CALCULO I MODULO 2

RECTA TANGENTE Y DERIVADA

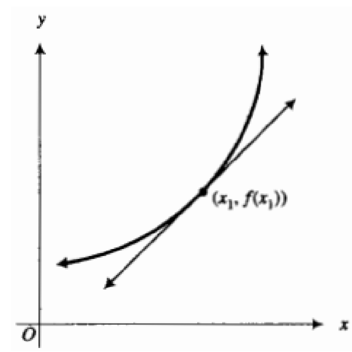
1. Definición de recta tangente a la gráfica de una función

Suponga que la función f es continua en x_1. La recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(x_1, f x_1)$ es

(I) La recta que pasa por P tiene pendiente m x_1, dada por:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

1. Si este limite existe.



(II) La recta x= x_1

$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ es $+\infty$ o $-\infty$

$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ es $+\infty$ o $-\infty$

Ejemplo 1

Encuentre una ecuación a la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 1$, en el punto (2,3). Dibuje la parábola y muestre un segmento de la recta tangente en (2,3).

Solución: Primero se calcula la pendiente de la recta tangente en (2,3), con $f(x) = x^2 - 1$, se tiene de (1).

$$m(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(2+\Delta x)^2 - 1] - 3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x)$$

$$= 4$$

Así, la recta tangente en (2,3) tiene pendiente 4, de la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, $y - y_1 = m(x - x_1)$, se obtiene

$y - 3 = 4(x - 2)$

$4x - y - 5 = 0$

La figura 6 presenta la parábola y un segmento de la recta tangente en (2,3).

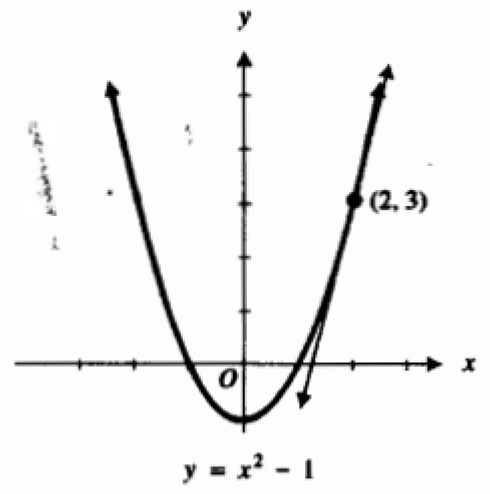


FIGURA 6

2. Definición de recta normal a una gráfica

La recta normal a una gráfica en un punto dado es la recta perpendicular a la recta tangente en ese punto.

Ejemplo 2

a) Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f(x) = x^3– 3x en el punto (x_1,f(x_1)).
b) Determine los puntos de la gráfica donde la recta tangente es horizontal y utilice estos puntos para dibujar la gráfica de f.

Solución:

a) Al calcular f(x_1) y f(x_1+Δ x) se obtiene

$$f(x_1) = x_1^3 - 3x_1$$

$$f(x_1+\Delta x) = (x_1 + \Delta x)^3 - 3(x_1 + \Delta x)$$

De (1)

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1+\Delta x)^3 - 3(x_1+\Delta x) - (x_1^3 - 3x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^3 + 3x_1^2\Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3x_1 - 3\Delta x - x_1^3 + 3x_1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_1^2\Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3\Delta x}{\Delta x}$$

Como $\Delta x \neq 0$, el numerador y el denominador pueden dividirse entre Δx para obtener

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} [\, 3\,x_1^2 + 3x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 3]$$

$$m(x_1) = 3x_1^2 - 3$$

b-) La recta tangente es horizontal en los puntos donde la pendiente es cero. Considerando $m(x_1) = 0$, se tiene

$$3x_1^2 - 3 = 0$$

$$x_1^2 = 1$$

$$x_1 = \pm 1$$

Por tanto, la recta tangente es horizontal en los puntos (-1 , 2) y (1, -2). Al localizar estos puntos y algunos otros se obtiene la gráfica mostrada en la figura 8.

El tipo de limite en (1), empleado para definir pendiente de una recta tangente, es uno de los más importantes en Calculo. Este límite es de uso frecuentemente y recibe un nombre especifico.

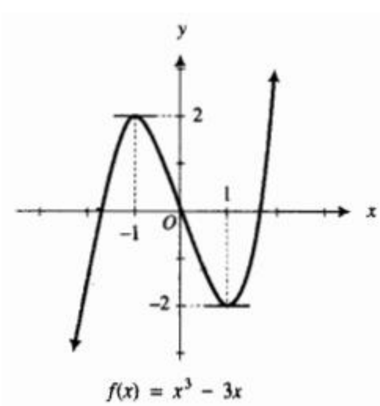


FIGURA 8

3. Definición de la derivada de una función

La derivada de la función f es aquella función, denotada por f', tal que su valor en un numero x del dominio de f esta dado por

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Si este límite existe.

Si x_1 es un numero particular del dominio de f, entonces

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \qquad (4)$$

Ejemplo ilustrativo 2

Para la función f del ejemplo 3 se puede aplicar f'(x) a fin de obtener una ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en un punto particular. Por ejemplo, en el punto (2,$\frac{3}{2}$) la pendiente de la recta tangente es $f'(2) = \frac{-3}{4}$. Por tanto, una ecuación de esta recta tangente es

$$y - \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}(x-2)$$

$$4y - 6 = -3x + 6$$

$$3x + 4y - 12 = 0$$

La figura 9 muestra la gráfica de f y su recta tangente trazadas en el rectángulo de inspección [-4.7 , 4.7] por [-3.1 , 3.1].

Considere ahora la formula (4), la cual es:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

En esta fórmula considere:

$$x_1 + \Delta x = x \qquad (5)$$

Entonces,

"$\Delta x \to 0$ "equivale a " $x \to x_1$" (6)

De (4), (5), y (6) se obtiene la siguiente fórmula para f'(x_1):

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

Si (x, y) es un punto de la grafica de f , entonces y =- f(x), y y' se utiliza también como una notación para la derivada de f(x). Con la función f definida por la ecuación y = f(x) se considera que

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad (8)$$

Donde Δy se denomina incremento de y y denota un cambio en el valor de la funcion cuando x varia de Δx. Al utilizar (8) y escribir $\frac{dy}{dx}$ en lugar de f'(x), la formula (3) se transforma en

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ejemplo 3

Determine la derivada de f si

$$f(x) = \frac{3}{x}$$

Solución. Si x es un número del denominador de f, entonces (3)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{f}(\mathrm{x} + \Delta \mathrm{x}) - \mathrm{f}(\mathrm{x})}{\Delta \mathrm{x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{3}{x+\Delta x} - \frac{3}{x}}{\Delta x}$$

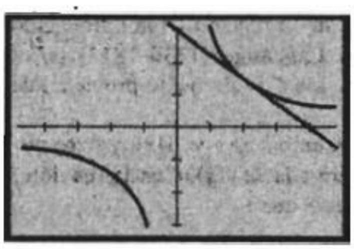
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x - 3\,(x + \Delta x)}{\Delta x\,(x)(x + \Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3\Delta x}{\Delta x(x)(x + \Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3}{x(x + \Delta x)}$$

$$= \frac{-3}{x^2}$$

Por tanto, la derivada de f es la función f' definida por $f'(x) = \frac{-3}{x^2}$. El dominio de f' es el conjunto de todos los números reales excepto 0, el cual es el mismo que el dominio de f.



[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

$f(x) = \frac{3}{x}$

FIGURA 9

Ejemplo 5

Calcule $\frac{dy}{dx}$ si $y = \sqrt{x}$

Solución

Se ha dado $y = f(x)$ donde $f(x) = \sqrt{x}$.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

A fin de evaluar este limite se racionaliza el numerador .

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x - \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x\,(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\,(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

Al dividir el numerador y el denominador entre Δx (ya que $\Delta x \neq 0$) se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Otras dos notaciones para la derivada de una funcion f son

$$\frac{d}{dx}\,[f(x)]\ y\ D_x\,[f(x)]$$

Otras dos notaciones pemite indicar la funcion originalo en la expresion para la derivada. Por ejemplo se puede escribir en el ejemplo 5 , como:

$$\frac{dy}{dx}\,(\sqrt{x}\,) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ o\ como\ D_x\big(\sqrt{x}\big) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

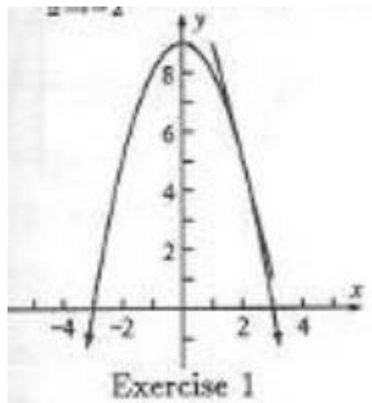
Por supuesto, si las funciones y las variables se denotan por otras letras diferentes de f,x y y, las notaciones para la derivada deben incluir estas letras. Por ejemplo, sdi la funcion g esta definida por la ecuacion $s = g(t)$ entonces la derivada en g puede indicarse en cada una de las siguientes formas:

$$g'(t) \qquad \frac{ds}{dt} \qquad \frac{d}{dt}\,[g(x)] \qquad D_t = g(x)$$

Problemas

En los ejercicios 1 a 6, obtenga una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la ecuación en el punto dado. Dibuje la grafica de la ecuacion y muestre un segmento de la recta tangente en el punto.

1. $\mathbf{y = 9 - x^2; (2, 5)}$



$$m(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(9 - x^2) - (9 - 2^2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{-(x^2 - 2^2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x\to 2} -(x - 2)$$

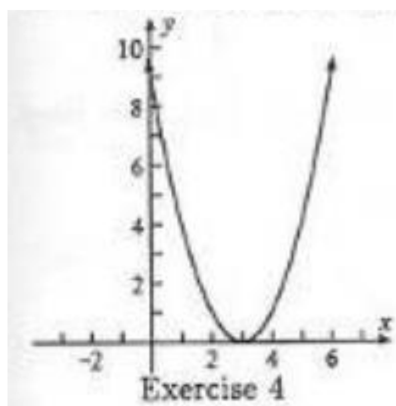
= - 4

La ecuación de la recta tangente es:

$y = -4(x - 2) + 5$

$y = -4x + 13$

4. $\mathbf{y = x^2 - 6x + 9; (3, 0)}$



$$m(3) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[(3 + \Delta x)^2 - 6(3 + \Delta x) + 9] - 0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2 - 18 - 6\Delta x + 9}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

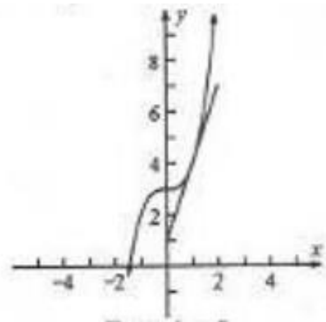
$= 0$

La ecuación de la recta tangente es:

$y = 0(x - 3) + 0$

$y = 0$

5. $\boldsymbol{y = x^3 + 3\ ;\ (1, 4)}$



Exercise 5

$$m(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^3+3) - (1^3+3)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^3 - 1^3)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} (x^2 + x + 1)$$

$$= 3$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y = 3\,(x-1) + 4$$

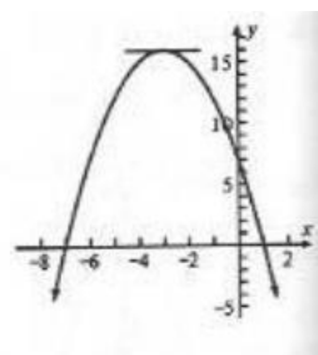
$$y = 3x + 1$$

En los ejercicios 7 a 10,

a) Determine la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(x_1, f(x_1))$. b) Determine los puntos de la gráfica donde la recta tangente es horizontal y utilice a estos puntos para dibujar la gráfica.

8. $\boldsymbol{f(x) = 7 - 6x - x^2}$

a) Aplicando la fórmula 1, tenemos



$$m(x_1) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[7 - 6\,(x_1+\Delta x) - (x_1+\Delta x)^2] - (7 - 6x_1 - x_1^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[7 - 6\,x_1 - 6\Delta x - x_1^2 - 2x_1\Delta x - (\Delta x)^2] - 7 + 6x_1 + x_1^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-6\Delta x - 2x_1\Delta x - \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} -6 - 2x_1 - \Delta x$$

$$= -6 - 2x_1$$

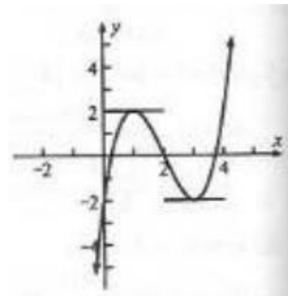
$$= -2(x_1 + 3)$$

b) m $(x_1) = 0$, cuando $x_1 = -3$ y f (-3) = 16, así que la gráfica tiene una tangente horizontal de (-3, 16). Otros puntos de la gráfica son (-7, 0), (-5, 12), (-3, 16), (-1 , 12) y (1, 0).

9. $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 6x - 9x - 2}$

a) $m(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$

$= \lim\limits_{x \to x_1} \frac{(x^3 - 6x^2 + 9x - 2) - (x_1^3 - 6x_1^2 + 9x_1 - 2)}{x - x_1}$



$= \lim\limits_{x \to x_1} \left(\frac{x^3 - x_1^3}{x - x_1} - 6\,\frac{x^2 - x_1^2}{x - x_1} + 9\,\frac{x - x_1}{x - x_1}\right)$

$= \lim\limits_{x \to x_1} [(x^2 + x_1 x + x_1^2) - 6\,(x + x_1) + 9]$

$= 3x_1^2 - 12x_1 + 9$

$= 3(x_1^2 - 4x_1 + 3)$

$= 3(x_1 - 1)(x_1 - 3)$

b/) $m(x_1) = 0$ cuando $x_1 = 1, f(1) = 2$ $y\, x_1 = 3$, $f(3) = -2$, asi que la grafica tiene una tangente horizontal de (1 , 2) y (3 , -2)

En los ejercicios del 21 al 30
a) Aplique la fórmula (7)
b) Aplique la fórmula (4)

21. $\boldsymbol{f(x) = \frac{8}{x - 2}\ ;\ x_1 = 6}$

$f'(6) = \lim\limits_{x \to 6} \frac{1}{x - 6} \left(\frac{8}{x - 2} - \frac{8}{6 - 2}\right)$

$= \lim\limits_{x \to 6} \left(\frac{8}{x-2} - \frac{1}{4}\right)$

$= \lim\limits_{x \to 6} \left(\frac{8}{x-2} - \frac{6-x}{(x-2)4}\right)$

$= \lim\limits_{x \to 6} \left(\frac{-2}{x-2}\right)$

$= \frac{-1}{2}$

$f'(6) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{8}{6 + \Delta x - 2} - \frac{8}{6 - 2}\right)$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \frac{8}{\Delta x} \left(\frac{1}{4 + \Delta x} - \frac{1}{4}\right)$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \frac{8}{\Delta x} \left(\frac{-\Delta x}{4(4 + \Delta x)}\right)$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \frac{-2}{4 + \Delta x}$

$= -\frac{1}{2}$

22. $\boldsymbol{f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 1;\ x_1 = 4}$

$$f'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{2}{x-4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right)$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{-2}{x-4}\left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{4}}{\sqrt{x}\sqrt{4}}\right)$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{-2}{x-4}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{\sqrt{x}\sqrt{4}}\right)$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{-2}{x-4}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{\sqrt{x}\sqrt{4}}\right)$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{-2}{x-4}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{\sqrt{x}\sqrt{4}}\right)$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{-2}{(\sqrt{z}+\sqrt{4})\sqrt{z}\sqrt{4}}$$

$$= \frac{-2}{16}$$

$$= \frac{-1}{8}$$

$$f'(4) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{2}{\sqrt{4+\Delta x}} - 1 - \left(\frac{2}{\sqrt{4}} - 1\right)\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x}\left[\frac{1}{\sqrt{4+\Delta x}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x}\left[\frac{\sqrt{4} - \sqrt{4+\Delta x}}{\sqrt{x}\sqrt{4}}\right.$$

23. $\boldsymbol{f(x) = senx\ ;\ x_1 = 0}$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{sen\,x - sen\,0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{sen\,x}{x}$$

$$= 1$$

$$f'^{(0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\,(0+\Delta x) - sen\,0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\,\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 1$$

30. $\boldsymbol{f(x) = cscx\ ;\ x_1 = \frac{1}{2}\pi}$

$$f'\left(\frac{1\pi}{2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\csc x - \csc\frac{1\pi}{2}}{x - \frac{1}{2}\pi}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\csc\left(\frac{1}{2}\pi + \Delta x\right) - \csc\frac{1}{2}\pi}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{1}{sen}\left(\frac{1}{2}\pi + \Delta x\right) - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{1}{cos}\Delta x - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\cos\Delta x} \,.\, \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1 - cos\,\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 0\,.\,1$$

$$= 0$$

En los ejercicios 31 a 36, determine $f'(x)$ *aplicando la formula* (3)

31. $\boldsymbol{f(x) = 4}$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f\,(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-4 - (-4)}{\Delta x}$$

$$= 0$$

33. $\boldsymbol{f(x) = 7x + 3}$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f\,(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{7\,[(x + \Delta x) + 3\,] - 7x + 3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{7\,\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 7$$

35. $\boldsymbol{f(x) = 4 + 5x - 2x^2}$

$$f'(x) = \lim_{x \to x} \frac{f\,(\,x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x \to x} \frac{(\,4 + 5x + 2x^2) - (4 + 5x - 2x^2)}{x - x}$$

$$= \lim_{x \to x} [\,5\,\frac{x - x}{x - x} - 2\,\frac{x^2 - x^2}{x^2 - x^2}]$$

$$= \lim_{x \to x} [\,5 - 2\,(x + x)]$$

$$= 5 - 4x$$

En los ejercicios 37 a 40, calcule la derivada indicada

37. $\boldsymbol{\frac{d}{dx}\,(\,8 - x^3)}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[8 - (x + \Delta x)^3] - (8 - x^3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[8 - x^3 - 3x^2\Delta x - 3x(\Delta x)^2 - \Delta x^3] - (8 - x^3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[-\,3x^2\Delta x - 3x(\Delta x)^2 - \Delta x^3]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 3x^2 - \,3x\Delta x - \,\Delta x^2$$

$$= 3x^2$$

39. $\boldsymbol{D_r(\frac{2r + 3}{3r - 2})}$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\Delta r}\,[\frac{2(\,r + \Delta r) + 3}{3\,(r + \Delta r) - 2} - \,\frac{2r + 3}{3r - 2}]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{[(2r + 3) + 2\Delta D_r](3r - 2) - (2r + 3)[(3r - 2) + 3\Delta r\,]}{\Delta r\,[\,3\,(r + \Delta r) - 2](3r - 2)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2\Delta r\,(3r - 2) - 3\Delta r\,(2r + 3)}{\Delta r\,[3\,(r + \Delta r) - 2](3r - 2)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{-\,13\,\Delta r}{\Delta r\,[\,3(r + \Delta r) - 2](3r - \,2)]}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{-\,13}{[\,3(r + \Delta r) - 2](3r - \,2)]}$$

$$= \frac{-\,13}{(3r - 2)^2}$$

En los ejercicios 41 a 44, encuentre $\frac{dy}{dx}$

41. $y = 3x + \frac{6}{x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x \to x} \frac{f(x) - f(x)}{x - x}$$

$$= \lim_{x \to x} \frac{1}{x-x} \left[\left(3x + \frac{6}{x^2}\right) - (3x + \frac{6}{x^2}) \right]$$

$$= \lim_{x \to x} [3\frac{x-x}{x-x} + \frac{6}{x-x} + (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2})]$$

$$= \lim_{x \to x} [3\frac{x-x}{x-x} + \frac{6}{x-x} + (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2})]$$

$$= \lim_{x \to x} [3 + \frac{6}{x-x} - (\frac{x^2 - x^2}{x^2 x^2})]$$

$$= \lim_{x \to x} [3 - \frac{6\,(x + x)}{x^2 x^2}]$$

$$= 3 - \frac{12\,x}{x^4}$$

$$= 3 - \frac{12x}{x^3}$$

42. $y = \sqrt[3]{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x \to x} \frac{f(x) - f(x)}{x - x}$$

$$= \lim_{x \to x} \frac{x^{1/3} - x^{1/3}}{(x^{1/3})^3 - (x^{1/3})^3}$$

$$= \lim_{x \to x} \frac{x^{1/3} - x^{1/3}}{\left(x^{1/3} - x^{1/3}\right)(x^{1/3})^2 + x^{1/3} x^{1/3} + (x^{1/3})^2}$$

$$= \lim_{x \to x} \frac{1}{(x^{1/3})^2 + x^{1/3} x^{1/3} + (x^{1/3})^2}$$

$$= \frac{1}{x^{2/3} + x^{2/3} + x^{2/3}}$$

$$= \frac{1}{3\,x^{2/3}}$$

$$= \frac{3}{2}\,x^{-2/3}$$

$$\mathbf{43.}\ \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x \to x} \frac{f(x) - f(x)}{x - x}$$

$$= \lim_{x \to x} \frac{1}{x-x} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} \right) \right]$$

$$= \lim_{x \to x} \frac{-(\sqrt{x-1} - \sqrt{x-1})}{[(x-1)-(x-1)]\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}}$$

$$= \lim_{x \to x} \frac{-1}{[(x-1)-(x-1)]\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}}$$

$$= \lim_{x \to x} \frac{-1}{2\,(x-1)^{3/2}}$$

$$= \frac{-1}{2}(x-1)^{-3/2}$$

$$\mathbf{44.}\ \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{5}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x \to x} \frac{f(x)-f(x)}{x-x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{4}{2\,(x+\Delta x)-5} - \frac{4}{2x-5}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{4}{2\,(x+\Delta x)-5} - \frac{4}{2x-5}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{4}{2\,(x+\Delta x)-5} - \frac{4}{2x-5}}{\Delta x} \cdot \frac{(2x-5)[\,2\,(x+\Delta x)-5]}{(2x-5)[\,2\,(x+\Delta x)-5]}$$

$$= 4 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x-5) - [\,2\,(x+\Delta x)-5]}{(2x-5)[\,2\,(x+\Delta x)-5]\,\Delta x}$$

$$= 4 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\,\Delta x}{(2x-5)[\,2\,(x+\Delta x)-5]\Delta x}$$

$$= 4 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2}{(2x-5)[\,2\,(x+\Delta x)-5]}$$

$$= \frac{-8}{(2x-5)(2x-5)}$$

$$= \frac{-8}{(2x-5)^2}$$

DIFERENCIABILIDAD Y CONTINUIDAD

El proceso de calcular la derivada de una función se denomina diferenciación; esto es, la diferenciación es la operación mediante la cual se obtiene la función f. a partir de la función f.

Si una función tiene una derivada en x_1, se dice que la función es diferenciable en x_1. Una función es diferenciable en un intervalo abierto si es diferenciable en cada numero de su dominio, entonces se dice que es una función diferenciable

Ejemplo 1

Sea $f(x) = x^{1/3}$

a) Muestre que f no es diferenciable en 0 aunque es continua en 0.
b) Trace la gráfica de f

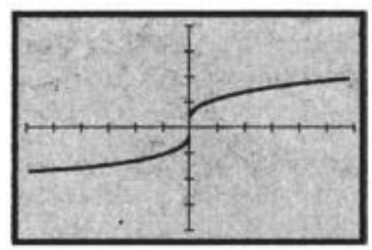
Solución

a) Al aplicar la formula (7) de la sección 2.1, se tiene si el límite existe.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^{1/3} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}}$$



[-6, 6] por [-4, 4]

$f(x) = x^{1/3}$

FIGURA 1

Pero este limite no existe, Por tanto, f no es diferenciable en 0. No obstante, f es continua en 0 porque:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^{1/3}$$

$$= 0$$

$$= f(0)$$

b) La figura 1a muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [-6, 6] por [-4, 4].

Ejemplo ilustrativo 3

Para la función f del ejemplo 1, como

$$\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f\,(0+\ \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^{1/3} - 0}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}}$$
$$= +\infty$$

Se concluye por la definición de 2.1.1 (ii), que x = 0, es la recta tangente a la gráfica de f en el origen.

Del ejemplo 1 y del ejemplo ilustrativo 3, la función definida por $f(x) = x^{1/3}$ tiene las siguientes propiedades:

1. f es continua en 0.
2. f no es diferenciable en 0.
3. La grafica f tiene una recta tangente vertical en el punto donde x = 0

En el siguiente ejemplo ilustrativo se tiene otra función que es continua pero no es diferenciable en 0. La gráfica de esta función no tiene recta tangente en el punto donde x = 0.

Ejemplo ilustrativo 4

Sea f la función valor absoluto definida por:

$f(x) = |x|$

La gráfica de esta funcion se muestra en la figura 2. De la formula (7) de la sección 2.1, si el límite existe.

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{|x| - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Como |x| = x si x > 0 y |x| = -x si x < 0, se consideran los limites laterales en 0:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} 1$$

= 1

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} (-1)$$

= -1

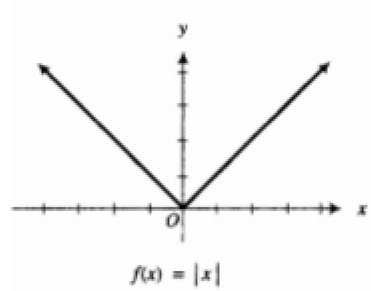


FIGURA 2

Debido a que $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x}$, se deduce que el límite bilateral $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe. Por tanto, f'(0) no existe, de modo que f no es diferenciable en 0. Dado que no se cumple la definición 2.1.1 cuando x = 0, la gráfica e la función valor absoluto no tiene recta tangente en el origen.

Como las funciones de; ejemplo ilustrativo 4 y del ejemplo 1 son continuas en un numero, pero no son diferenciables en ese número, se puede concluir que la continuidad de una función en un número no implica la diferenciabilidad e la misma en el punto en cuestión. Sin embargo, la diferenciabilidad implica continuidad, la cual se establece en el teorema siguiente.

1. **Teorema**

Si una función f es diferenciable en un numero x_1, entonces f es continua en x_1.

2. Definición de derivada lateral

(i) Si la funcion f esta definida en x_1, entonces la derivada por la derecha f en x_1, denotada por f'x_1, esta definida por

$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$f'_+(x_1) = \lim_{x \to {x_1}^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

Si existe el límite.

(ii) Si la función f está definida en x_1, entonces la derivada por la izquierda de f en x_1, denotada por f'x_1, está definida por

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$f'_-(x_1) = \lim_{x \to {x_1}^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

Si existe el limite

Ejemplo ilustrativo 5

En el ejemplo ilustrativo 2 de la sección 1.8, se obtuvo el módulo matemático.

$$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 10 \\ 1.4x + 6 & \text{si } 10 < x \end{cases}$$

Donde C(x) dólares es el costo total de x libras de un producto. La gráfica de C se presenta en la figura 7. En la sección 1.8 se mostró que C es continua en 10. Ahora se determinará si C es diferenciable en 10. Puesto que C está definida en trozos, se calcularán las derivadas laterales en 10.

$$C'_{-}(10) = \lim_{x \to 10^-} \frac{C(x) - C(10)}{x-10} \qquad\qquad C'_{+}(10) = \lim_{x \to 10^+} \frac{C(x) - C(10)}{x-10}$$

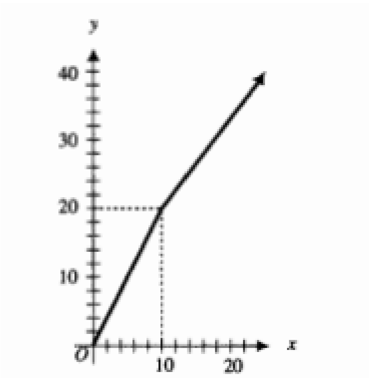
$$= \lim_{x \to 10^-} \frac{2x - 20}{x-10} \qquad\qquad = \lim_{x \to 10^+} \frac{(1{,}4\,x + 6) - 20}{x-10}$$

$$= \lim_{x \to 10^-} \frac{2\,(x - 10)}{x-10} \qquad\qquad = \lim_{x \to 10^+} \frac{1.4\,(x - 10)}{x-10}$$

$$= \lim_{x \to 10^-} 2 \qquad\qquad = \lim_{x \to 10^+} 1.4$$

$$= 2 \qquad\qquad = 1.4$$

Como $C'_{-}(10) \neq C'_{+}(10)$, entonces C no es diferenciable en 10



$$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \\ 1.4x + 6 & \text{si } 10 < x \end{cases}$$

FIGURA 7

Ejemplo 3 Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x < b \\ 1 - \frac{1}{4}x & \text{si } b \leq x \end{cases}$$

a) Determine un valor de b tal quef sea continua en b.
b) Dibuje la grafica de f con el valor de b determinado en el inciso (a)
c) ¿Es diferenciable f en el valor de b determinado en el inciso (a)?

Solucion

a) La funcion f sera continua en b si $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ y $\lim_{x \to b^+} f(x) = f(b)$

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} \frac{1}{x} \qquad\qquad \lim_{x \to b^+} f(x) = \lim_{x \to b^+} (1 - \frac{1}{4}x\,)$$

$$= \frac{1}{b} \qquad\qquad = 1 - \frac{b}{4}$$

$f(b) = 1 - \frac{1}{4}b$, por tanto, f será continua en b si

$$\frac{1}{b} = 1 - \frac{1}{4}b$$

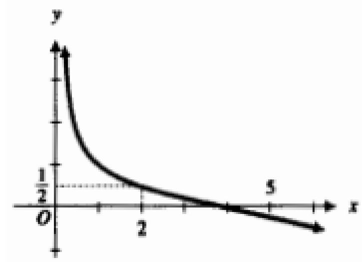
$$4 = 4b - b^2$$

$$b^2 - 4b + 4 = 0$$

$$(b-2)^2 = 0$$

$$b = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 1 - \frac{1}{4}x & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 1 - \frac{1}{4}x & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

FIGURA 8

Y f es continua en 2.

b) La grafica de f se presenta en la figura 8
c) Para determinar si f es diferenciable en 2 se calcularan en $f'_-(2) y\, f'_+(2)$.

$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{2-x}{2\,(x-2)}$$
$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{-1}{2x}$$
$$= \frac{-1}{4}$$

$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{\left(1-\frac{1}{4}x\right)-\frac{1}{2}}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x}{(x-2)}$$
$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{2-x}{4\,(x-2)}$$
$$= \frac{-1}{4}$$

Como $f'_-(2) = f'_+(2)$, se concluye que $f'(2)$ existe, y en consecuencia, f es diferenciable en 2.

Problemas

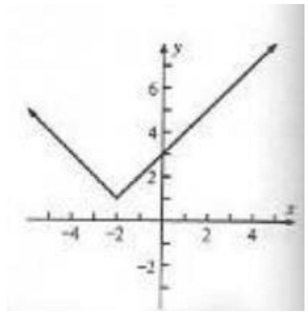
En los ejercicios 1 a 20, haga lo siguiente:

a) Dibuje la grafica de la funcion
b) Determine si f es continua en x_1
c) Calcule $f'_-(x_1)\; y\; f'_+(x_1)$
d) Determine si f es diferenciable en x_1

4. $f(x) = 1 + |x+2| \qquad x_1 = -2$

$$f(x) = \begin{cases} 1-(x+2) & si\ x < -2 \\ 1+(x+2) & si\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x-1 & si\ x < -2 \\ x+3 & si\ x \geq -2 \end{cases}$$



a) La grafica se muestra a la derecha
b) Porque $f(-2) = 1$, y

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} (-x-1) \qquad\qquad \lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} (x+3)$$
$$= 1 \qquad\qquad\qquad\qquad = 1$$

Por lo tanto, f es continua en -2.

c) Por definición 2.2.3

9. $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & si\ x < 1 \\ (1-x)^2 & si\ 1 \leq x \end{cases} \quad x_1 = 1}$

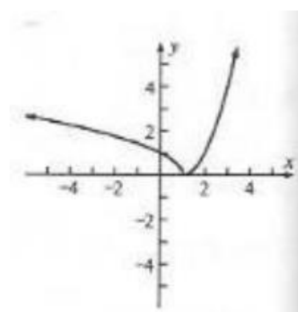
$f(1) = (1-x)^2$

$= 0$

$b)\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} \qquad\qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (1-x)^2$

$= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad = 0$

Como $\lim_{x\to 1} f(x) =$ 0 = f(1), entonces f es continua en 0



c) $f'_{-}(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x}-0}{-(1-x)}$

$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{\sqrt{1-x}}$

$= -\infty$

$f'_{+}(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

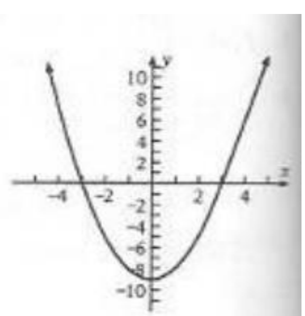
$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(1-x)^2-0}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1^+} (x-1)$

$= 0$

d) Como $f'_{-}(1) \neq f'_{+}(1), f'(1)\ no\ existe, entonces\ f\ no\ es\ diferenciable\ en\ 1$

12. $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x^2-9 & si\ x < 3 \\ 6x-18 & si\ 3 \leq x \end{cases} \quad x_1 = 3}$



a) La grafica es mostrada del lado derecho
b) Debido que $f(3) = 6(3) - 18 = 0$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x^2-9) \qquad\qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (6x-18)$

$= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad = 0$

Por lo tanto f es continua en 3

c) Dada la definición 2.2.3 y la definición de 2.2.2.

$$f'_-(3) = \lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} \qquad \text{y} \qquad f'_+(3) = \lim_{x\to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{(x^2-9)-0}{x-3} \qquad\qquad = \lim_{x\to 3^+} \frac{(6x-18)-0}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3^-} (x+3) \qquad\qquad = \lim_{x\to 3^+} 6$$

$$= 6 \qquad\qquad = 6$$

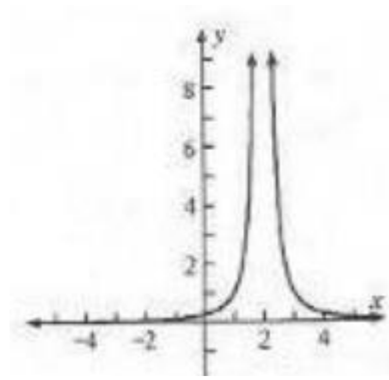
d) Debido a que $f'_-(3) = f'_+(3)$, entonces f'(3) existe y f es diferenciable en 3. En la figura se nota que la curva está en x = 3

13. $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[3]{x+1}} \qquad \boldsymbol{x_1 = -1}$

$b) \lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} (x+1)^{1/3} \qquad f(-1)$

$= 0$

Asi que f es continua en -1.



d) $f'_-(-1) = f'_+(-1)$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^{1/3}-0}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{1}{(x+1)^{2/3}}$$

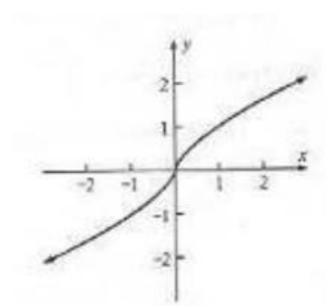
$$= +\infty$$

e) $f'_-(-1) = f'_+(-1)$, como f'(-1) no existe y no es diferenciable en -1. Aca la tangente es vertical y es 0.

14. $\boldsymbol{f(x) = (x-2)^{-2}} \qquad \boldsymbol{x_1 = 2}$

f no es definida en 2 por lo tanto f no es continua, no existe la derivada por lo tanto f no es diferenciable en 2.

16. $f(x) = \begin{cases} -x^{2/3} & \text{si } x \le 0 \\ x^{2/3} & \text{si } 0 < x \end{cases} \qquad x_1 = 0$



a) La grafica es mostrada a la derecha

b) Como $f(0) = 0$, y

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x^{2/3}) \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (-x^{2/3})$$

$$= 0 \qquad\qquad = 0$$

Entonces f es continua en 0.

c) Por definición de 2.2.3 y 2.2.2

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \qquad \text{y} \qquad f'_-(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^{2/3}}{x} \qquad\qquad = \lim_{x\to o^+} \frac{x^{2/3}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x^{1/3}} \qquad\qquad = \lim_{x\to o^+} \frac{1}{x^{1/3}}$$

$$= +\infty \qquad\qquad = +\infty$$

d) Como $f'_-(0) = +\infty$, por lo tanto f'(0) no existe y f no es diferenciable en 0. La tangente es vertical en el punto cuando x = 0

19. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x \le 2 \\ x^3 & \text{si } 2 < x \end{cases} \qquad x_1 = 2$

$b)$ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 3x^2 \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^3$

= 12 = 8

Como $\lim_{x\to 2^-} f(x) \ne \lim_{x\to 2^+} f(x)$, f no es continua en 2.

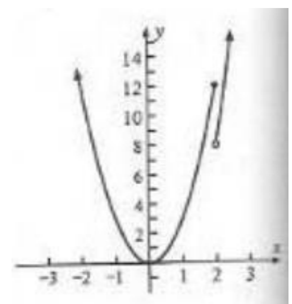
$c)$ $f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \qquad f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{3x^2-12}{x-2} \qquad\qquad = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-12}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{3\,(x-2)(x+2)}{x-2} \qquad\qquad = -\infty$$

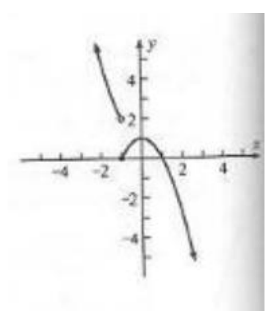
$$= \lim_{x\to 2^-} 3\,(x+2)$$

$$= 12$$



$d)$ f no es continua en 2, por lo tanto f no es diferenciable en 2

20. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 \le x \end{cases} \qquad x_1 = 1$



a) Las grafica es mostrada del lado derecho

b) Debido a

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (x^2+1)$$

= 2

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (1-x^2)$$

= 0

Entonces el lim f(x) no existe y f es discontinua en -1

Notando que hay un salto en la grafica en el punto cuando x = -1

c) Como f(-1) = -1 – $(-1)^2$. Por definición de 2.2.3 y 2.2.2

$$f'_{-}(-1) = \lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \qquad\qquad f'_{+}(-1) = \lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

$$= \lim_{x\to -1^-} \frac{(x^2+1)-0}{x-(-1)} \qquad\qquad = \lim_{x\to -1^+} \frac{(1-x^2)-0}{x-(-1)}$$

$$= -\infty \qquad\qquad = \lim_{x\to -1^+} (1-x^2)$$

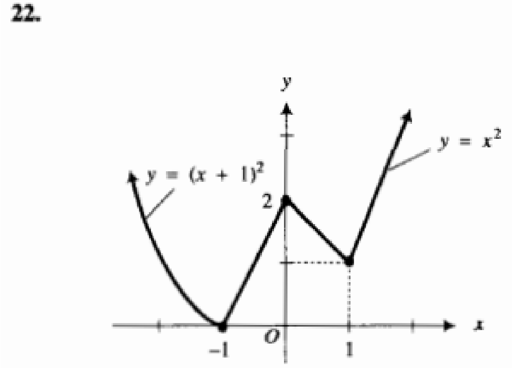
$$= 2$$

d) Como f es discontinua en -1, entonces f no es diferenciable en -1

Los ejercicios 21 a 26 tratan de la función continua f cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales y cuya grafica se muestra en la figura adjunta. Suponga que cada porción de la grafica que parece ser un segmento de la recta. En cada ejercicio haga lo siguiente:

a) Defina como f una función a trozos
b) Encuentre $f'_{-}(-1)$
c) Encuentre $f'_{+}(-1)$
d) Encuentre $f'_{-}(0)$
e) Encuentre $f'_{+}(0)$
f) Encuentre $f'_{-}(1)$
g) Encuentre $f'_{+}(1)$
h) ¿ En que números f no es diferenciable?

22.



a) $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 \; si \; x \leq -1 \\ 2x+2 \; si -1 < x \leq 0 \\ -x+2 \; si \; 0 < x \leq 1 \\ x^2 \quad si \quad x > 1 \end{cases}$

b) $f'_{-}(-1) = \lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$= \lim_{x\to -1^-} \frac{(x+1)^2-0}{x+1}$

$= \lim_{x\to -1^-} (x+\ 1)$

$= 0$

c) y d) $f'_{+}(1) = f'_{-}(0)$

$= 2$

$e)\ y\ f)\ f'_{+}(0) = \ f'_{-}(1)$

$= -1$

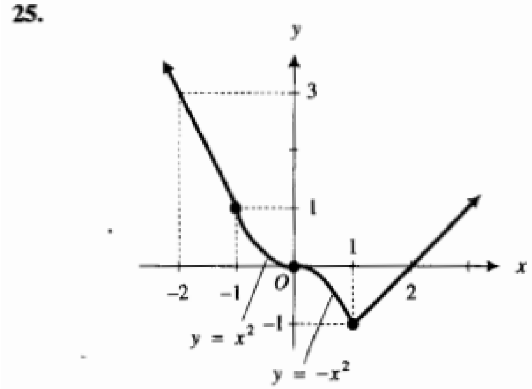
$g)\ f'_{+}(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1}$

$= 2$

$h)$ f no es diferenciable en -1 porque $f'_{-}(-1) \neq \ f'_{+}(-1)$; en 0 porque $f'_{-}(0) \neq f'_{+}(0)$; y en 1 debido a $f'_{-}(1) \neq f'_{+}(1)$

25.



$-2x - 1\ si\ x \leq -1$

$f(x) = \{x^2\ si\ -1 < x\ \leq 0$

$-x^2\ si\ 0 < x\ \leq 1$

x – 2 si x < 1

a) $f'_{-}(-1) = \lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$= \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-1}{x+1}$

$= \lim_{x\to -1^-} (x-1)$

= -2

b) $f'_+(-1) = -2$

c) $f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x}$

$= \lim_{x\to 0^-} (x)$

= 0

d) $f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{x}$

$= \lim_{x\to 0^+} (-x)$

= 0

e) $f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1^-} \frac{(-x^2)-(-1)}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1^-} -(x+1)$

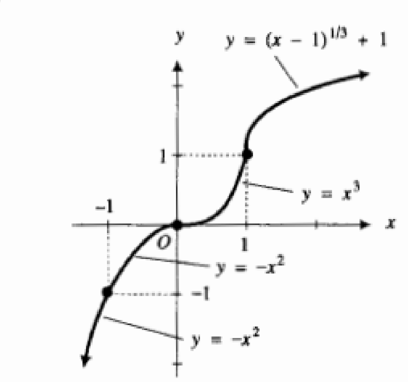
= -2

f) $f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$= 1$

g) F no es diferenciable en 1 porque $f'_-(1) \neq f'_+(1)$

26.



a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & si\ x \leq -1 \\ x^3 & si\ -1 < x \leq 1 \\ (x-1)^{1/3} + 1 & si\ x > 1 \end{cases}$

b) $f'_{+}(-1) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$= \lim\limits_{x\to -1^{+}} \frac{-x^2-\ (-1)}{x+1}$

$= \lim\limits_{x\to -1^{+}} -(x-1)$

$= 2$

c) $f'_{+}(-1) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$= \lim\limits_{x\to -1^{+}} \frac{x^3-(-1)}{x+1}$

$= \lim\limits_{x\to -1^{+}} (x^2-x+1)$

$= 3$

d) Y e) $f'_{-}(0) = f'_{+}(0)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3-0}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} x^2$

$= 0$

$f)$ $f'_{-}(1) = \lim\limits_{x\to 1^{-}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1^{-}} \frac{x^3-1}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1^{-}} (x^3+x+1)$

$= 3$

$g)$ $f'_{+}(1) = \lim\limits_{x\to 1^{+}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1^{+}} \frac{\left[(x-1)^{1/3}+1\right]-1}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1^{+}} \frac{1}{(x-1)^{2/3}}$

$= +\infty$

h) f no es diferenciable en -1 porque $f'_{-}(-1) \neq f'_{+}(-1)$; y en 1 porque $f'_{+}(1)$ no existe.

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Teoremas sobre diferenciación de funciones algebraicas y derivadas de orden superior

1. **Teorema regla de diferenciación de una constante**

Si c es una constante y si $f(x) = c$, entonces $f'(x) = 0$

$D_x(c) = 0$

2. **Teorema regla de diferenciación de potencias (para potencias con exponentes enteros positivos)**

Si n es un numero entero positivo y si $f(x) = x^n$, entonces

$f' = nx^{n-1}$

$D_x(x^n) = nx^{n-1}$

3. **Teorema regla de diferenciación para el producto de una función por una constante**

Si f es una función, c es una constante y g es la funcion definida por

$g(x) = c\,.f(x)$

Y si f' existe, entonces

$g'(x) = c\,.f'(x)$

4. **Teorema regla de diferenciación para la suma**

Si f y g son funciones y si h es la función definida por

$h(x) = f(x) + g(x)$

y si $f'(x)\ y\ g'(x)$ existen, entonces

$h'(x) = f'(x) + g'(x)$

$D_x[\,f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$

5. **Teorema**

La derivada de la suma de un numero finito de funciones es igual a la suma de sus derivadas si estas derivadas existen.

6. **Teorema regla de diferenciación para el producto**

Si f y g son funciones y h es la función definida por

$h(x) = f(x).\,g(x)$

y si $f'(x)$ y $g'(x)$ existen, entonces

$h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

7. Teorema regla de diferenciación para el cociente

Si f y g son funciones y h es la función definida por

$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ donde $g(x) \neq 0$

y si $f'(x)$ y $g'(x)$ existen, entonces,

$h(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

$D_x[\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{[g(x)]^2}$

8. Teorema de diferenciación de potencias (para potencias con exponentes enteros negativos)

Si $f(x) = x^{-n}$, donde -n es un numero entero negativo y $x \neq 0$, entonces

$f'(x) = -nx^{-n-1}$

Problemas

En los ejercicios 1 a 24, obtenga la derivada de la funcion por medio de los teoremas de esta seccion.

12. $\boldsymbol{G(y) = y^{10} + 7y^5 - y^3 + 1}$

$G'(y) = 10y^{10-1} + 7\,(5\,y^{5-1}) - 3y^{3-1} + 0$

$= 10y^9 + 35y^4 - 3y^2$

13. $\boldsymbol{F(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{x^2}}$

$= D_x(x^2) + D_x(3x) + D_x(x^{-2})$

$= 2x + 3 - 2x^{-3}$

$= 2x + 3 - \frac{2}{x^3}$

14. $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{x^3}}$

$= D_x\left(\frac{1}{3}x^3\right) + D_x(3x^{-3})$

$= x^2 + 9x^{-4}$

$= x^2 + \frac{9}{x^4}$

16. $\boldsymbol{f(x) = x^4 - 5 + x^{-2} + 4x^{-4}}$

$= 4x^{4-1} - 0 - 2\,x^{-2-1} + 4(-4)x^{-4-1}$

$= 4x^3 - 2x^{-3} - 16x^{-5}$

19. $\boldsymbol{f(s) = \sqrt{3}\,(s^3 - s^2)}$

$= \sqrt{3}\,D_s(s^3 - s^2)$

$= \sqrt{3}\,(3s^2 - 2s)$

21. $\boldsymbol{f(x) = (2x^4 - 1)(5x^3 + 6x)}$

$= (2x^4 - 1)D_x(5x^3 + 6x) + (5x^3 + 6x)D_x(2x^4 - 1)$

$= (2x^4 - 1)(15x^2 + 6) + (5x^3 + 6x)(8x^3)$

$= 30x^6 + 12x^4 - 15x^2 - 6 + 40x^6 + 48x^4$

$= 70x^6 + 60x^4 - 15x^2 - 6$

21. $\boldsymbol{f(x) = (4x^2 + 3)^2}$

$= D_x(4x^2 + 3)(4x^2 + 3)$

$=D_x(4x^2 + 3)(4x^2 + 3) + (4x^2 + 3)D_x(4x^2 + 3)$

$= 8x\,(4x^2 + 3) + (4x^2 + 3)(8x)$

$= 64x^3 + 48x$

24. $\boldsymbol{f(t) = (t^3 - 2t + 1)(2t^2 + 30)}$

$= (t^3 - 2t + 1)D_x(2t^2 + 30) + \ (2t^2 + 30)D_x(t^3 - 2t + 1)$

$=(t^3 - 2t + 1)(4t) + (2t^2 + 30)(3t^2 - 2)$

$= 4t^4 - 8t^2 + 4t + 3t^3 - 6t + 3 + 6t^4 + 9t^3 - 4t^2 - 6t$

$= 10t^4 + \ 12t^3 - 12t^2 - 8t + 3$

En los ejercicios 25 a 36, calcule la derivada aplicando los teoremas de esta sección. En los ejercicios 25 a 30, apoye la respuesta trazando en la graficadora la gráfica de su respuesta y de la derivada numérica en x, en el mismo rectángulo de inspección.

$25. \boldsymbol{D_x[(x^2-3x+2)(2x^3+1)]}$

$= (x^2-3x+2)D_x(2x^3+1) + \ (2x^3+1)D_x(x^2-3x+2)$

$=(x^2-3x+2)(6x^2)+(2x^3+1)(2x-3)$

$= 6x^4-18x^3+12x^2+4x^4-6x^3+2x$ - 3

$= 10x^4-24x^3+12x^2+2x-3$

$27. \boldsymbol{D_x(\frac{x}{x-1})}$

$=\frac{(x-1)D_x x - x\ (D_x(x-1))}{(x-1)^2}$

$=\frac{(x-1)(1)-x\ (1)}{(x-1)^2}$

$=\frac{-1}{(x-1)^2}$

$29. \boldsymbol{\frac{d}{dx}(\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1})}$

$=\frac{(x^2+2x+1)D_x(x^2-2x+1)- \ x^2-2x+1(D_x(x^2+2x+1))}{(x^2-2x+1)^2}$

$=\frac{(x^2+2x+1)(2x-2)-(\ x^2-2x+1\ )(2x+\ 2)}{(x^2-2x+1)^2}$

$=\frac{2\ (x+1)^2(x+1)-2(x+1)^2(x-1)}{[(x-1)^2]^2}$

$=\frac{2\ (x-1)(x+1)[(x-1)-(x+1)]}{(x-1)^4}$

$=\frac{2\ (x+1)(-2)}{(x-1)^3}$

$=\frac{4\ (x+1)}{(x-1)^3}$

$31. \boldsymbol{\frac{d}{dt}(\frac{5t}{1+2t^2})}$

$=\frac{(1+2t^2)D_t(5t)-5t\ (D_t(1+2t^2))}{(1+2t^2)^2}$

$=\frac{(1+2t^2)(5)-5t\ (4t)}{(1+2t^2\ )^2}$

$=\frac{5+10t^2-20t^2}{(1+2t^2\ )^2}$

$= \frac{5 - 10t^2}{(1+2t^2)^2}$

33. $\frac{d}{dy}(\frac{y^3 - 8}{y^3 + 8})$

$= \frac{(y^3-8)(3y^2)-(y^3+8)(3y^2)}{(y^3+8)^2}$

$= \frac{3y^2\ (y^3-8+y^3+8)}{(y^3+8)^2}$

$= \frac{48y^2}{(y^3+8)^2}$

36. $D_x[\frac{x^3+1}{x^2+3}(x^2 - 2x^{-1} + 1)]$

$= D_x[\frac{x^5+x^3-x^2-2x^{-1}+1}{x^2+3} \cdot \frac{x}{x}]$

$= D_x[\frac{x^6+x^4-x^3+x-2}{x^3+3x}]$

$= \frac{(x^2+3x)D_x(x^6+x^4-x^3+x-2)-(x^6+x^4-x^3+x-2)(D_t(x^3+3x))}{(x^2+3)^2}$

$= \frac{(x^2+3x)(6x^5+4x^3-3x^2+1)-(x^6+x^4-x^3+x-2)(3x^2+3)}{(x^2+3)^2}$

$= \frac{3x^8+16x^6+9x^4-8x^3+6x^2+6}{x^2(x^2+3)^2}$

Derivadas de una función compuesta y regla de la cadena

1. Teorema regla de la cadena

Si la función g es diferenciable en x y la función f es diferenciable en g(x), entonces la función compuesta f o g es diferenciable en x, y

$(f\ o\ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

$\boldsymbol{D_x[\ f(u)] = f'(u)D_x u}$

Problemas

5. $\boldsymbol{f(t) = (2t^4 - 7t^3 + 2t - 1)^2}$

$= D_t(2t^4 - 7t^3 + 2t - 1)^2$

$= 2\ (2t^4 - 7t^3 + 2t - 1)\ D_t(2t^4 - 7t^3 + 2t - 1)$

$= 2\left(2t^4 - 7t^3 + 2t - 1\right)(8t^3 - 7t^2 - 2)$

7. $\boldsymbol{f(x) = (x^2 + 4)^{-2}}$

$= -2\,(x^2 + 4)^{-3}\, D_x(x^2 + 4)$

$= -2\,(x^2 + 4)^{-3}\,(2x)$

10. $\boldsymbol{G(x) = sec^2 x}$

$= 2\, sec^{2-1} D_x\, secx$

$= 2\, secx\, secx\, tanx$

12. $\boldsymbol{f(x) = cos(3x^2 + 1)}$

$= -\,sen(3x^2 + 1) D_x(3x^2 + 1)$

$= -\,sen(3x^2 + 1)(6x)$

14. $\boldsymbol{\frac{d}{dt}\,(2\, sen^3 t\, cos^2 t)}$

$= \mathbf{2}\,[D_t(sen^3 t).\cos^2 t + D_t(\cos^2 t)(sen^3 t)$

$= 2\;[\mathbf{3}\, sen^2 t D_t(sent).\cos^2 t + (2\, cost)\, D_t(cos\, t)(sen^3 t)$

$= 6\, sen^2 t \cos t - 4\, sen^4\, t\, cost$

16. $\boldsymbol{\frac{d}{dx}\,[(4x^2 + 7)^2(2x^3 + 1)^4]}$

$=(4x^2 + 7)^2\, D_x(2x^3 + 1)^4 + \, D_x(4x^2 + 7)^2\,(2x^3 + 1)^4$

$= (4x^2 + 7)^2[4(2x^3 + 1)^3 D_x(2x^3 + 1) + [2(4x^2 + 7)\, D_x(4x^2 + 7)(2x^3 + 1)^4]$

$= (4x^2 + 7)^2[4(2x^3 + 1)^3(6x^2) + [2(4x^2 + 7)(8x)(2x^3 + 1)^4]$

$= 24x^2(4x^2 + 7)^2(2x^3 + 1)^3 + 16x\,(4x^2 + 7)(2x^3 + 1)^4$

18. $\boldsymbol{f(t) = \left(\frac{2t^2 + 1}{3t^3 + 1}\right)^2}$

$=2(\frac{2t^2+1}{3t^3+1}) D_t(\frac{2t^2+1}{3t^3+1})$

$=2(\frac{2t^2+1}{3t^3+1})(\frac{(3t^3+1)(4t)-(2t^2+1)(9t^2)}{(3t^3+1)^2})$

$= 2\left(\frac{2t^2+1}{3t^3+1}\right)\left(\frac{-t^4-9t^2+4t}{(3t^3+1)^2}\right)$

$= \frac{2t(2t^2+1)(6t^3+9t-4)}{(3t^3+1)^3}$

19. $\boldsymbol{g(t) = sen^2(3t^2 - 1)}$

$= 2\ \mathrm{sen}(3\mathrm{t}^2 - 1)D_t sen(3t^2 - 1)$

$= 2\ \mathrm{sen}(3\mathrm{t}^2 - 1)cos(3t^2 - 1)(6t)$

$= 6t\ sen(6t^2 - 2)$

21. $f(x) = (\tan^2 x - x^2)^3$

$\boldsymbol{= 3(tan^2x - x^2)^2 D_x(tan^2x - x^2)}$

$\boldsymbol{=3\ (tan^2x - x^2)^2[2\ tanx\ (sec^2x) - 2x]}$

$\boldsymbol{= 6\ (tan^2x - x^2)^2(tanx\ sec^2x - x)}$

24. $\boldsymbol{f(x) = sen^2(cos2x)}$

$\boldsymbol{f'(x) = 2\ sen(cos2x)D_x sen(cos2x)}$

$\boldsymbol{= 2\ sen\ (cos2x)cos(cos2x)D_x cos\ 2x}$

$\boldsymbol{= 2\ sen\ (cos2x)cos\ (cos2x)(-sen2x)D_x(2x)}$

$\boldsymbol{=2\ sen\ (cos2x)cos(cos\ 2x)(-2\ sen2x)}$

$\boldsymbol{= -2\ sen\ 2x\ sen(2cos\ 2x)}$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

1. Teorema

Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$D_x(sen^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$$

- **Ejemplo 1** Calcule $f'(x)$ si

$$f(x) = \sin^{-1} x^2$$

Solución Del teorema 5.7.2,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \ (2x)$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

2. Teorema

Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$D_x(cos^{-1} u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$$

- **Ejemplo 2** Calcule $\frac{dy}{dx}$ si

$$y = \cos^{-1} e^{2x}$$

Solución Del teorema 5.7.4, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-(e^{2x})^2}} \ (e^{2x})(2x)$$

$$= \frac{-2e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}$$

3. Teorema

Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$D_x(tan^{-1} u) = -\frac{1}{1+u^2} D_x u$$

- **Ejemplo 3** Calcule $f'(x)$ si

$$f(x) = \tan^{-1}\frac{1}{x+1}$$

Solución Del teorema 5.7.6, se tiene

$$f'(x) = -\frac{1}{1+\frac{1}{(x+1)^2}} \cdot \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{(x+1)^2+1}$$

$$= \frac{-1}{x^2+2x+2}$$

4. Teorema

Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$D_x(sec^{-1} u) = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$$

- **Ejemplo 4** Calcule $f'(x)$ si

$$f(x) = \text{x} \sec^{-1}\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \sec^{-1}\frac{1}{x} + x\left[\frac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{(\frac{1}{x})^2-1}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$= \sec^{-1}\frac{1}{x} + \frac{x^2}{\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \sec^{-1}\frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}}$$

$$= \sec^{-1}\frac{1}{x} - \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}$$

5. Teorema

Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$D_x(cot^{-1}u) = -\frac{1}{1+a^2}D_xu$$

6. Teorema

Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$D_x(csc^{-1}u) = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}D_xu$$

Problemas

1. (a) $F(x) = 2\ cos^{-1}\sqrt{x}$

(b) $g(t) = sec^{-1}\ 5t\ + \csc^{-1} 5t$

2. (a) $g(x) = \frac{1}{2} sen^{-1}e^{x}$

(b) $f(y) = tan^{-1}\ y^2 + \ \cot^{-1} y^2$

3. (a) $f(x) = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ **(b)** $G(x) = \cot^{-1}\frac{2}{x}$

4. (a) $f(w) = 2\tan^{-1}\frac{1}{w}$ **(b)** $F(x) = x\cos^{-1} x$

5. (a) $f(x) = \cos^{-1}(sen\ x)$

(b) $h(x) = 4\sin^{-1}\frac{1}{2}x\ + x\sqrt{4-x^2}$

6. (a) $h(x) = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

(b) $g(x) = \sec^{-1}\sqrt{x^2+4}$

7. (a) $f(x) = x\tan^{-1} x\ -\ \ln\sqrt{1-x^2}$

(b) $g(x) = \sec^{-1}(2e^{3x})$

8. (a) $f(x) = x\sin^{-1} x\ +\ \ x\cos^{-1} x$

(b) $f(t) = \csc^{-1}\sqrt{t}$

Solucionario

1. (a) $F'(x)=\frac{d}{dx}(2\cos^{-1}\sqrt{x})=2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)\frac{d}{dx}\sqrt{x}=-\frac{2}{\sqrt{1-x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

(b) $g'(t)=\frac{d}{dx}(\sec^{-1}5t+\csc^{-1}5t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\pi\right)=0$

2. (a) $g(x)=\frac{1}{2}\sin^{-1}e^x$; $(\boldsymbol{b})$ $f(y)=tan^{-1}\ y^2+\cot^{-1}y^2$

(a) $g'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}D_x(e^x)=\frac{e^x}{2\sqrt{1-e^{2x}}}$ $\quad(b) B_y\ Definition\ 5.7.9, f(y)=\frac{1}{2}\pi\ and\ so\ f=(y)=0$

3. (a) $f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)=-\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$

(b) $G'(x)=\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}\frac{2}{x}\right)=\frac{-1}{1+(\frac{2}{x})^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2}{x^2+4}$

4. (a) $f'(w)=\frac{d}{dw}(2\tan^{-1}\frac{1}{w})=2\frac{1}{1+(\frac{1}{w})^2}\left(-\frac{1}{w^2}\right)=-\frac{2}{w^2+1}$

(b) $F'(x)=\frac{d}{dx}(x\cos^{-1}x)=1\cdot\cos^{-1}x+x\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\cos^{-1}x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

5. (a) $f'(x)=\frac{d}{dx}\cos^{-1}(\sin x)=-\frac{1}{\sqrt{1-sin^2x}}(\cos x)=-\frac{\cos x}{|\cos x|}$

(b) $f'(x)=\frac{d}{dx}\left(4\sin^{-1}\frac{1}{2}x+x\sqrt{4-x^2}\right)=\frac{4}{\sqrt{1-x^2/4}}\left(\frac{1}{2}\right)+\sqrt{4-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$

$=\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}+\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}}+\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{4-x^2}=2\sqrt{4-x^2}$

6. (a) $h(x)=tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$; $\quad(\boldsymbol{b})$ $g(x)=sec^{-1}\sqrt{x^2+4}$

(a) $h'(x)=\frac{1}{1+[2x/(1-x^2)]\wedge 2}D_x\frac{2x}{1-x^2}=\frac{1}{1+4x^2/(1-x^2)}\cdot\frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2+4x^2}=\frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{1+x^2}$

$Or, because\ h(x)=2tan^{-1}x+K\pi, where\ k=0\ if\ x^2<1\ and\ k=sgn(x)\ if\ x^2>1, then\ h'(x)=\frac{2}{1+x^2}$

(b) $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4\sqrt{(x^2+4)-1}}}\cdot D_x\sqrt{x^2+4}=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2+3}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+3}}$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

7. (a) $\frac{d}{dx}\left(xtan^{-1}x - ln\sqrt{1+x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left[xtan^{-1}x - \frac{1}{2}ln(1+x^2)\right] = 1 \cdot tan^{-1}x + x \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} = \tan^{-1} x$

(b) $g'(x) = \frac{d}{dx}sec^{-1}(2e^{3x}) = \frac{1}{2e^{3x}\sqrt{(2e^{3x})^2-1}} \cdot \frac{d}{dx}(2e^{3x}) = \frac{6e^{3x}}{2e^{3x}\sqrt{4e^{6x}-1}} = \frac{3}{\sqrt{4e^{6x}-1}}$

8. (a) $f'(x) = D_x(x\sin^{-1}x + \cos^{-1}x) = D_x(\frac{1}{2}\pi x) = \frac{1}{2}\pi$

(b) $f'(x) = D_x \csc^{-1}\sqrt{x} = \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}} \cdot D_x\sqrt{x} = \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{2x\sqrt{x-1}}$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1. **Teorema Derivada de la función seno**

$D_x(senx) = cosx$

2. **Teorema Derivada de la función coseno**

$D_x(cos\ x) = -sen\ x$

3. **Teorema Derivada de la función tangente**

$D_x(tan\ x) = sec^2\ x$

4. **Teorema Derivada de la función cotangente**

$D_x(cot\ x) = -csc^2\ x$

5. **Teorema Derivada de la función secante**

$D_x(sec\ x) = sec\ x\ tan\ x$

6. **Teorema Derivada de la función cosecante**

$D_x(csc\ x) = -csc\ x\ cot\ x$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Problemas

Calcule la derivada de la función

1. $f(x) = 4\, sec\, x\ - 2\, csc\, x$

2. $f(x) = x^2 sen\, x + 2x\, cos\, x$

3. $f(x) = x^2 cos\, x - 2x\, sen\, x - 2\, cos\, x$

4. $h(y) = y^3 - y^2 cos\, y + 2y\, sen\, y + 2\, cos\, y$

5. $f(x) = 3\, sen\, x\, tan\, x$

Obtenga la derivada:

6. $D_z\left(\frac{2\, cos\, z}{z+1}\right)$

7. $\frac{d}{dt}\left(\frac{tan\, t}{cos\, t - 4}\right)$

8. $\frac{d}{dy}\left(\frac{1 + sen\, y}{1 - sen\, y}\right)$

9. $\frac{d}{dx}\left(\frac{sen\, x - 1}{cos\, x + 1}\right)$

10. $D_z[(z^2 + \ cos\, z)(2z\ -\ sen\, z)]$

11. $D_t\left(\frac{2\, csc\, t - 1}{csc\, t + 2}\right)$

12. $D_y\left(\frac{tan\, y + 1}{tan\, y - 1}\right)$

Obtenga el valor de $\boldsymbol{f'(a)}$

13. $f(x) = x^2\, cos\, x - sen\, x; a = 0$

14. $f(x) =\ (cos\, x\ + 1)(x\, sen\, x\ -\ 1);\ \ a = \frac{1}{2}\pi$

15. $f(x) = \frac{1}{cot\, x - 1};\ \ a = \frac{3}{4}\pi$

Solucionario

1. $f'(x) = D_x(4\, sec\, x - 2\, csc\, x) = 4\, sec\, x\, tan\, x + 2\, csc\, x\, cot\, x$

2. $f(x) = x^2 sinx + 2xcosx$

$f'(x) = D_x(x^2 sin\, x) + D_x(2x\, cos\, x) = x^2 \cdot D_x(sin\, x) + sinx \cdot D_x(x^2) + 2x \cdot D_x(cos\, x) + cos(x) \cdot D_x(2x) = x^2 cos\, x + 2x\, sin\, x - 2x\, sin\, x + 2\, cos\, x = x^2\, cos\, x + 2\, cos\, x$

3. $f'(x) = D_x\left(x^2 cosx - 2xsinx - 2cosx\right)$

$= [x^2(-sin\, x) + 2x\, cos\, x] - (2x\, cos\, x + 2\, sin\, x) + 2\, sin\, x = -x^2\, sin\, x$

4. $h'(y) = D_y(y^3 - y^2 cos\, y + 2y\, sin\, y + 2\, cos\, y)$

$= 3y^2 - [2y\, cos\, y + y^2(-\, sin\, y)] + (2\, sin\, y + 2y\, cos\, y) - 2\, sin\, y = 3y^2 + y^2 sin\, y$

5. $f'(x) = D_x(3\, sec\, x\, tan\, x) = 3[(sec\, x\, tan\, x)tan\, x + sec\, x(sec^2 x)] = 3\, sec\, x(tan^2 x + sec^2 x)$

Obtenga la derivada:

6. $D_z\left(\frac{2\, cos\, z}{z+1}\right) = \frac{\boldsymbol{(z+1)(-2\, sin\, z) - 2\, cos\, z - 1}}{\boldsymbol{(z+1)^2}} = \boldsymbol{-2\frac{(z+1)sin\, z + cos\, z}{(z+1)^2}}$

7. $\frac{d}{dt}\left(\frac{tan\, t}{cos\, t - 4}\right) = \frac{\boldsymbol{(cos\, t - 4)sec^2 t - tan\, t\,(-\, sin\, t)}}{\boldsymbol{(cos\, t - 4)^2}} = \frac{\boldsymbol{sec\, t - sec^2 t + tan\, t\, sin\, t}}{\boldsymbol{(cos\, t - 4)^2}} = \frac{\boldsymbol{1 - 4\, sec\, t - sin^2 t}}{\boldsymbol{cos\, t\,(cos\, t - 4)^2}}$

8. $\frac{d}{dy}\left(\frac{1 + sen\, y}{1 - sen\, y}\right) = \frac{\boldsymbol{(1 - sin\, y)(cos\, y) - (1 + sin\, y)(-cos\, y)}}{\boldsymbol{(1 - sin\, y)^2}} = \frac{\boldsymbol{cos\, y - sin\, y\, cos\, y + cos\, y + sin\, y\, cos\, y}}{\boldsymbol{(1 - sin\, y)^2}} = \frac{\boldsymbol{2\, cos\, y}}{\boldsymbol{(1 - sin\, y)^2}}$

9. $\frac{d}{dx}\left(\frac{sen\, x - 1}{cos\, x + 1}\right) = \frac{\boldsymbol{cos\, x(cos\, x + 1) - (sin\, x - 1)(-sin\, x)}}{\boldsymbol{(cos\, x + 1)^2}} = \frac{\boldsymbol{cos^2 x + cos\, x + sin^2 x - sin\, x}}{\boldsymbol{(cos\, x + 1)^2}} = \frac{\boldsymbol{1 + cos\, x - sin\, x}}{\boldsymbol{(cos\, x + 1)^2}}$

10. $D_z[(z^2 + cos\, z)(2z - sen\, z)]$

- Applying the producto rule, we obtain

$$D_z[(z^2 + \cos z)(2z - sen\, z)]$$
$$= (z^2 + \cos z)D_z(2z - \sin z) + (2z - \sin z)D_z(z^2 + \cos z)$$
$$= (z^2 + \cos z)(2 - \cos z) + (2z - \sin z)(2z - \sin z)$$
$$= (z^2 + \cos z)(2 - \cos z) + (2z - \sin z)^2$$

11. $D_t\left(\frac{2\csc t - 1}{\csc t + 2}\right) = \frac{(\csc t + 2)(-2\csc t \cot t) - (2\csc t - 1)(-\csc t \cot t)}{(\csc t + 2)^2}$

$$= \frac{-2\csc^2 t \cot t - 4\csc t \cot t + 2\sec^2 t \cot t - \sec t \cot t}{(\csc t + 2)^2} = \frac{-5\csc t \cot t}{(\csc t + 2)^2}$$

Alternatively, $D_t\left(\frac{2\csc t - 1}{\csc t + 2}\right) = D_t\left(\frac{2 - \sin t}{1 + 2\sin t}\right) = \frac{(1 + 2\sin t)(-\cos t) - (2 - \sin t)(2\cos t)}{(1 + 2\sin t)^2}$

$$= \frac{-\cos t - 2\sin t \cos t - 4\cos t + 2\sin t \cos t}{(1 + 2\sin t)^2} = \frac{-5\cos t}{(1 + 2\sin t)^2}$$

12. $D_y\left(\frac{\tan y + 1}{\tan y - 1}\right) = \frac{\sec^2 y\,(\tan y - 1) - (\tan y + 1)\sec^2 y}{(\tan y - 1)^2} = \frac{-2\sec^2 y}{(\tan y - 1)^2}$

Obtenga el valor de $f'(a)$

13. $f(x) = x^2 \cos x - sen\, x;\quad a = 0$

$$f'(x) = x^2 \cdot D_x \cos x + \cos x \cdot D_x x^2 - D_x \sin x = -x^2 \sin x + 2x\cos x - \cos x$$

Thus, with x = 0, we have

$$f'(0) = -0^2(\sin 0) + 2(0)\cos 0 - \cos 0 = -1$$

14. $f(x) = (\cos x + 1)(x\, sen\, x - 1);\ f'(x) = -\sin x\,(x \sin x - 1) + (\cos x + 1)(\sin x + x\cos x)$

$$f'(\tfrac{1}{2}\pi) = -(\tfrac{1}{2}\pi - 1) + 1 = 2 - \tfrac{1}{2}\pi \approx 0.4292037.$$

15. $f(x) = \frac{1}{\cot x - 1};\ f'(x) = \frac{0 - (-\csc^2 x)}{(\cot x - 1)^2};\ f'(\tfrac{3}{4}\pi) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$

DERIVADAS DE LA FUNCIÓN POTENCIA PARA EXPONENTES RACIONALES Y DIFERENCIA IMPLÍCITA

1. **Teorema Regla de diferenciación de la función potencia (para exponentes racionales)**

Si f es la función potencia definida por $f(x) = x^r$, donde r es cualquier número racional, entonces f es diferenciable y

$$f'(x) = rx^{r-1}$$

Para obtener $f'(0)$ a partir de esta fórmula, r debe ser un número tal que x^{r-1} esté definido en algún intervalo abierto que contenga a 0.

- **Ejemplo 1** Calcule $f'(x)$ si

$$\boldsymbol{f(x)} = 4\sqrt[3]{x^2}$$

Solución Del teorema 2.9.1 con $f(x) = 4x^{2/3}$ se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathbf{4} \cdot \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\left(\boldsymbol{x^{2/3-1}}\right) \\ &= \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x^{-1/3}} \\ &= \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}\boldsymbol{x^{1/3}}} \\ &= \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}} \end{aligned}$$

2. **Teorema**

Si f y g son dos funciones tales que $f(x) = [g(x)^r]$, donde r es cualquier número racional, y si $g'(x)$ existe, entonces f es diferenciable, y

$$f'(x) = r[g(x)]\wedge r - 1\ g'(x)$$

- **Ejemplo 2** Determine $f'(t)$ si

$$\boldsymbol{f(x)} = \sqrt{4\, sen^2\, t\ +\ 9\, cos^2\, t}$$

Solución Se escribe $f(t) = (4\,sen^2\,t\ + 9\,cos^2\,t)^{1/2}$ y se aplica el teorema 1

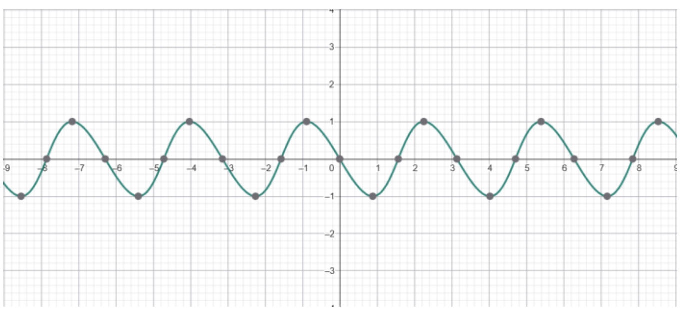
$$f(x) = \frac{1}{2}(4\,sen^2\,t\ + 9\,cos^2\,t)^{-1/2} \cdot\ D_t\,(4\,sen^2\,t\ + 9\,cos^2\,t)$$

$$= \frac{8\,sen\,t\ \cdot D_t\,(sen\,t)\ +\ 18\,cos\,t\ \cdot D_t\,(cos\,t)}{2\sqrt{4\,sen^2\,t\ + 9\,cos^2\,t}}$$

$$= \frac{8\,sen\,t\,cos\,t\ +\ 18\,cos\,t\,(-\,sen\,t)}{2\sqrt{4\,sen^2\,t\ + 9\,cos^2\,t}}$$

$$= \frac{-\,10\,sen\,t\,cos\,t}{2\sqrt{4\,sen^2\,t\ + 9\,cos^2\,t}}$$

$$= -\frac{5\,sen\,t\,cos\,t}{\sqrt{4\,sen^2\,t\ + 9\,cos^2\,t}}$$



$[-6, 6]\ por\ [4, 4]$

$$f'(t)\ \ = -\frac{5\,sen\,t\,cos\,t}{\sqrt{4\,sen^2\,t\ + 9\,cos^2\,t}}$$

- **Ejemplo ilustrativo 1** Considere la ecuación

  $$\boldsymbol{3x^4y^2\ -\ 7xy^3\ = 4\ - 8y} \qquad \textbf{(12)}$$

y suponga que existe al menos una función diferenciable f tal que si $y = f(x)$, entonces la ecuación (12) se satisface. Al diferenciar amos miembros de (12) (teniendo en mente que y es una función diferenciable de x) y aplicando la regla del producto, la regla de la potencia y la regla de la cadena se obtiene

$$12x^3y^2 + 3x^4(2yD_xy) - 7y^3 - 7x(3y^2D_xy) = 0 - 8\,D_xy$$

$$D_xy\,(6x^4y - 21xy^2 + 8) = 7y^3 - 12x^3y^2$$

$$D_xy = \frac{7y^3 - 12x^3y^2}{6x^4y - 21xy^2 + 8}$$

- **Ejemplo 4** Dada $x\cos y + y\cos x - 1 = 0, calcule\ \frac{dy}{dx}$

Solución Al diferenciar implícitamente con respecto a x se tiene

$$1 \cdot \cos y + x(-sen\,y)\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}(\cos x) + y\,(-sen\,x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(\cos x - x\,sen\,y) = y\,sen\,x - \cos y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\,sen\,x - \cos y}{\cos x - x\,sen\,y}$$

- **Ejemplo 5** Dado que

$\boldsymbol{4x^2 + 9y^2 = 36}$

determine $\frac{d^2y}{dx^2}$ mediante diferenciación implícita.

Solución Al diferenciar implícitamente con respecto a x se tiene

$$\boldsymbol{8x} + 18y\frac{dy}{dx} = \boldsymbol{0}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\boldsymbol{4x}}{\boldsymbol{9y}} \qquad \textbf{(13)}$$

Para calcular $\frac{d^2y}{dx^2}$ se obtiene la derivada de un cociente teniéndose en mente que y es una función de x. Así,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\boldsymbol{9y\,(-4) - (-4x)\,(9 \cdot}\frac{dy}{dx}\boldsymbol{)}}{\boldsymbol{81y^2}}$$

Si se sustituye el valor de $\frac{dy}{dx}$ de (13) en esta ecuación se obtiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-36y \ + (36x)\ \frac{-4x}{9y}}{81y^2}$$

$$= \frac{-36y^2 - 16x^2}{81y^3}$$

$$= \frac{-4(9y^2 - 4x^2)}{81y^3}$$

Puesto que cualesquiera valores de x y y que satisfacen esta ecuación deben también satisfacer la ecuación original, entonces se puede sustituir $9y^2 + 9x^2$ por 36 para obtener

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4(36)}{81y^3}$$

$$= -\frac{16}{9y^3}$$

Problemas

1. $f(x) = 3x^{2/3} - 6x^{1/3} + x^{-1/3}$

2. $f(x) = (5 - 3x)^{-1/3}$

3. $g(x) = \sqrt[3]{4x^2 - 1}$

4. $f(x) = (5 - 2x^2)^{-1/3}$

5. $f(x) = 4\, sec\, \sqrt{x}$

6. $g(x) = \sqrt{3\, sen\, x}$

7. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{cos\, x - 1}{sen\, x}}\right)$

8. $D_x\left(\sqrt{9 + \sqrt{9 - x}}\right)$

9. $D_x\left(\sqrt{x}\ \ tan\, \sqrt{\frac{1}{x}}\right)$

10. $x^3 + y^3 = 8xy$

11. $\frac{3}{x} - \frac{3}{y} = 2x$

12. $x^2y^2 = x^2 + y^2$

13. $(2x + 3)^4 = 3y^4$

14. $x = sen(x + y)$

15. $cot\, xy\ +\ xy = 0$

16. $cos(x + y) = y\, sen\, x$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Solucionario

1. $f(x) = D_x(3x^{2/3} - 6x^{1/3} + x^{-1/3}) = \frac{2}{3} \cdot 3x^{-1/3} - \frac{1}{3} \cdot 6x^{-2/3} - \frac{1}{3}x^{-4/3} = 2x^{-1/3} - 2x^{-2/3} - \frac{1}{3}x^{-4/3}$

2. $f'(x) = D_x(5 - 3x)^{2/3} = \frac{2}{3}(5 - 3x)^{-1/3}(-3) = -2(5 - 3x)^{-1/3}$

3. $g'(x) = D_x(\sqrt[3]{4x^2 - 1}) = D_x(4x^2 - 1)^{1/3} = \frac{1}{3}(4x^2 - 1)^{-2/3} \cdot D_x(4x^2 - 1) = \frac{8}{3}x(4x^2 - 1)^{-2/3}$

4. $f(x) = (5 - 2x^2)^{-1/3}$

- We apply Theorem 1 Thus,
  $f'(x) = -\frac{1}{3}(5 - 2x^2)^{-(1/3)-1}D_x(5 - 2x^2) = -\frac{1}{3}(5 - 2x^2)^{-4/3}(-4x) = \frac{4}{3}x(5 - 2x^2)^{-4/3} = \frac{4x}{3(5 - 2x^2)^{4/3}}$

5. $f'(x) = D_x(4\, sec\, \sqrt{x}) = 4\, sec\, \sqrt{x}\ \ tan\, \sqrt{x}\, D_x(x^{1/2}) = 4\, sec\, \sqrt{x}\, tan\, \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} = 2\, sec\, \sqrt{x}\ tan\ \sqrt{x}/x$

6. $g(x) = \sqrt{3\, sen\, x}$

- We introduce a fractional exponent and then use Theorem 1

$$g(x) = \sqrt{3}\,\sqrt{sin\, x} = \sqrt{3}\,(sin\, x)^{1/2}$$

$$g'(x) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)(sin\, x)^{-1/2}D_x sin\, x = \frac{\sqrt{3}\, cos\, x}{2\sqrt{sin\, x}}$$

7. $\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{cos\, x - 1}{sin\, x}} = \frac{d}{dx}(\frac{cos\, x - 1}{sin\, x})^{1/2} = \frac{1}{2}(\frac{cos\, x - 1}{sin\, x})^{-1/2}\frac{(-\, sin\, x)\, sin\, x - (cos\, x - 1)\, cos\, x}{sin^2 x} = \frac{1}{2}(\frac{sin\, x}{cos\, x - 1})^{1/2}\frac{cos\, x - 1}{sin^2 x}$

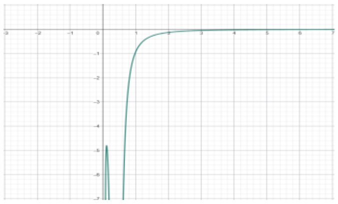
$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{cos\, x - 1}{sin^3 x}}$, *Note that* $\frac{\sqrt{cos\, x - 1}}{2\, sin^{3/2} x}$ *is incorrect because* $\sqrt{cos\, x\, -\, 1}$ *does not exist.*

8. $D_x\left(\sqrt{9 + \sqrt{9 - x}}\right) = D_x\{[9 + (9 - x)^{1/2}]^{1/2}\} = \frac{1}{2}\,[9 + (9 - x)^{1/2}]^{-1/2}D[9 + (9 - x)^{1/2}]$

$= \frac{1}{2}[9 + (9 - x)^{1/2}]^{-1/2}[\frac{1}{2}(9 - x)^{-1/2}(-1)] = \frac{-1}{4\sqrt{9 + \sqrt{9 - x}}\,\sqrt{9 - x}}$

9. $D_x\left(\sqrt{x}\ \ tan\,\sqrt{\frac{1}{x}}\right)$

- $= D_x(x^{1/2}\ tan\ x^{-1/2}) = x^{1/2} D_x\ tan\ x^{-1/2} +\ tan\ x^{-1/2} D_x(x^{1/2})$



$= \ x^{1/2}\ sec^2\ x^{-1/2}(-\frac{1}{2}x^{-3/2}) + tan\ x^{-1/2}(\frac{1}{2}x^{-1/2})$

$= \frac{1}{2}x^{-1}\left(-sec^2 x^{-1/2} tanx^{-1/2}\right)$

$= \frac{-sec^2\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{x}\ tan\ \sqrt{\frac{1}{x}}}{2x}$

10. $x^3 + y^3 = 8xy;\ 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 8y + 8x\frac{dy}{dx};\ \frac{dy}{dx}(3y^2 - 8x) = 8y - 3x^2; \frac{dy}{dx} = \frac{8y - 3x^2}{3y^2 - 8x}$

11. $\frac{3}{x} - \frac{3}{y} = 2x;\ 3x^{-2} - 3y^{-2}\frac{dy}{dx} = 2;\ \frac{dy}{dx} = \frac{3x^{-2} - 2}{3y^{-2}} = \frac{3y^2 - 2x^2y^2}{3x^2}$

12. $x^2y^2 = x^2 + y^2;\ 2xy^2 + 2x^2y\frac{dy}{dx} = 2x + 2y\frac{dy}{dx};\ \frac{dy}{dx}(2x^2y\ -\ 2y) = 2x\ -\ 2xy^2;\ \frac{dy}{dx} = \frac{2x - 2xy^2}{2x^2y - 2y} = \frac{x - xy^2}{x^2y - y}$

13. $(2x + 3)^4 = 3y^4;\ 4(2x\ + 3)^3 = 12y^3\frac{dy}{dx};\ \frac{dy}{dx} = \frac{(2x + 3)^3}{3y^3}$

14. $x = sen(x + y)$

- Differentiating with respect to x, we have

$$1 =\ cos\ (x + y)\ D_x(x + y)$$

$$1 = cos(x + y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$

$$1 =\ cos\ (x + y)\ + cos(x + y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$1 - cos\ (x + y) =\ cos\ (x + y)\ \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - cos\ (x + y)}{cos\ (x + y)}$$

15. $cotxy + xy = 0; (-csc^2xy + 1)\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) = 0;\ \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

Alternatively, $xy = k, where\ k\ is\ one\ of\ the\ roots\ of\ cot\ k + k = 0;\ y = \frac{k}{x}, \frac{dy}{dx} = \frac{k}{x^2} = -\frac{y}{x}$

16. $cos(x + y) = y\ sen\ x$

- We differentiate on both sides with respect to x.

$$-sin(x + y)D_x(x + y) = yD_x(sinx) + sinxD_xy$$

$$-sin\ (x + y)(1 + \frac{dy}{dx}) = y\ cos\ x + sin\ x\ \frac{dy}{dx}$$

$$-sin\ (x + y) - sin\ (x + y)\frac{dy}{dx} = y\ cos\ x + sin\ x\ \frac{dy}{dx}$$

$$[sin\ (x + y) + sin\ x]\frac{dy}{dx} = y\ cos\ x\ +\ sin\ (x + y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\ cos\ x +\ sin(x + y)}{sin\ x\ +\ sin(x + y)}$$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

FUNCIÓN LOGARÍTMICA NATURAL

1. Teorema

Si u es una función diferenciable de x y $u(x) > 0$, entonces

$$D_x(ln\, u) = \frac{1}{u} \cdot D_x u$$

- **Ejemplo 1** Calcule $\frac{dy}{dx}$ si

$$y = ln\,[(4x^2+3)(2x-1)]$$

Solución Al aplicar el teorema 5.2.2, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(4x^2+3)(2x-1)} \cdot [8x\,(2x-1) + 2(4x^2+3)]$$

$$= \frac{24x^2-8x+6}{(4x^2+3)(2x-1)} \qquad \textbf{(15)}$$

- **Ejemplo 2** Determine $\frac{dy}{dx}$ si

$$y = ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

Solución Del teorema 5.2.2,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x+1}{x} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{x(x+1)}}$$

- **Ejemplo 3** Calcule $f'(x)$ si

$$f(x) = ln(2x - 1)^3$$

Solución Del teorema 5.2.6,

$$f(x) = 3\,ln(2x - 1)$$

Observe que tanto $ln(2x - 1)^3$ como $3\,ln(2x - 1)$ tienen el mismo dominio: $x > 0.5$. Al aplicar el teorema 5.2.2 se tiene

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2x - 1} \cdot 2$$

$$= 3 \cdot \frac{6}{2x - 1}$$

Problemas

Derive la función y simplifique el resultado.

1. $h(x) = ln(8 - 2x)^5$

2. $g(t) = ln^2(3t + 1)$

3. $f(x) = ln\sqrt[3]{4 - x^2}$

4. $g(y) = ln(ln\, y)$

5. $F(y) = ln(sen\, 5y)$

6. $f(x) = x\, ln\, x$

7. $G(x) = ln(sec2x + tan2x)$

8. $h(y) = csc(ln\, y)$

9. $f(t) = ln\sqrt[4]{\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}}$

10. $f(t) = \sqrt[3]{ln\, x^3}$

11. $F(x) = \sqrt{x + 1} - ln\left(1 + \sqrt{x + 1}\right)$

12. $G(x) = x\, ln(x + \sqrt{1 + x^2)} - \sqrt{1 + x^2}$

Solucionario

1. $h'(x) = \frac{d}{dx}[ln(8-2x)^5] = \frac{d}{dx}[5\,ln(8-2x)] = 5 \cdot \frac{1}{8-2x}(-2) = \frac{-10}{8-2x} = \frac{5}{x-4}$

2. $g'(t) = \frac{d}{dt}[ln^2(3t+1)] = 2ln(3t+1)\frac{d}{dt}[ln(3t+1)] = 2ln(3t+1) \cdot \frac{1}{3t+1} \cdot 3 = \frac{6ln(3t+1)}{3t+1}$

3. $f'(x) = \frac{d}{dx}\left[ln\sqrt[3]{4-x^2}\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}\,ln(4-x^2)\right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4-x^2}(-2x) = \frac{2x}{12-3x^2}$

4. $g'(y) = \frac{d}{dx}\,ln(ln\,y) = \frac{1}{ln\,y} \cdot \frac{d}{dy}\,ln\,y = \frac{1}{y\,ln\,y}$

5. $F'(y) = \frac{d}{dy}[ln(sin\,5y)] = \frac{1}{sin\,5y}\frac{d}{dy}(sin\,5y) = 5\frac{cos\,5y}{sin\,5y} = 5\,cos5y$

6. $f(x) = x\,ln\,x$

- **We apply the derivative of produce rule.**

  $\boldsymbol{f'(x) = x \cdot D_x(ln\,x) + ln\,x \cdot D_x x = x\left(\frac{1}{x}\right) + ln\,x = 1 + ln\,x}$

7. $G'(x) = \frac{d}{dx}ln(sec\,2x + tan\,2x) = \frac{1}{sec\,2x + tan\,2x}\frac{d}{dx}(sec\,2x + tan\,2x)$

$\boldsymbol{= \frac{1}{sec\,2x + tan\,2x}[sec\,2x\,tan\,2x(2) + sec^2 2x(2)] = \frac{2\,sec\,2x(tan\,2x + sec\,2x)}{sec\,2x + tan\,2x} = 2\,sec\,2x}$

8. $h(y) = csc(ln\,y)$

- $h'(y) = -csc(ln\,y)\,cot(ln\,y)D_y(ln\,y) = \frac{-csc(ln\,y)\,cot(ln\,y)}{y}$

9. $f'(t) = \frac{d}{dt}ln\sqrt[4]{\frac{t^2-1}{t^2+1}} = \frac{d}{dt}\frac{1}{4}[ln(t^2-1) - ln(t^2+1)] = \frac{1}{4}\left[\frac{2t}{t^2-1} - \frac{2t}{t^2+1}\right] = \frac{t}{t^4-1}$

10. $f(t) = \sqrt[3]{ln\, x^3}$

- By Theorem 5.2.6, $\boldsymbol{ln\, x^3 = 3\ ln\, x, Thus,}$

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt[3]{ln\, x^3} = \sqrt[3]{3\ ln\, x} = \sqrt[3]{3}\ (ln\, x)^{1/3}}$$

Therefore,

$$\boldsymbol{f'(x) = \sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{3}\right)(ln\, x)^{-2/3} D_x(ln\, x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{3}(ln\, x)^{-2/3}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sqrt[3]{3}}{3x\ (ln\, x)^{2/3}}}$$

11. $F'(x) = \sqrt{x\ +\ 1} - ln\left(1 + \sqrt{x+1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{\left(1+\sqrt{x+1}\right)-1}{2\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$

$= \boldsymbol{\frac{1}{2\left(1+\sqrt{x+1}\right)}}$

12. $G(x) = \ x\ ln(x\ + \sqrt{1+x^2)}\ - \sqrt{1+x^2}$

$$\boldsymbol{= 1 \cdot ln\left(x + \sqrt{1\ + x^2}\right) + x \cdot \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(2x)}$$

$$\boldsymbol{= ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$$

$$\boldsymbol{= ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+\ x^2}} = ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}$$

DIFERENCIACIÓN LOGARÍTMICA E INTEGRALES QUE PRODUCEN FUNCIONES LOGARÍTMICAS NATURALES

1 Teorema

Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$D_x(ln|u|) = \frac{1}{u} \cdot D_x u$$

- **Ejemplo 2** Calcule $\frac{dy}{dx}$ si

$$y = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}$$

Solución De la ecuación dada,

$$|y| = \left|\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}\right|$$

$$= \frac{\left|\sqrt[3]{x+1}\right|}{|x+2|\,\left|\sqrt{x+3}\right|}$$

Si se toma el logaritmo natural en los dos miembros de la ecuación anterior y se aplican las propiedades de logaritmos, se obtiene

$$ln|y| = \frac{1}{3} ln|x+1| - ln\,|x+2| - \frac{1}{2} ln|x+3|$$

Al diferenciar implícitamente ambos miembrosde esta ecuación con respeto a x y al aplicar el teorema 5.3.1 se tiene

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2(x+3)}$$

Si se multiplican los dos miembros de la ecuación anterior por y se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{2(x+2)(x+3)-6(x+1)(x+3)-3(x+1)(x+2)}{6(x+1)(x+2)(x+3)}$$

Al sustituir y por su valor resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)^{1/3}}{(x+2)(x+3)^{1/2}} \cdot \frac{2x^2+10x+12-6x^2-24x-18-3x^2-9x-6}{6(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{-7x^2-23x-12}{6(x+1)^{2/3}(x+2)^2(x+3)^{3/2}}$$

Problemas

Obtenga $\frac{dy}{dx}$ mediante diferenciación logaritmica.

1. $y = x^2(x^2 - 1)^3(x + 1)^4$

2. $y = (5x - 4)(x^2 + 3)(3x^3 - 5)$

3. $y = \frac{x^2(x-1)^2(x+2)^3}{(x-4)^5}$

4. $y = \frac{x^5(x+2)}{x-3}$

5. $y = \frac{x^3 + 2x}{\sqrt[5]{x^7 + 1}}$

6. $y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{(x+1)^{2/3}}$

Solucionario

Find dy/dx by logarithmic differentiation

1. $y = x^2(x^2-1)^3(x+1)^4 = x^2(x-1)^3(x+1)^7;\ |y| = |x|^2\,|x-1|^3\,|x+1|^7$

$ln|y| = 2\,ln|x| + 3\,ln|x-1| + 7\,ln|x+1|; \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{7}{x+1}$

$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{2(x-1)(x+1)+3x(x+1)+7x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}\right] = x^2(x-1)^3(x+1)^7 \cdot \frac{12x^2-4x-2}{x(x-1)(x+1)}$

$= 2x(x-1)^2(x+1)^6(6x^2-2x-1)$

2. $y = (5x-4)(x^2+3)(3x^3-5); |y| = |5x-4||x^2+3||3x^3-5|; \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{5}{5x-4} + \frac{2x}{x^2+3} + \frac{9x^2}{3x^3-5}$

$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{5(x^2+3)(3x^3-5)+2x(5x-4)(3x^3-5)+9x^2(5x-4)(x^2+3)}{(5x-4)(x^2+3)(3x^3-5)}\right] =$

$(5x-4)(x^2+3)(3x^3-5) \cdot \frac{90x^5-60x^4+180x^3-183x^2+40x-75}{(5x-4)(x^2+3)(3x^3-5)} = 90x^5-60x^4+180x^3-183x^2+40x-75$

Because this problem does not involve exponents, the easiet methob is to multiply out before differentiating

3. $y = \frac{x^2(x-1)^2(x+2)^3}{(x-4)^5}; |y| = \frac{|x^2||x-1|^2|x+2|^3}{|x+4|^5}$

$ln|y| = 2\,ln|x| + 2\,ln|x-1| + 3\,ln|x+2| - 5\,ln\,|x-4|; \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2} - \frac{5}{x-4}$

$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2} - \frac{5}{x-4}\right)$

$= \frac{x^2(x-1)^2(x+2)^3}{(x-4)^5} \cdot \frac{2(x-1)(x+2)(x-4)+2x(x+2)(x-4)+3x(x-1)(x-4)-5x(x-1)(x+2)}{x(x-1)(x+2)(x-4)}$

$= \frac{x(x-1)(x+2)^2}{(x-4)^6}(2x^3-30x^2-6x+16)$

4. $y = \frac{x^5(x+2)}{x-3}$

- Bacause the domain of the natural logarithmic function is the set of alla positive numbers, we fist take the absolute value of cach side, and then take the natural logarithm of earch side and apply the laws of logarithmic to simplify the right – hand side.

  $|y| = \left|\frac{x^5(x+2)}{(x-3)}\right|; \qquad ln|y| = 5\,ln|x| + ln|x+2| - ln|x-3|$

We differentiate on both sides implicitly with respect to x, applying Theorem 5.3.1.

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{5}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-3}=\frac{5(x+2)(x-3)+x(x-3)-x(x+2)}{x(x+2)(x-3)}=\frac{5x^2-10x-30}{x(x+2)(x-3)}$$

Because $y=x^5\,(x+2)/(x-3),\ if\ we\ multiply\ on\ both\ sides\ by\ y\ we\ obtain$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^5(x+2)}{x-3}\cdot\frac{5\left(x^2-2x-6\right)}{x(x+2)(x-3)}=\frac{5x^4\left(x^2-2x-6\right)}{(x-3)^2}$$

5. $y=\frac{x^3+2x}{\sqrt[5]{x^7+1}};\ |y|=\frac{|x^3+2x|}{|x^7+1|^{1/5}};\ ln|y|=ln|x^3+2x|-\frac{1}{5}\ ln|x^7+1|;\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+2}{x^3+2x}-\frac{7x^6}{5(x^7+1)}$

$$\frac{dy}{dx}=y\cdot\frac{5\left(3x^2+2\right)\left(x^7+1\right)-7x^6\left(x^3+2x\right)}{5(x^3+2x)(x^7+1)}=\frac{x^3+2x}{(x^7+1)^{1/5}}\cdot\frac{15x^9+10x^7+15x^2+10-7x^9-14x^7}{5(x^3+2x)(x^7+1)}$$

$$=\frac{8x^9-4x^7+15x^2+10}{5(x^7+1)^{6/5}}$$

6. $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{(x+1)^{2/3}}=\frac{(1-x)^{1/2}(1+x)^{1/2}}{(x+1)^{2/3}}=(1-x)^{1/2}(1+x)^{-1/6};\ ln\ y=\frac{1}{2}ln(1-x)-\frac{1}{5}ln(1+x)$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{6}\frac{1}{1+x};\frac{dy}{dx}=y\cdot\frac{-3(1+x)-(1-x)}{6(1-x)(1+x)}=(1-x)^{1/2}(1+x)^{-1/6}\frac{-2(x+2)}{6(1-x)(1+x)}$$

$$=-\frac{x+2}{3\,(1-x)^{1/2}(1+x)^{7/6}}$$

FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

1 Teorema

Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$\boldsymbol{D_x(e^u) = e^u D_x u}$$

- **Ejemplo 1** Calcule dy/dx si
  $\boldsymbol{y = e^{1/x^2}}$

Solución Del teorema 1,

$$\frac{dy}{dx} = e^{1/x^2}\left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

$$= -\frac{2e^{1/x^2}}{x^3}$$

- **Ejemplo 2** Obtenga dy/dx si
  $\boldsymbol{y = e^{2x + \ln x}}$

Solución Como $e^{2x + \ln x} = e^{2x}e^{\ln x}$ y $e^{\ln x} = x,$ entonces

$$y = xe^{2x}$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} + 2xe^{2x}$$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Problemas

Determine $\frac{dy}{dx}$, y apoye la respuesta trazando las graficas de la respuesta y de la derivada numérica en el mismo rectángulo de inspección.

1. $\boldsymbol{y = e^{2\, sen\, 3x}}$

2. $y = e^{x}\, sen\, e^{x}$

3. $y = e^{e^{x}}$

4. $y = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

5. $\boldsymbol{y = ln\, \frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1}}$

6. $\boldsymbol{y = x^{5} e^{-3\, ln\, x}}$

7. $\boldsymbol{y = tan\, e^{3x} + e^{tan\, 3x}}$

8. $\boldsymbol{e^{x} + e^{y} = e^{x+y}}$

9. $\boldsymbol{e^{y} = ln(x^{3} + 3y)}$

10. $\boldsymbol{y^{2} e^{2x} + xy^{3} = 1}$

11. $\boldsymbol{ye^{2x} + xe^{2y} = 1}$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Solucionario

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} e^{2\ sen\ 3x} = e^{2\ sin\ 3x} \frac{d}{dx}(2\ sin\ 3x) = 6\ cos\ 3x\ e^{2\ sin\ 3x}$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x sene^x) = e^x \frac{d}{dx}(sine^x) + \frac{d}{dx}(e^x) \cdot sine^x = e^x cosx(e^x) + e^x sine^x$

$= e^{2x}\ cos\ e^x\ + e^x\ sin\ e^x$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{e^x}) = e^{e^x} \frac{d}{dx} e^x = e^x e^{e^x}$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) = \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{(e^{2x}+2+e^{-2x})-(e^{2x}-2+e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2}$

$= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

5. $y = ln\ \frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1}$

- **Before differentiating we apply Theorem 5.2.5.**

  $y = ln(e^{4x} + 1) - ln(e^{4x} + 1)$

  We differentiate, applying Theorems 5.2.2 and 5.4.19. Thus

  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^{4x} - 1} D_x(e^{4x} - 1) - \frac{1}{e^{4x}+1} D_x(e^{4x} + 1) = e\frac{4e^{4x}}{e^{4x}-1} - \frac{4e^{4x}}{e^{4x}-1} =$
  $\frac{4e^{8x}+4e^{4x}-(4e^{8x}-4e^{4x})}{(e^{4x}-1)(e^{4x}+1)}$

  $= \frac{8e^{4x}}{e^{8x} - 1}, x > 0$

6. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^5 e^{-3\ ln\ x}) = \frac{d}{dx}(x^5\ e^{ln\ x^{-3}}) = \frac{d}{dx}(x^5 \cdot x^{-3}) = \frac{d}{dx} x^2 = 2x, x > 0$

7. $y = tan\ e^{3x}\ +\ e^{tan\ 3x}$

- $\frac{dy}{dx} = sec^2(e^{3x}) D_x e^{3x} + e^{tan\ 3x}\ D_x tan3x = sec^2(e^{3x}) e^{3x} D_x(3x) +$
  $e^{tan\ 3x} sec^2 3x D_x(3x)$

$$= \mathbf{3(e^{3x}sec^2e^{3x} + e^{tan\,3x}sec^2 3x)}$$

Find dy/dx by implicit differentiation,

8. $e^x + e^y = e^{x+y}; e^x + e^y\frac{dy}{dx} = e^x e^y\frac{dy}{dx} + e^x e^y; (e^y - e^x e^y)\frac{dy}{dx} = e^x e^y - e^x; -e^{-x}\frac{dy}{dx} = e^y; \frac{dy}{dx} = -e^{y-x}$

9. $e^y = ln(x^3 + 3y); e^y\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+3(dy/dx)}{x^3+3y}; (x^3e^y + 3ye^y)\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 3\frac{dy}{dx}; (x^3e^y + 3ye^y - 3)\frac{dy}{dx} = 3x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{x^3e^y + 3ye^y - 3}$$

10. $y^2e^{2x} + xy^3 = 1; y^2e^{2x}(2) + 2y\frac{dy}{dx}e^{2x} + x\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right) + y^3 = 0; (2e^{2x} + 3xy)\frac{dy}{dx} = -y^2 - 2ye^{2x}$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 + 2ye^{2x}}{2e^{2x} + 3xy}}$$

11. $\boldsymbol{ye^{2x} + xe^{2y} = 1}$

- Differentiating on both sides if the equation with respect to x gives

$$ye^{2x}\cdot 2 + e^{2x}\frac{dy}{dx} + xe^{2y}\cdot 2\frac{dy}{dx} + e^{2y}\cdot 1 = 0; \quad (e^{2x} + 2xe^{2y})\frac{dy}{dx} = -2ye^{2x} - e^{2y}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2ye^{2x} + e^{2y}}{e^{2x} + 2xe^{2y}}$$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

OTRAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

1 Teorema

Si a es cualquier número real positivo y u es una función diferenciable de x, entonces

$$\boldsymbol{D_x(a^u) = a^u\, ln\, a\, D_x u}$$

- **Ejemplo 1** Calcule $f'(x)$ si

  $\boldsymbol{f(x) = 3^{x^2}}$

Solución Del teorema 5.5.2

$$\boldsymbol{f(x) = 3^{x^2}(ln 3)(2x)}$$

$$\boldsymbol{= 2(ln\, 3)x3^{x^2}}$$

2 Teorema

Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$D_x(\log_a u) = \frac{\log_a e}{u} \cdot D_x u$$

$$\Leftrightarrow D_x(\log_a u) = \frac{1}{(ln\, a)\, u} \cdot D_x u$$

- **Ejemplo 2** Calcule $\frac{dy}{dx}$, si

  $$y = \log_{10} \frac{x+1}{x^2+1}$$

Solución Al emplear una propiedad de logaritmos, se tiene

$$y = \log_{10}(x+1) - \log_{10}(x^2+1)$$

Del teorema 5.5.5

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log_{10} e}{x+1} - \frac{\log_{10} e}{x^2+1} \cdot 2x$$

$$= \log_{10} e\left(\frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{\log_{10} e(1-2x-x^2)}{(x+1)(x^2+1)}$$

Problemas

1. $\boldsymbol{g(x) = 10^{x^2-2x}}$

2. $\boldsymbol{f(z) = 2^{csc\, 3z}}$

3.$\boldsymbol{g(x) = 2^{5x}3^{4x^2}}$

4. $\boldsymbol{f(x) = (x^3 + 3)2^{-7x}}$

5.$f(t) = \log_{10} \frac{t}{t+1}$

Solucionario

1. $\boldsymbol{g(x) = 10^{x^2-2x}}$

- We apply Theorem 5.5.2 with $u = x^2 - 2x$ and $a = 10$, Thus

$$g'(x) = 10^{x^2-2x}(ln10)D_x(x^2 - 2x) = 10^{x^2-2x}(ln10)(2x - 2)$$

2. $\boldsymbol{f'(z) = D_z 2^{csc\,3z} = 2^{csc\,3x}(ln2)D_z(csc3z) = -3(ln2)csc3zcot3z2^{csc\,3}}$

3. $\boldsymbol{g'(x) = \frac{d}{dx}(2^{5x}3^{4x^2}) = \left(\frac{d}{dx}2^{5x}\right)3^{4x^2} + 2^{5x}\left(\frac{d}{dx}\,3^{4x^2}\right) = 2^{5x}3^{4x^2}(ln\,2)5 +}$
$\boldsymbol{2^{5x}3^{4x^2}(ln\,3)(8x)}$

$$\boldsymbol{= 2^{5x}3^{4x^2}(5\,ln\,2 + 8x\,ln\,3)}$$

4. $\boldsymbol{f(x) = (x^3 + 3)2^{-7x}}$

- $\boldsymbol{f'(x) = (x^3 + 3)D_x(2^{-7x}) + 2^{-7x}D_x(x^3 + 3) = (x^3 + 2)2^{-7x}(ln2)(-7) +}$
  $\boldsymbol{2^{-7x}(3x^2)}$

$$\boldsymbol{= 2^{-7x}\,[3x^2 - 7(ln2)(x^3 + 3)]}$$

5. $f'(t) = D_t \log_{10}\frac{t}{t+1} = D_t[\log_{10} t - \log_{10}(t+1)] = \frac{\log_{10} e}{t} - \frac{\log_{10} e}{t+1} = \frac{\log_{10} e}{t(t+1)}$

FUNCIONES HIPERBÓLICAS E HIPERBÓLICAS INVERSAS

Definición de las funciones seno y coseno hiperbólicos

La función seno hiperbólico, denotada por senh, y la función coseno hiperbólico, denotada por cosh, están definidas como sigue:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^{-x} + e^x}{2}$$

Donde x es cualquier número real.

1. **Teorema**

Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$\boldsymbol{D_x(senh\, u) = cosh\, u\, D_x u}$$

$$\boldsymbol{D_x(cosh\, u) = senh\, u\, D_x u}$$

Definición de las otras cuatro funciones hiperbólicas

Las funciones tangente hiperbólica, cotangente hiperbólica, secante hiperbólica y cosecante hiperbólica, denotadas respectivamente por tanh, coth, sech y csch, están definidas como sigue:

$$\tanh x = \frac{senh\, x}{cosh\, x} \qquad \coth x = \frac{cosh\, x}{senh\, x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{cosh\, x} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{senh\, x}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$\boldsymbol{cosh\, x + senh\, x = e^x}$$

$$\boldsymbol{cosh\, x - senh\, x = e^{-x}}$$

2. Teorema

Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$D_x(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u\, D_x u$$

$$D_x(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u\, D_x u$$

$$D_x(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u\ \tanh u\, D_x u$$

$$D_x(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u\, D_x u$$

- **Ejemplo 1** Calcule $f'(x)$ y simplifíquela mediante identidades de funciones hiperbólicas si $f(x) = \frac{1}{2} \ln \tanh x$

Solución

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\tanh x} \cdot D_x(\tanh x)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\tanh x} \cdot \operatorname{sech}^2 x$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} \cdot \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{1}{2 \operatorname{senh} x \cosh x}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{senh} 2x}$$

$$= \operatorname{csch} 2x$$

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad x \text{ es un número real}$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad x \geq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \qquad |x| < 1$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \qquad |x| > 1$$

3. Teorema

Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$D_x(\sinh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} D_x u \qquad \textbf{(5)}$$

$$D_x(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} D_x u \quad u > 1 \qquad \textbf{(6)}$$

$$D_x(\tanh^{-1} u) = \frac{1}{1-u^2}\ D_x u \qquad |u| < 1 \qquad \textbf{(7)}$$

$$D_x(\coth^{-1} x) = \frac{1}{1-u^2} D_x u \qquad |u| > 1 \qquad \textbf{(8)}$$

Problemas

1. $(\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{f(x) = senh\, x^2}$ $\qquad (\boldsymbol{b})\boldsymbol{f(w) = sech^2 4w}$

2. $(\boldsymbol{a})\boldsymbol{f(x) = tanh^3\sqrt{x}}$ $\qquad (\boldsymbol{b})\boldsymbol{g(t) = cosh\, t^3}$

3. $(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h(x) = coth\frac{1}{x}}$ $\qquad (\boldsymbol{b})\boldsymbol{g(w) = ln(tanh\, x)}$

4. $(\boldsymbol{a})\boldsymbol{f(y) = coth(ln\, y)}$ $\qquad (\boldsymbol{b})\boldsymbol{h(x) = e^x cosh\, x}$

5. $(\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{f(x)} = \tan^{-1}(senh 2x)$ $\qquad (\boldsymbol{b})\boldsymbol{g(x) = (cosh\, x)^x}$

6. $(\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{g(x)} = \sin^{-1}(tan\, \boldsymbol{h\, x^2})$ $\qquad (\boldsymbol{b})\boldsymbol{f(x) = x^{senh\, x}, x > 0}$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Solucionario

1. $(a)\ D_x\, senh\, x^2 = cosh\, x^2\ D_x x^2)2x\, cosh\, x^2$

$(b)\ D_w\, sech^2 4w = 2\, sech\, 4w\ D_w\, sech\, 4w = 2\, sech\, 4w(-sech\, 4w\, tanh\, 4w \cdot 4)$
$= -8\, sech^2 4w\, tanh\, 4w$

2. $(a) D_x\, tanh^3\sqrt{x} = 3\, tanh^2\sqrt{x}\ \ D_x tanh\sqrt{x} = 3\, tanh^2\sqrt{x}\ \ sech^2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(b) D_t\, cosh\, t^3 = sinh\, t^3\ D_t\, t^3 = 3t^2\, sinh\, t^3$

3. $(a)\ D_x coth\left(\frac{1}{x}\right) = -csch^2\frac{1}{x} \cdot D_x\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\ csch^2\left(\frac{1}{x}\right)$

$(b)\ D_x ln(tanh\, x) = \frac{1}{tanh\, x} D_x tanh\, x = \frac{sech^2\, x}{tanh\, x} = \frac{1}{sinh\, x\, cosh\, x} = csch\, 2x,\ \ x > 0$

4. $(a) f(y) = coth(ln\, y)$ $\qquad\qquad (b) h(x) = e^x cosh\, x$

- $(a)\ Applying\ Theorem\ 5-9-4\ with\ u = ln\, y, we\ obtain$

$$f'(y) = -csch^2(lny) D_x lny = \frac{-csch^2(lny)}{y}$$

$$(b) h(x) = e^x \cdot \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(e^{2x} + 1\right)\ and\ so\ h'(x) = e^{2x}$$

5. $(a) D_x \tan^{-1}(senh\, 2x) = \frac{1}{1+sinh^2\, 2x} D_x\, sinh\, 2x = \frac{2\, cosh\, 2x}{cosh^2 x} = 2\, sech\, 2x$

$(b) g = (cosh\, x)^x \cdot ln\, g = x\, ln(cosh\, x);\ \frac{g'}{g} = 1 \cdot ln(cosh\, x) + x \cdot \frac{sinh\, x}{cosh\, x}, g' = [ln(cosh\, x) + x\, tanh\, x](cosh\, x)^x$

6. $(a)\ g'(x) = \frac{d}{dx}\sin^{-1}(tan\, h\, x^2) = \frac{1}{\sqrt{1 - tanh^2\, x^2}}\frac{d}{dx}(tanh\, x^2) = \frac{1}{sech\, x^2}(sech^2 x^2)(2x) = 2x\, sech\, x^2$

$(b) f(x) = x^{senh\, x} \cdot ln\, f = sinh\, x\, ln\, x;\ \frac{f'}{f} = cosh\, x\, ln\, x + sinh\, x\left(\frac{1}{x}\right)$

$f' = x^{sinh\, x}\left(\frac{x\, cosh\, x\, ln\, x + sinh\, x}{x}\right) = x^{sinh\, x\, -\, 1}(x\, cosh\, x\, ln\, x + sinh\, x)$