la base es de $24 por metro cuadrado y el del material para los lados es de $12. (**a**) Utilice la graficadora para estimar las dimensiones del tanque de modo que el costo del material sea mínimo. (**b**) Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente.

9. Si se excluyen los salarios, el número de dólares del costo por kilómetro de la operación de un camión es $8 + \frac{1}{300}x$, donde x kilómetros por hora es la velocidad promedio del camión. (**a**) Si los salarios combinados del conductor y del ayudante son $27 por hora, estime en la calculadora, con aproximación de kilómetros por hora, cuál debe ser la velocidad promedio del camión para que el costo por kilómetro sea mínimo. (**b**) Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente.

10. El número de dólares del costo de combustible por hora para un barco carguero es de $0.02v^3$, donde v nudos (millas náuticas por hora) es la velocidad promedio del barco. (**a**) Si hay costos adicionales de $400 por hora, estime en la graficadora, con aproximación de nudos, a qué velocidad promedio debe navegar el barco para que el costo por milla náutica sea mínimo. (**b**) Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente.

12. Dos aviones A y B vuelan horizontalmente a la misma altura de modo que la posición de B está al suroeste de A, 20 km al oeste y 20 km al sur de A. Suponga que el avión A vuela hacia el oeste a 16 km/min y que el avión B vuela hacia el norte a 21.3 km/min. **(a)** Determine en cuántos segundos los aviones estarán lo más cerca posible y cuál será la distancia más corta. **(b)** Apoye las respuestas del inciso (a) gráficamente.



14. Un generador de corriente directa tiene una fuerza electromotriz de E volts y una resistencia interna de r ohms, donde E y r son constantes. Si R ohms es la resistencia externa, entonces la resistencia total es $(r + R)$ ohms, y si P watts es la potencia, entonces

$$P = \frac{E^2 R}{(r + R)^2}$$

Demuestre que el consumo máximo de potencia ocurre cuando la resistencia externa es igual a la resistencia interna.

15. En una comunidad particular, cierta epidemia se propaga de modo que x meses después del inicio de la epidemia, P porcentaje de la población está infectada, donde

$$P = \frac{30x^2}{(1 + x^2)^2}$$

¿En cuántos meses se infectará el número máximo de personas de la comunidad y qué porcentaje de la población será éste?

16. Un cartel que contiene 32 pulg^2 de región impresa tiene un margen de 2 pulg en sus partes superior e inferior, mientras que en los lados los márgenes son de $\frac{4}{3}$ pulg. Determine las dimensiones del menor trozo de cartón que pueda emplearse para realizar el cartel.

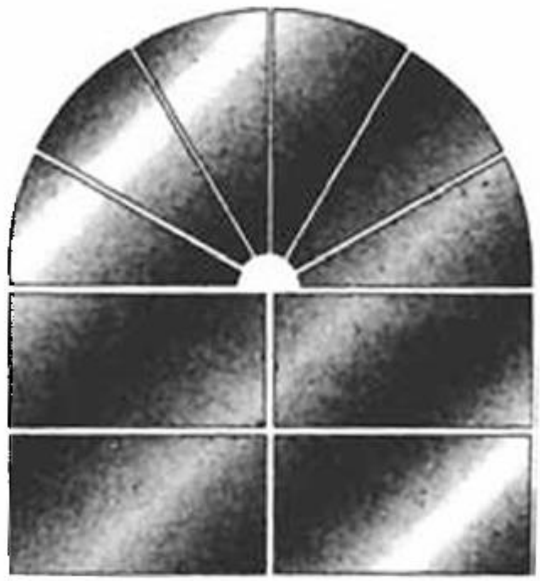
17. En condiciones de competencia perfecta, una compañía puede vender los artículos que produce a $200 por unidad. Si $C(x)$ dólares es el costo total de la producción diaria cuando se producen x artículos y $C(x) = 2x^2 + 40x + 1400$, determine el número de unidades que deben producirce diariamente a fin de que la compañía obtenga la máxima ganancia total diaria. *Sugerencia:* la ganancia total es igual al ingreso total menos el costo total.

19. El término *en condiciones de monopolio*, significa que existe un único productor de cierto artículo, para el cual el precio y, en consecuencia, la demanda pueden ser controlados regulando la cantidad de artículos producidos. Suponga que en condiciones de monopolio, x unidades de un artículo son demandadas diariamente cuando el precio por unidad es de p dólares y $x = 140 - p$. Si el número de dólares del costo total por producir x unidades está dado por $C(x) = x^2 + 20x + 300$, determine la máxima ganancia total diaria.

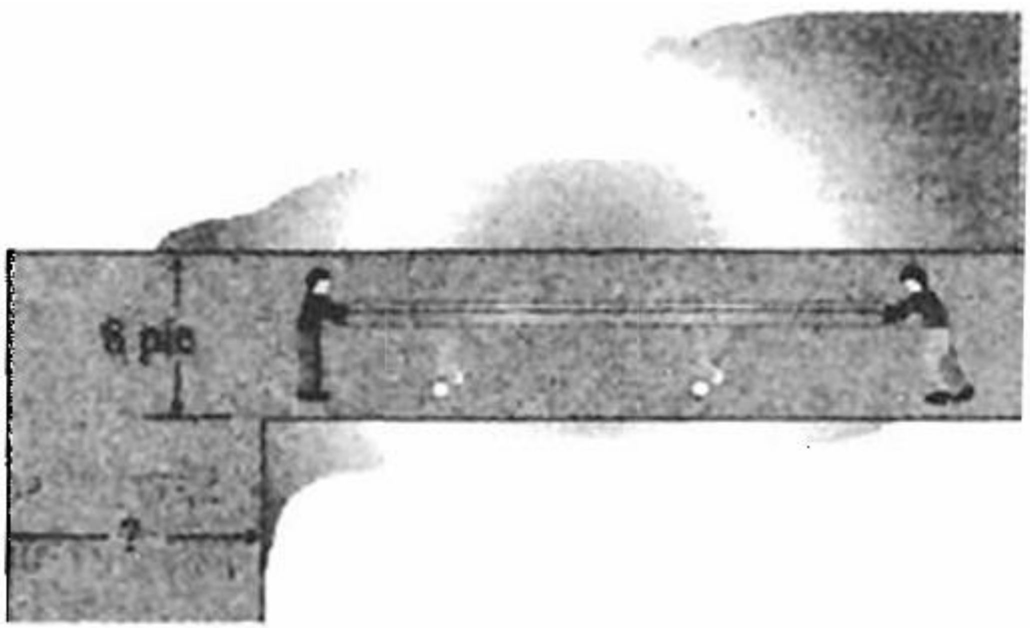
20. Determine la distancia mínima desde el punto $P(2, 0)$ a un punto de la curva $y^2 - x^2 = 1$, y encuentre el punto de la curva más cercano a P.

21. Obtenga la distancia mínima desde el origen a la recta $3x + y = 6$, y encuentre el punto P de la recta más cercano al origen. Después demuestre que el origen está en la recta perpendicular a la recta dada que pasa por P.

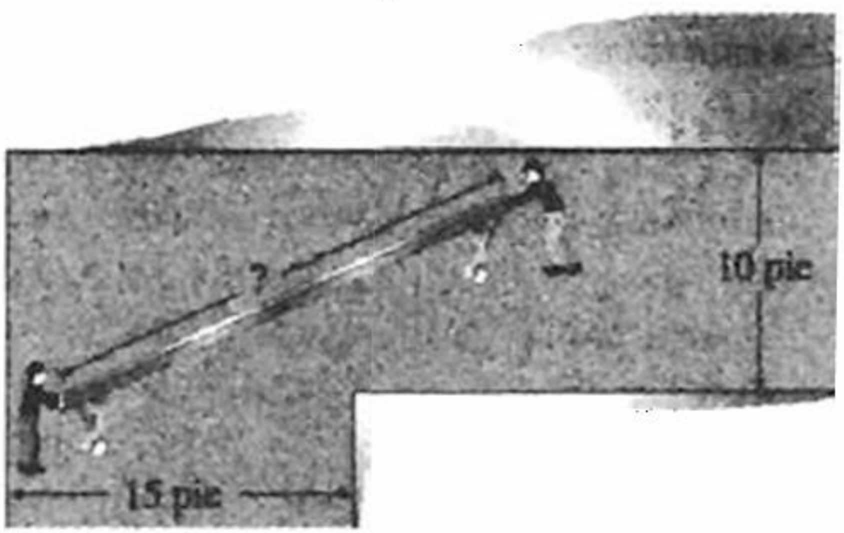
23. Una ventana tipo *Norman* consiste de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de una ventana Norman es de 32 pie, determine cuánto debe medir el radio del semicírculo y la altura del rectángulo de modo que la ventana admita la mayor cantidad de luz.



25. Una viga de acero de 27 pie de longitud se transporta por un pasillo de 8 pie de ancho hasta un corredor perpendicular al pasillo. ¿Cual debe ser el ancho del corredor para que la viga pueda doblar la esquina? No considere la anchura horizontal de la viga.



26. Si dos pasillos perpendiculares entre sí miden 10 pie y 15 pie, respectivamente, ¿cuál es la longitud de la viga de acero más larga que pueda transportarse horizontalmente de modo que pueda doblar la esquina? No considere la anchura horizontal de la viga.



27. Un embudo de volumen específico tiene la forma de un cono circular recto. Determine la razón de la altura al radio de la base de modo que se emplee la mínima cantidad de material en su construcción.

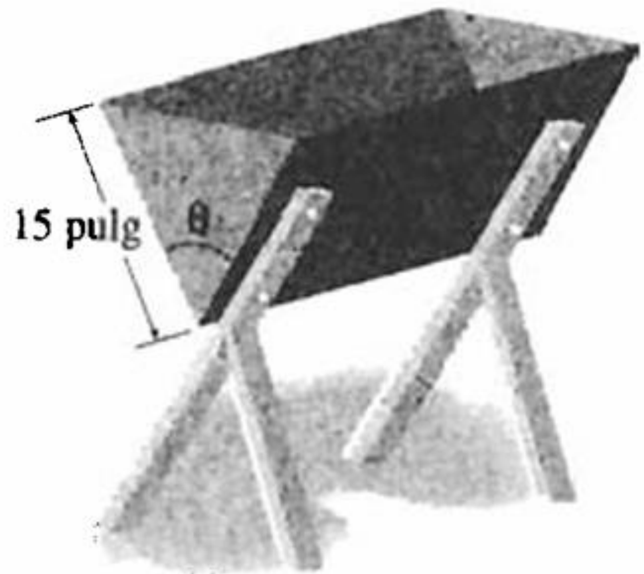
28. Un cono circular recto se inscribe en una esfera de radio dado. Calcule la razón de la altura al radio de la base del cono de volumen máximo que pueda inscribirse en la esfera.

30. Demuestre por el método de esta sección que la distancia mínima desde el punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta l que tiene la ecuación $Ax + By + C = 0$ es

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Sugerencia: si s es el número de unidades desde P_1 a un punto $P(x, y)$ de l, entonces s será un mínimo absoluto cuando s^2 sea un mínimo absoluto.

31. La sección transversal de un bebedero tiene la forma de un triángulo isósceles invertido. Si las longitudes de los lados iguales son 15 pulg, determine el tamaño del ángulo formado por estos lados que proporcione al bebedero su máxima capacidad.



Solucionario

5. x meters is the length of the field; the width is $\frac{2700}{x}$ m. $C(x)$ dollars is the cost.

$C(x) = 2x(36) + 2\left(\frac{2700}{x}\right)(36) + x(24) = 96x + \frac{194400}{x}$, $x > 0$. $C'(x) = 96 - 194400x^{-2} = 96x^{-2}(x^2 - 2025)$

Because $C'(x) < 0$ if $x < 45$ and $C'(x) > 0$ if $x > 45$, then C has an absolute minimum value when $x = 45$.

- The dimensions of the field are 45 m by $\frac{2700}{45} = 60$ m.

6. x meters is the width of the base and $\frac{125}{x^2}$ m is the height. $C(x)$ dollars is the cost.

$C(x) = 24x^2 + 4(12)x \cdot \frac{125}{x^2} = 24x^2 + \frac{6000}{x}$, $x > 0$. $C'(x) = 48x - 6000x^{-2} = 48x^{-2}(x^3 - 125)$

Because $C'(x) < 0$ if $x < 5$ and $C'(x) > 0$ if $x > 5$, then C has an absolute minimum value when $x = 5$.

- The dimensions of the box are 5 m square by $\frac{125}{25} = 5$ m high.

- The dimensions of the box are $4\sqrt[3]{2}$ m ≈ ...

9. If x km/hr is the speed of the truck, the time to drive 1 km is $\frac{1}{x}$ hr. If $C(x)$ dollars is the total operating cost per kilometer, then $C(x) = 8 + \frac{1}{300}x + 27 \cdot \frac{1}{x}$, $x > 0$. $C'(x) = \frac{1}{300} - \frac{27}{x^2} = \frac{1}{300x^2}(x^2 - 8100)$. Because $C'(x) < 0$ if $x < 90$ and $C'(x) > 0$ if $x > 90$, then C has an absolute minimum value when $x = 90$.

- The operating cost per km has an absolute minimum when the speed is 90 km/hr.

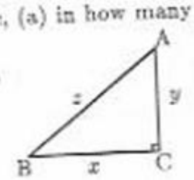
10. v knots is the speed of the ship and the time to sail 1 mi is $\frac{1}{v}$ hr. If $C(v)$ dollars is the total operating cost per mile, then $C(v) = .02v^3 + 400v^{-1}$. $C'(v) = .06v^2 - 400v^{-2} = .06v^{-2}(v^4 - \frac{20000}{3})$. Because $C'(v) < 0$ if $v < \sqrt[4]{20000/3} \approx 9.04 = v_1$ and $C'(v) > 0$ if $v > v_1$, then C has an absolute minimum value when $v = v_1$.

- The operating cost per mile has an absolute minimum when the speed is about 9.04 knots.

... the truck has traveled $40t$ ft, the car has traveled $30t$ ft

- The truck and the car are closest 1.44 sec after ...

12. Two airplanes A and B are flying horizontally at the same altitude. The position of plane B is southwest of plane A and 20 kilometers to the west and 20 kilometers to the south of A. If plane A is flying due west at 16 kilometers per minute and plane B is flying due north at $\frac{64}{3}$ kilometers per minute, (a) in how many seconds will they be closest, and (b) what will be their closest distance?



▸ Refer to the figure. Point C is due west of plane A and due north of plane B. Thus, at the start each plane is flying toward point C. t minutes after they start, let

x km be the directed distance from point C east to plane A

y km be the directed distance from point C south to plane B

z km be the distance between plane A and plane B

Because plane A is 20 km east of C when $t = 0$ and flying west at 16 km/min,

$$x = 20 - 16t \quad (1)$$

Because plane B is 20 km south of C when $t = 0$ and flying north at $\frac{64}{3}$ km/min,

$$y = 20 - \frac{64}{3}t \quad (2)$$

Because triangle ABC is a right triangle

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad (3)$$

Now $s = z^2$ is minimized when z is minimized. Substituting for z^2, x, and y in Eq. (3), we get

$$s(t) = (20 - 16t)^2 + (20 - \tfrac{64}{3}t)^2$$

Differentiating with respect to t, we obtain

$$s'(t) = 2(20 - 16t)(-16) + 2(20 - \tfrac{64}{3}t)(-\tfrac{64}{3}) = \tfrac{640}{9}(20t - 21)$$

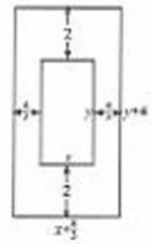
Because $s'(t) < 0$ if $t < \frac{21}{20}$ and $s'(t) > 0$ if $t > \frac{21}{20}$, then s and z have an absolute minimum value when $t = \frac{21}{20}$.

- (a) The airplanes are closest after $\frac{21}{20}$ min. Substituting $t = \frac{21}{20}$ into Equations (1) and (2), we obtain $x = 3.2$ and $y = -2.4$. Thus, plane A is 3.2 km east of point C and plane B is 2.4 km north of C when they are closest. Substituting for x and y into Eq. (3), we obtain $z^2 = 16$, $z = 4$, and so (b) the closest distance is 4 km.

14. When r ohms and R ohms are the internal and external resistance, P watts is the power where $P(R) = E^2R(r+R)^{-2}$. $P'(R) = E^2[(r+r)^{-2} - 2R(r+R)^{-3}] = E^2(r+R)^{-3}[(r+R) - 2R] = E^2(r+R)^{-3}(r-R)$
Because $P'(R) > 0$ if $0 \le R < r$ and $P'(t) < 0$ if $R > r$, P has an absolute maximum value when $R = r$.

15. x months after the start of an epidemic, P percent of the population is infected, where
$P(x) = \dfrac{30x^2}{(1+x^2)^2}$, $x \in [0,\infty)$; $P'(x) = \dfrac{60x(1+x^2)^2 - 30x^2 \cdot 2(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4} = \dfrac{60x(1-x^2)}{(1+x^2)^3}$
Because $P'(x) > 0$ if $0 \le x \le 1$ and $P'(x) < 0$ if $x > 1$, then P has an absolute maximum value when $x = 1$.
▪ In 1 month the most people will be infected, and 7.5% of the population will be infected.

16. A cardboard poster containing 32 in^2 of printed region is to have a margin of 2 in. at the top and bottom and $\frac{4}{3}$ in. at the sides. Find the dimensions of the smallest piece of cardboard that can be used to make the poster.
▹ Refer to the figure. We let the printed area have width x in. and height y in. Because the margin is $\frac{4}{3}$ in. at the sides, the cardboard has width $(x + \frac{8}{3})$ in. Because the margin is 2 in. at the top and bottom, the height of the cardboard is $(y+4)$ in. Because the area of the printed region is 32 in.^{2}, then



$$xy = 32; \qquad y = \frac{32}{x} \qquad (1)$$

If A in.^{2} is the area of the cardboard, then

$$A(x) = \left(x + \frac{8}{3}\right)(y+4) = \left(x + \frac{8}{3}\right)\left(\frac{32}{x} + 4\right) = 32 + \frac{256}{3x} + 4x + \frac{32}{3}$$

$A(x)$ is defined for $x > 0$. Differentiating, we obtain

$$A'(x) = -\frac{256}{3x^2} + 4$$

If $A'(x) = 0$ then

$$x^2 = \frac{64}{3}; \qquad x = \frac{8}{3}\sqrt{3}$$

Because $A'(x) < 0$ if $0 < x < \frac{8}{3}\sqrt{3}$ and $A'(x) > 0$ if $x > \frac{8}{3}\sqrt{3}$, then $A(\frac{8}{3}\sqrt{3}) \approx$ 79.6 is an absolute minimum value. Substituting $x = \frac{8}{3}\sqrt{3}$ into Eq. (1) we find $y = 4\sqrt{3}$.
▪ The dimensions of the smallest piece of cardboard are $\frac{8}{3}(1+\sqrt{3})$ in. $\approx$ 7.3 in. by $4(1+\sqrt{3})$ in. $\approx$ 10.9 in. Note that the cardboard and the printed region are similar rectangles.

17. $R(x)$ dollars is the total revenue when x units are sold: $R(x) = 200x$
$C(x)$ dollars is the total cost of producing x units per day: $C(x) = 2x^2 + 40x + 1400$
$P(x)$ dollars is the profit for x units sold: $P(x) = R(x) - C(x) = -2x^2 + 160x - 1400$, $x \ge 0$
$P'(x) = -4x + 160 = 4(40 - x)$. $P'(x) > 0$ if $x < 40$ and $P'(x) < 0$ if $x > 40$. Hence $P(x)$ has an absolute maximum value if $x = 40$. ▪ The firm should produce 40 units daily.

18. $R(x)$ dollars is the revenue when x units are sold: $R(x) = px = (140 - x)x = 140x - x^2$
$C(x)$ dollars is the total cost of producing x units per day: $C(x) = x^2 + 20x + 300$
$P(x)$ dollars is the profit for x units sold: $P(x) = R(x) - C(x) = -2x^2 + 120x - 300$, $x \ge 0$
$P'(x) = -4x + 120 = 4(30 - x)$. $P'(x) > 0$ if $x < 30$ and $P'(x) < 0$ if $x > 30$. Hence $P(x)$ has an absolute maximum value if $x = 30$ and $P(30) = -2(30)^2 + 120(30) - 300 = 1500$. ▪ The maximum profit is \$1500.

20. Find the shortest distance from the point $P(2,0)$ to a point on the curve $y^2 - x^2 = 1$, and find the point on the curve closest to P.
▹ A distance is least when its square is least and the square of the distance from point $P(2,0)$ to the point $Q(x,y)$ on the curve $y^2 - x^2 = 1$ is given by

$$s = (x-2)^2 + y^2 \qquad (1)$$

Because Q is on the curve, then $y^2 = 1 + x^2$. Substituting into Eq. (1), we have

$$s(x) = (x-2)^2 + (1+x^2) = 2x^2 - 4x + 5$$
$$s'(x) = 4x - 4 = 4(x-1)$$

Because $s'(x) < 0$ if $x < 1$ and $s'(x) > 0$ if $x > 1$ then $s(1) = 3$ is an absolute minimum value. Also, when $x = 1$ then $y^2 = 2, y = \pm\sqrt{2}$.
▪ The shortest distance is $\sqrt{s} = \sqrt{3}$ and the points on the curve that are closest are $(1, \pm\sqrt{2})$.

21. Let z be the square of the number of units in the distance from the origin to the point (x,y) on the line $3x + y = 6$; $y = 6 - 3x$. Then
$z = x^2 + y^2 = x^2 + (6-3x)^2 = 10x^2 - 36x + 36$, $x \in (-\infty, +\infty)$; $z'(x) = 20x - 36 = 20(x - \frac{9}{5})$
Because $z'(x) < 0$ if $x < \frac{9}{5}$ and $z'(x) > 0$ if $x > \frac{9}{5}$ then $z(\frac{9}{5}) = \frac{18}{5}$ is an absolute minimum.
A value of x that makes z an absolute minimum makes the distance an absolute minimum.
When $x = \frac{9}{5}$, $y = 6 - 3x = \frac{3}{5}$, so the closest point to the origin is $P(\frac{9}{5}, \frac{3}{5})$ at a distance of $\frac{3}{5}\sqrt{10}$ units. The given line has slope -3. The line joining P to the origin has slope $\frac{3}{5}/\frac{9}{5} = \frac{1}{3}$. Hence the two lines are perpendicular.

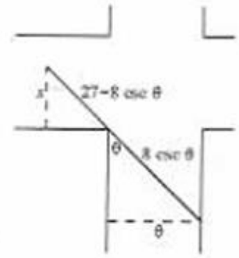
rectangle so that the window will admit the most light.

23. Let r ft be the radius of the semicircle so that 2r ft is the width of the rectangle. Then the height of the rectangle is $\frac{1}{2}(32 - \pi r - 2r)$. The window will admit the most light when its area is greatest. If $A(r)$ ft^2 is the total area of the window then

$A(r) = \frac{1}{2}\pi r^2 + 2r \cdot \frac{1}{2}(32 - \pi r - 2r) = 32r - (\frac{1}{2}\pi + 2)r^2$, $r \in \left[0, \frac{32}{\pi + 2}\right] = I$; $A'(r) = 32 - (\pi + 4)r$; $A''(r) = -(\pi + 4)$

Set $A'(r) = 0$: $32 = (\pi + 4)r$; $r = \frac{32}{\pi + 4}$ is the only critical number. The radius of the semicircle is $\frac{32}{\pi + 4}$ ft and the height of the rectangle is $\frac{1}{2}\left[32 - \frac{32(\pi + 2)}{\pi + 4}\right] = \frac{32}{\pi + 4}$ ft too. Since $A''\left(\frac{32}{\pi + 4}\right) < 0$, these dimensions give a relative maximum area, and by Theorem 3.9.1 they give the absolute maximum area. Because I is a closed interval, the extreme-value theorem also applies.

25. Let one end of the 27-ft girder touch the corner and the opposite wall of the 8-ft passageway. See the figure. If θ is the measure of the acute angle between the girder and the passageway, then $8 \csc \theta$ ft of the girder is in the passageway so $27 - 8 \csc \theta$ is in the corridor at right angles to the passageway. Let s ft be the distance of the other end of the girder from the side of the corridor. We want to find the absolute maximum value of s. Then



$s(\theta) = (27 - 8 \csc \theta)\cos \theta = 27 \cos \theta - 8 \cot \theta$, $\sin \theta \in [\frac{8}{27}, 1]$

$s'(\theta) = -27 \sin \theta + 8 \csc^2\theta = \frac{8 - 27 \sin^3\theta}{\sin^2\theta}$

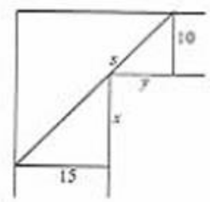
Set $s'(\theta) = 0$: $27 \sin^3\theta = 8$; $\sin^3\theta = \frac{8}{27}$; $\sin \theta = \frac{2}{3}$ so that $\cos \theta = \frac{1}{3}\sqrt{5}$, $\cot \theta = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

$s(\theta)\Big|_{\sin \theta = 8/27} = 0$, $s(\theta)\Big|_{\sin \theta = 2/3} = 27(\frac{1}{3}\sqrt{5}) - 8(\frac{1}{2}\sqrt{5}) = 5\sqrt{5}$, $s(\theta)\Big|_{\sin \theta = 1} = 0$

$s(\theta)$ is continuous on a closed interval so the absolute maximum value of s is $5\sqrt{5}$.

- The passageway must be at least $5\sqrt{5} \approx 11.2$ ft wide.

26. Let the girder of length s ft touch the corner and two opposite walls, x ft from the corner of the 15 ft corridor and y ft from the corner of the 10 ft corridor. See the figure. We seek the absolute minimum value of s. From similar right triangles we have $y/10 = 15/x$; $y = 150x^{-1}$. Adding the hypotenuses, we get



$s(x) = \sqrt{x^2 + 225} + \sqrt{22500x^{-2} + 100}$. $s'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 225}} - \frac{22500x^{-3}}{\sqrt{22500x^{-2} + 100}}$

$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 225}} - \frac{22500x^{-2}}{\sqrt{100(225 + x^2)}} = \frac{x^{-2}}{\sqrt{x^2 + 225}}(x^3 - 2250)$

Because $s'(x) < 0$ if $x < \sqrt[3]{2250} = 5\sqrt[3]{18}$ and $s'(x) > 0$ if $x > 5\sqrt[3]{18}$, then s has an absolute minimum value when $x = 5\sqrt[3]{18}$.

- The beam may have length $\sqrt{50\sqrt[3]{18} + 100} + \sqrt{75\sqrt[3]{12} + 225}$ ft ≈ 35.1 ft.

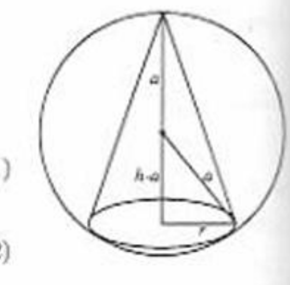
27. Let V cubic units be the specific volume of the cone. Let r units be the radius of the base, let h units be the height, and A square units be the surface of the cone. We want to find the value of h/r when A has an absolute minimum value.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; $h = 3V\pi^{-1}r^{-2}$. $A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\pi^2 r^4 + \pi^2 r^2 h^2} = (\pi^2 r^4 + 9V^2 r^{-2})^{1/2}$, $r \in (0, \infty)$.

$D_r A = \frac{1}{2}(\pi^2 r^4 + 9V^2 r^{-2})^{-1/2}(4\pi^2 r^3 - 18V^2 r^{-3}) = 2\pi^2 r^{-3}(\pi^2 r^4 + 9V^2 r^{-2})^{-1/2}(r^6 - \frac{9}{2}\pi^{-2}V^2)$

Because $D_r A < 0$ if $r < (\frac{9}{2}\pi^{-2}V^2)^{1/6} = r_0$ and $D_r A > 0$ if $r > r_0$, A has an absolute minimum value when $r = r_0$. Then $\frac{h}{r} = \frac{3V}{\pi r^3} = \frac{3V}{\pi\sqrt{\frac{9}{2}\pi^{-2}V^2}} = \sqrt{2}$.

28. A right-circular cone is to be inscribed in a sphere of given radius. Find the ratio of the altitude to the base radius of the cone of largest possible volume.



▹ Refer to the figure. Let

r units be the radius of the cone

h units be the altitude of the cone

V cubic units the volume of the cone

We want to find h/r when V has an absolute maximum value. We have

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h \qquad (1)$$

If the radius of the sphere is a units, then by the Pythagorean theorem

$$(h-a)^2 + r^2 = a^2$$
$$r^2 = 2ah - h^2 \qquad (2)$$

Substituting for r^2 into Eq. (1), we obtain V as a function of h:

$$V(h) = \tfrac{1}{3}\pi(-h^3 + 2ah)$$

We note that V is continuous on $(0, 2a)$. Differentiating, we get

$$V'(h) = \tfrac{1}{3}\pi(-3h^2 + 4ah) = -3ah(h - \tfrac{4}{3}a)$$

Because $V'(h) > 0$ if $0 < h < \frac{4}{3}a$ and $V'(h) < 0$ if $\frac{4}{3}a < h < 2a$ then V has an absolute maximum value whe $h = \frac{4}{3}a$. Substituting into Eq. (2) we find

$$r^2 = \tfrac{8}{9}a^2; \qquad r = \tfrac{2}{3}\sqrt{2}a; \qquad \frac{h}{r} = \frac{\frac{4}{3}a}{\frac{2}{3}\sqrt{2}a} = \sqrt{2}$$

▪ For the cone of largest volume, the ratio of altitude to base radius is $\sqrt{2}$.

30. Let f be the square of the distance from the point (x, y) of line $Ax + By + C = 0$. Differentiating implicit with respect to x: $A + By' = 0$, $y' = -A/B$. Then $f(x) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$. $f'(x) = 2(x - x_1) + 2(y - y_1)(-A/B) = 0$ when $y - y_1 = (B/A)(x - x_1)$. Writing the equation of the line as $A(x - x_1) + B(y - y_1) = -(Ax_1 + By_1 + C) = -d$, and substituting: $A(x - x_1) + (B^2/A)(x - x_1) = -d$, $x - x_1 = -\dfrac{Ad}{A^2 + B^2}$ and so $y - y_1 = -\dfrac{Bd}{A^2 + B^2}$. Thus $f = \dfrac{(A^2 + B^2)d^2}{(A^2 + B^2)^2} = \dfrac{d^2}{A^2 + B^2}$. The minimum distance is $\dfrac{|d|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. $f''(x) = 2 + 2(-A/B)(-A/B) = 2 + 2A^2/B^2 > 0$ so the critical point is a local minimum and hence an absolute minimum.

31. The cross section of a trough has the shape of an inverted isosceles triangle. If the lengths of the equal sid are 15 inches, find the size of the vertex angle that will give the maximum capacity for the trough.

▹ If A square units is the area of the cross section, then the capacity is a maximum when A is a maximum an $A = \frac{1}{2}ab \sin\theta$ where a and b are the measures of the lengths of two sides of the triangle and $\theta \in (0, \pi)$ is th measure of the angle between these sides. Because $\sin\theta$ has an absolute maximum value when $\theta = \frac{1}{2}\pi$, then has an absolute maximum value when $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Thus the vertex angle should have radian measure $\frac{1}{2}\pi$.