1.Razones y Proporciones

¿Qué es una razón?

Una razón es la comparación entre dos cantidades. Se puede expresar como un cociente o una división. Ejemplo: La razón entre 5 y 8 se puede escribir $\frac{5}{8}$ o 5:8. Se lee 5 es a 8. Las dos cantidades que se comparan son los términos de la razón. El primer término se llama Antecedente y el segundo término se llama Consecuente. $\frac{a}{b} = \frac{antecedente}{consecuente}$

Valor de una razón.

El cociente es obtenido entre el antecedente y el consecuente. Ejemplo: El cociente de $\frac{12}{4} = 3$

Para comprobar si el valor de una razón es correcto, se debe multiplicar el valor de la razón por el consecuente. El producto obtenido debe ser igual al antecedente de la razón. Ejemplo: Considerando el ejemplo anterior. $3 \cdot 4 = 12$

Amplificación y simplificación de una razón

Amplificar una razón consiste en multiplicar tanto antecedente como consecuente por un mismo número. La amplificación permite transformar una razón que ha sido expresada en términos fraccionarios en otra de términos enteros. Ejemplo: $\frac{a}{b}\ amplificada\ por\ c = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$

Simplificar una razón consiste en dividir tanto antecedente como consecuente por un mismo número. La simplificación permite trabajar con números más pequeños que los dados. $\frac{a}{b}\ simplificada\ por\ c = \frac{a/c}{b/c}$

Ejemplos:

1. En una piscina hay 35 niñas y 45 niños, ¿Cuál es la razón entre niñas y niños?

$\frac{35}{45}\ simplificado\ por\ 5 = \frac{35/5}{45/5} = \frac{7}{9}$ la razón entre niñas y niños es de 7 a 9.

2. En un curso de 36 estudiantes, 9 reprobaron. ¿Cuál es la razón entre aprobados y reprobados?

$\frac{9}{36}\ simplificado\ por\ 9 = \frac{9/9}{36/9} = \frac{1}{4}$ la razón entre aprobados y reprobados es de 1 a 4.

3. En un terreno, el área construida es de 120 m^2 y el área no construida es de 80 m^2. ¿Cuál es la razón entre el área construida y el área total del terreno?

$$\frac{120}{120+80} = \frac{120}{200}\ simplificado\ por\ 10\ y\ por\ 2 = \frac{120/10}{200/10} = \frac{12/2}{20/2} = \frac{6/2}{10/2} = \frac{3}{5}$$

La razón entre el área construida y área total del terreno es de 3 a 5.

¿Qué es una proporción?

Una proporción se define como la igualdad entre dos razones. Es decir: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Una proporción se lee "$\boldsymbol{a}$ es a $\boldsymbol{b}$ como $\boldsymbol{c}$ es a $\boldsymbol{d}$" Ejemplo: Dadas las razones $\frac{12}{4}$ y $\frac{15}{5}$ forman la proporción $\frac{12}{4} = \frac{15}{5}$. Ambas razones tienen el mismo cociente, que es 3. Se lee "12 es a 4 como 15 es a 5"

Propiedades de las Proporciones

Alternando el antecedente de la primera razón con el consecuente de la segunda razón:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \to \frac{d}{b} = \frac{c}{a}}$$

Alternando el consecuente de la primera razón con el antecedente de la segunda razón:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \to \frac{a}{c} = \frac{b}{d}}$$

Invirtiendo los términos de las razones:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \to \frac{b}{a} = \frac{d}{c}}$$

Proporción Directa e Inversa

Dos variables son directamente proporcionales si al aumentar o disminuir una de ellas, la otra aumenta o disminuye el mismo número de veces. Es decir, si x es directamente proporcional a y, se cumple que el cociente entre y con x es igual a k constante de proporcionalidad.

$$\frac{y}{x} = k \;\to\; y = k \cdot x$$

Dos variables son inversamente proporcionales si al aumentar o disminuir una de ellas, la otra disminuye o aumenta el mismo número de veces. Es decir, si x es inversamente proporcional a y, se cumple que el producto entre y con x es igual a k constante de proporcionalidad.

$$y \cdot x = k \;\to\; y = \frac{k}{x}$$

1. En 50 litros de agua de mar hay 1.300 gramos de sal. ¿Cuántos litros de agua de mar contendrán 5.200 gramos de sal? Como en doble cantidad de agua de mar habrá doble cantidad de sal; en triple habrá triple, etc. Las magnitudes cantidad de agua y cantidad de sal son proporciones directas.

Litros de agua	**50**	**X**
Gramos de sal	**1300**	**5200**

$$\boldsymbol{x = \frac{5200}{1300} \cdot 50 = 200}$$

1. En una campaña de recogida de cajas para reciclar, Yolanda lleva 7 pilas, Miriam 11 y Juan 12. Si como premio ganan 60 dulces, ¿cómo se los repartirán?

1º Sumamos para averiguar cuántas cajas han reciclado entre los tres.

2º Dividimos los dulces entre el total de cajas para saber cuántos dulces dan por 1 caja.

3º Ese resultado lo multiplicamos por las cajas que cada niño ha reciclado.

Cajas totales:7+11+12=30 cajas

$$\frac{60\ dulces}{30\ cajas} = \frac{2}{1}\ Dan\ 2\ dulces\ por\ caja\ 1\ caja$$

Entonces a cada niño le corresponde:

$$7 \cdot 2 = 14 \text{ dulces para Yolanda}$$

$$11 \cdot 2 = 22\ dulces\ para\ Miriam$$

$$12 \cdot 2 = 24\ dulces\ para\ Juan$$

1. En una empresa se cuentan las tardanzas de una oficina, Yolanda lleva 7, Miriam 11 y Juan 12. Si como bonificación por puntualidad se reparten 60 dólares, ¿cómo se los repartirán?

1º Sumamos los inversos para averiguar cuántas tardanzas tienen entre los tres.

2º Dividimos el inverso de tardanzas de cada empleado entre el total.

3º El resultado lo multiplicamos por el dinero para saber cuánto le toca a cada empleado.

Tardanzas totales: $\frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} = \frac{132+84+77}{924} = \frac{293}{924}$

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{924}{293} = \frac{132}{293} \text{ proporcion de Yolanda}$$

$$\frac{1}{11} \cdot \frac{924}{293} = \frac{84}{293}\ proporcion\ de\ Miriam$$

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{924}{293} = \frac{77}{293}\ proporcion\ de\ Juan$$

Entonces a cada empleado le corresponde

$$60 \cdot \frac{132}{293} \approx 27 \text{ dolares para Yolanda}$$

$$60 \cdot \frac{84}{293} \approx 17.20\ dolares\ para\ Miriam$$

$$60 \cdot \frac{77}{293} \approx 15.80\ dolares\ para\ Juan$$

Taller en clase

1. Un ganadero tiene pasto suficiente para alimentar 220 vacas durante 45 días. ¿Cuántos días podrá alimentar con la misma cantidad de pasto a 450 vacas? Vemos que, con el mismo pasto, si el número de vacas se duplica, tendrá para la mitad de los días. Las proporciones son inversas.

N vacas	220	450
N Días	45	x

$$\boldsymbol{x = \frac{220}{450} \cdot 45 = 22}$$

2. Una localidad tiene 3 institutos. El instituto A tiene matriculados 520 alumnos, el B 360 alumnos y el C 140 alumnos. Para su funcionamiento se debe repartir 124.440 € en partes directamente proporcionales al número de alumnos que tienen matriculados. ¿Cuánto recibirá cada instituto?

Estudiantes totales: 520+360+140=1020

$$\frac{124440\ de\ funcionamiento}{1020\ alumnos} = \frac{122}{1}\ Corresponden\ 122\ euros\ por\ alumno$$

Entonces a cada niño le corresponde:

$$520 \cdot 122 = 63440\ euros\ para\ el\ Instituto\ A$$

$$360 \cdot 122 = 43920\ euros\ para\ el\ Instituto\ B$$

$$149 \cdot 122 = 17080\ euros\ para\ el\ Instituto\ C$$

3. Se usan 10 bombas para abastecer de agua a 800 casas, ¿cuántas casas se pueden abastecer usando 15 bombas iguales?

Bombas	10	15
Casas	800	X

$$\boldsymbol{x = \frac{800}{10} \cdot 15 = 1200\ casas}$$

4. Una empresa va a repartir las ganancias entre sus cuatro dueños, según el dinero que cada uno aportó, las ganancias son de 50000 dólares y los dueños aportaron A:20000, B: 35000, C: 40000 y D: 45000 dólares respectivamente. ¿Cómo se reparten las ganancias?

Total, de aportaciones de los dueños: 20000+35000+40000+45000 = 140000

La razón entre las ganancias y las aportaciones: $\frac{140000\ de\ aportaciones}{50000\ de\ ganancias} = \frac{140000/_{10000}}{50000/_{10000}} = \frac{14}{5}$

Por cada 14 dólares de aportaciones corresponden 5 dólares de ganancias

Entonces:

$$20000\ aportaciones \cdot \frac{5\ ganancias}{14\ aportaciones} = 7142.86\ dolares\ para\ A$$

$$35000\ aportaciones \cdot \frac{5\ ganancias}{14\ aportaciones} = 12500\ dolares\ para\ B$$

$$40000\ aportaciones \cdot \frac{5\ ganancias}{14\ aportaciones} = 14285.71\ dolares\ para\ C$$

$$45000\ aportaciones \cdot \frac{5\ ganancias}{14\ aportaciones} = 16071.43\ dolares\ para\ D$$

Tarea #1

I Parte: Calcule el cociente de las siguientes razones

1. $\frac{60}{3} =$ **2.** $\frac{2}{4} =$

3. $\frac{100}{10} =$ 4. $\frac{15}{10} =$

II Parte: Encuentre el valor de la razón.

1. En un campeonato de video juegos, un participante ganó 156 veces y perdió 104 veces. ¿Cuál es la razón entre las veces que perdió respecto al total?
2. ¿Cuál es la razón inversa de $\frac{27}{36}$?
3. Simplifique $\frac{15}{25}$ y $\frac{a^2b}{ac}$

III Parte: Resuelve los siguientes problemas

1. Si 20 albañiles realizan un trabajo en 60 días, ¿cuántos se necesitarán para acabar el trabajo en 50 días?
2. Un padre reparte 700 € en partes directamente proporcionales a sus edades: Miguel de 8 años, Fátima de 12 años y Lucía de 15 años. ¿Cuánto recibirá cada hijo?
3. Si 40 grifos iguales llenan un depósito de 15 m^3 en 6 horas, ¿cuánto tiempo tardarán 2 grifos en llenar un depósito de 30 m^3?

Solucionario de la Tarea #1

II Parte:

1. En un campeonato de video juegos, un participante ganó 156 veces y perdió 104 veces. ¿Cuál es la razón entre las veces que perdió respecto al total?

$$\frac{156}{156+104}=\frac{156}{260}=\frac{3}{5}$$

III Parte: Resuelve los siguientes problemas

1. Si 20 albañiles realizan un trabajo en 60 días, ¿cuántos se necesitarán para acabar el trabajo en 50 días?

$\frac{20\ albaniles}{60\ dias}=\frac{x\ albaniles}{50\ dias}$ $\qquad x=\frac{20\cdot 60}{50}=24\ albaniles$

2. Un padre reparte 700 dólares en partes directamente proporcionales a las edades de cada hijo: Miguel de 8 años, Fátima de 12 años y Lucía de 15 años. ¿Cuánto recibirá cada hijo?

Suma de las edades: 8+12+15=35

La razón entre unidad y el dinero: $\frac{700\ dolares}{35}=\frac{700/35}{35/35}=\frac{20}{1}$ $20\ dolares\ por\ cada$ año

Entonces:

$$Miguel\ 8\text{ años}\cdot\frac{20\ dolares}{1\text{ año}}=160\ dolares\ para\ Miguel$$
$$Fatima\ 12\text{ años}\cdot\frac{20\ dolares}{1\text{ año}}=240\ dolares\ para\ Fatima$$
$$Lucia\ 15\text{ años}\cdot\frac{20\ dolares}{1\text{ año}}=300\ dolares\ para\ Lucia$$

3. Si 40 grifos iguales llenan un depósito de 15 m^3 en 6 horas, ¿cuánto tiempo tardarán 2 grifos en llenar un depósito de 30 m^3?

$\frac{40\ grifos}{2\ grifos}=\frac{15\ m^3}{30\ m^3}=\frac{6\ horas}{x\ horas}$

40 grifos mueven $\frac{15}{6}\frac{m^3}{horas}$, entonces cada grifo mueve $\frac{15/6}{40}=0.0625\ \frac{m^3}{horas}$

2 grifos moverán $0.0625\cdot 2=0.125\frac{m^3}{horas}$, finalmente

$\frac{30m^3}{0.125\frac{m^3}{horas}}=240\ horas\ para\ llenar\ el\ deposito$

2. Variaciones Porcentuales

Una variación porcentual es una razón cuyo consecuente es 100 y se representa con el símbolo %. Corresponde a comparar cuántas partes hay de un total de 100 partes iguales. Este también se puede expresarse como una razón o un número decimal equivalente.

El porcentaje corresponde a un caso particular de proporcionalidad directa, donde uno de los términos de la proporción es 100, es decir:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{100}$$

Ejemplo:

El 15% de 200 se expresa así:

$$\frac{x}{200} = \frac{15}{100}$$

$$x = \frac{15 \cdot 200}{100}$$

$$x = 30$$

Podemos establecer dos procedimientos de cálculo:

Forma 1: aplicación directa

Para el cálculo de t% de una cantidad N

$$\frac{t}{100} \cdot N$$

Forma 2: Utilizando proporciones

Se plantea una proporción asignando 100% al total

$$\frac{t\%}{x} = \frac{100\%}{N}$$

Ejemplos:

Calcular el 8% de 450

Forma 1: Aplicación directa

$$\frac{8}{100} \cdot 450 \rightarrow \frac{8 \cdot 450}{100} = 36$$

Forma 2: Utilizando proporciones

$$\frac{450}{100} = \frac{x}{8}$$

$$100x = 450 \cdot 8 \rightarrow x = \frac{3600}{100} \rightarrow x = 36$$

Calcular el 30% del 20% de 1200 UF

Forma 1: Aplicación directa

Utilizando el concepto, simplificando y multiplicando:

$$\frac{3\cancel{0}}{1\cancel{00}} \cdot \frac{2\cancel{0}}{1\cancel{00}} \cdot 12\cancel{00} = 3 \cdot 2 \cdot 12 = 72\ UF$$

Forma 2: Utilizando proporciones

Se calcula el 20% de 1200:

$$\frac{1200}{100} = \frac{x}{20} \rightarrow 100x = 1200 \cdot 20$$

$$x = \frac{2400}{100} \rightarrow x = 240$$

Luego se calcula el 30% del 20% de 1200, es decir, 30% de 240:

$$\frac{240}{100} = \frac{x}{30} \rightarrow 100x = 240 \cdot 30$$

$$x = \frac{7200}{100} \rightarrow x = 72\ UF$$

- ¿Qué cantidad se obtiene, al aumentar 5600 en un 20%?

Forma 1: Aplicación directa

Se pide calcular el 120% de 5600 el 20% más.

Calculamos directamente el 120% de 5600:

$$\frac{12\cancel{0}}{1\cancel{00}} \cdot 560\cancel{0} = 6720$$

Forma 2: Utilizando proporciones

$$\frac{5600}{100} = \frac{x}{20}$$

Despejamos

$$100x = 5600 \cdot 20$$

$$x = 1120$$

El 20% de 5600 es 1120, entonces $5600 + 1120 = 6720$ corresponde a la nueva cantidad aumentada en un 20%.

- ¿Qué cantidad se obtiene, al disminuir 5600 en un 20%?

Forma 1: Aplicación directa

Se pide calcular el 80% de 5600 el 20% menos.

Calculamos directamente el 80% de 5600:

$$\frac{80}{100} \cdot 5600 = 4480$$

Forma 2: Utilizando proporciones

$$\frac{5600}{100} = \frac{x}{20}$$

Despejamos

$$100x = 5600 \cdot 20$$

$$x = 1120$$

El 20% de 5600 es 1120, entonces $5600 - 1120 = 4480$ corresponde a la nueva cantidad disminuida en un 20%.

- ¿Qué porcentaje es 60 de 1200?

Se procede a plantear la proporción, teniendo cuidado en escribir la información de manera correcta:

Escribir la proporción

$$\frac{1200}{100} = \frac{60}{x}$$

Despejamos la variable

$$1200x = 100 \cdot 60$$

$$x = \frac{1\cancel{00} \cdot 60}{12\cancel{00}}$$

$$x = \frac{60}{12}$$

$$x = 5$$

- 50 es el 20% ¿de qué cantidad?

Se procede a plantear la proporción, teniendo cuidado en escribir la información de manera correcta:

Escribir proporción

$$\frac{50}{20} = \frac{x}{100}$$

Despejamos la variable

$$50 \cdot 100 = 20x$$

$$x = \frac{5000}{20}$$

$$x = 250$$

- ¿En cuánto se transforma un capital de 2 500 € colocado al 3,5% anual durante 4 años?

Plantear la fórmula de interés compuesto:

La fórmula general del interés compuesto es:

$$A = P \cdot (1 + r)^t$$

donde:

- A es el monto final.
- P es el capital inicial.
- r es la tasa de interés anual expresada como decimal.
- t es el tiempo de la inversión en años.
- Identificar los datos del problema:

Capital inicial:

$$P = 2500 \text{ €}$$

Tasa de interés anual:

$$r = 3.5$$

Tiempo: años

$$t = 4 \, años$$

Sustituir los valores en la fórmula:

$$A = 2500 \cdot (1 + 0.035)^4$$

$$2500 \; \cdot \; (1.035)^4 = 2868{,}81 \text{ €}$$

Después de 4 años, el capital de 2,500 € colocado al 3,5% anual se transforma en 2,868.81 €.

Taller en clase

1. ¿Qué número decimal corresponde a cada uno de estos porcentajes?

$$33\%;\ 7\%\ ; 5{,}4\%;\ 145\%$$

2. Calcula el 7% de 5420.
3. Calcula el tanto por ciento que representa 78 de 125.
4. Si el 20% de una cantidad es 69, ¿cuál es la cantidad?
5. Halla el porcentaje que corresponde a cada uno de estos números decimales:

$$0.78;\ 1.45;\ 0.03;\ 0.235$$

6. Había ahorrado el dinero suficiente para comprarme un abrigo que costaba 90 €. Cuando llegué a la tienda, este tenía una rebaja del 20%. ¿Cuánto tuve que pagar por él?
7. El precio de un medicamento, sin ITBMS, es de 18,75 €. Sabiendo que el ITBMS es el 4%, ¿cuál será su precio con ITBMS?
8. En el mes de enero rebajaron en un 10% un artículo que costaba 52 €. En febrero lo rebajaron otro 15%, y en marzo, un 15% más. ¿Cuál fue su precio después de estas tres rebajas?
9. Un banco paga el 0.42% mensual del dinero que se deposite en él. ¿En cuánto se habrán transformado 18 000 € al cabo de 8 meses?

Solucionario para problemas en clase

1. $33\% = 0.33$

$$7\% = 0.07$$

$$5.4\% = 0.054$$

$$145\% = 1.45$$

2.

$$5420 \cdot 0.07 = 379.4$$

3.

$$\frac{78}{125} \cdot 100 = 62.4 \rightarrow 78\ es\ el\ 62.4\%\ de\ 125$$

4.

$$20\%\ de\ x = 69 \rightarrow 0.20 \cdot x = 69 \rightarrow x = \frac{69}{0.20} = 345$$

5.

$$0.78 = 78\%$$

$$1.45 = 145\%$$

$$0.03 = 3\%$$

$$0.235 = 23.5\%$$

6.

$$90 \cdot 0.8 = 72\text{€ me costó el abrigo}$$

7.

$$18{,}75 \cdot 1.04 = 19.5\ \text{€}\ cuesta\ con\ ITBMS$$

8.

$$52 \cdot 0.9 \cdot 0.85 \cdot 0.85 = 33.813 \approx 33.81\ \text{€}\ fue\ su\ precio\ final$$

9.

$$18000 \cdot (1.0042)^8 = 18613.77\ \text{€}$$

Tarea

1. Calcula el porcentaje correspondiente a las siguientes fracciones:

$$\frac{7}{25};\frac{3}{20};\frac{3}{5}$$

2. Calcula el 28% de 375.
3. Halla el tanto por ciento que representa 27 de 216.
4. Si el 62% de una cantidad es 93, ¿cuál es la cantidad?
5. Calcula el 3% de 13.5.
6. Calcula el tanto por ciento que representa 925 de 1 250.
7. En una tienda me compré una bufanda, que tenía un descuento del 35%, pagando por ella 9.75 €. ¿Cuánto costaba antes de la rebaja?
8. Un medicamento cuesta 23.4 € con ITBMS, ¿cuál será su precio sin ITBMS (el ITBMS es de 4%)?
9. El número de habitantes de una determinada localidad, hace dos años, era de 6 500. El año pasado, este número aumentó en un 5%, y este año, ha aumentado en un 7%. ¿Cuántos habitantes hay actualmente?
10. ¿En cuánto se transforman 15 000 € al 3.25% anual durante 3 años?

Solucionario de la tarea

1.

$$\frac{7}{25} = 0.28 = 28\%$$
$$\frac{3}{20} = 0.15 = 15\%$$
$$\frac{3}{5} = 0.6 = 60\%$$

2.

$$375 \cdot 0.28 = 105$$

3.

$$\frac{27}{216} \cdot 100 = 12.5 \rightarrow 27 \; representa \; el \; 12.5\% \; de \; 216$$

4.

$$62\% \; de \; x = 93 \rightarrow 0.62 \cdot x = 93 \rightarrow x = \frac{93}{0.62} = 150$$

5.

$$13.5 \cdot 0.03 = 0.405$$

6.

$$\frac{925}{1250} \cdot 100 = 74 \rightarrow 925 \; representa \; el \; 74\% \; de \; 1250$$

7.

$$\frac{9.75}{0.65} = 15\text{€ me costó la bufanda sin rebaja}$$

8.

$$\frac{23.4}{1.04} = 22{,}5 \text{ €} \; cuesta \; sin \; ITBMS$$

9.

$$6500 \cdot 1.05 \cdot 1.07 = 7302.75 \approx 7303 \; habitantes \; hay \; actualmente$$

10. $15000 \cdot (1.0325)^3 = 16510.55$ €

3.Aspectos Fundamentales del Álgebra

El **álgebra** es ciencia matemática que estudia la cantidad considerada del modo más general.

Diferencia con la aritmética:

- Aritmética: las cantidades expresadas únicamente por números y expresan valores determinados. Por ejemplo: número 20, si quisiese una cantidad menor sería 19 y si fuese mayor sería 21.
- Álgebra: las cantidades expresadas por letras, las cuales representan todos los valores, por lo cual puede tomar el valor que le asignemos. Puede ser 20, mayor que 20 o menor que 20. Advertir que de igual manera antes de realizar el problema decir cual valor se le asigna a la letra, una letra no puede representar dos valores en el mismo problema.

Notación algebraica:

Para el álgebra, representar cantidades se realiza con letras y números:

- Números: expresa cantidades conocidas y determinadas.
- Letras: expresa todas las cantidades conocidas y desconocidas.
- Cantidades conocidas y desconocidas: se representan por las letras del alfabeto (a, b, c, d).
- Se puede representar distintos valores en las letras por medio de comillas: a´, a´´, a´´´ (leyéndose la primera como prima, a segunda y a tercera).

Fórmulas:

Una fórmula algebraica es la representación por letras de una regla o principio general. Utilizando de ejemplo la geometría, se expresa un rectángulo como $A = b \times h$, pues sería lo mismo, es una ecuación fija preestablecida que demuestra ese principio o ley específico.

Signos de Álgebra:

Signos de operación de operación: signo de suma $(+)$, signo de resta $(-)$, signo de multiplicación ($\times$ o $\cdot$), signo de división ($\div$ o $\frac{a}{b}$) , signo de elevación de exponente 2^x, signo de raíz cuadrada(2) ($\sqrt{a}$) y en caso de la cubica(3) ($\sqrt[3]{a}$).

Coeficiente:

En un producto cualquier de los dos valores tomados es coeficiente del otro.

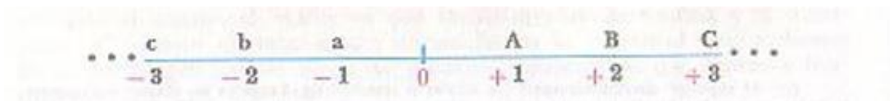
Ejemplo: 5a= $a + a + a + a + a$, véase que es la suma de cinco veces a, así como podría decir que puede ser a cantidad de veces 5.

Signos de agrupación:

Los paréntesis “()”, los corchetes “[]” y las llaves “{}” son signos de agrupación. Su función consiste en señalar la operación que se debe resolver antes de las demás. Por ejemplo; (a+b)c → la operación dentro del paréntesis “()” se realizará primero, siendo a + b para luego ser multiplicado por c.

Los números positivos y negativos:

Si sobre una semirrecta fijamos un punto cero, a partir del cual, hacia la derecha, señalamos puntos que representan una determinada unidad. Si convenimos en que los puntos de la semirrecta indicados a la derecha del punto cero representan números positivos (A, B, C, etc); Los puntos señalados a la izquierda (a, b, c, etc), representarán números negativos.



Históricamente, los números negativos surgen para hacer posible la resta en todos los casos. De este modo, la resta se convierte en una operación inversa de la suma, y se hace posible restarle a un minuendo menor un sustraendo mayor.

Si tomamos como los positivos como en su definición de números laterales, al tomarlos en la definición más amplia que son los reales los números negativos son el inverso de los positivos.

En término tradicional, el signo de los números se define de la siguiente manera: los números seleccionados por la derecha del 0 son positivos, mientras que, por la izquierda, son negativos. Sin embargo, el orden puede invertirse. Si decide tomar los números positivos por la izquierda, en contraparte, los números ubicados a la derecha serán negativos.

Taller en clase:

1. Expresar la deuda como negativo
   Pedro estaba en -60 bolívares. Al recibir 320bolivares, cual es el estado económico de Pedro.
$$-60+320= \ 260\ bolivares$$

2. Un hombre que tenía 1170 dolares, hizo una compra por valor de 1515. Expresar su nuevo estado económico.
$$1170\ -\ 1515\ =\ -345\ dolares$$
3. Tenía \$200. Cobré \$56 y pagué deudas por \$189. ¿Cuánto tengo?
$$200\ +56\ -189=\$67$$
4. Compro ropas por valor de 666 soles y alimentos por 1178. Si después recibo 2280, ¿cuál es mi estado económico?
$$2280\ -\ (666\ +\ 1178)=$$
$$2280\ -\ 1844\ =\ 436$$

5. Tenía \$20. Pagué \$15 que debía, después cobré \$40 y luego hice gastos por \$75. ¿Cuánto tengo?

$$20 - 15 + 40 - 75 = 5 + 40 - 75 = 45 - 75 = -30$$

6. Enrique hace una compra por \$67; después recibe \$72; luego hace otra compra por \$16 y después recibe \$52. Expresar su estado económico.

$$-67 + 72 - 16 + 52 = 5 - 16 + 52 = -11 + 52 = 41$$

7. Después de recibir 200 colones hago tres gastos por 78, 81 y 93. Recibo entonces 41 y luego hago un nuevo gasto por 59. ¿Cuánto tengo?

$$200 - (78 + 81 + 93) + 41 - 59 = 200 - 252 + 41 - 59$$
$$= -52 + 41 - 59 = -70$$

8. Pedro tenía tres deudas de \$45, \$66 y \$79 respectivamente. Entonces recibe \$200 y hace un gasto de \$10. ¿Cuánto tiene?

$$-45 - 66 - 79 + 200 - 10 = -190 + 200 - 10 = 10 - 10 = 0$$

Notación algebraica

Con las cantidades algebraicas, representadas por letras, pueden hacerse las mismas operaciones que con los números aritméticos. Como la representación de cantidades por medio de símbolos o letras.

Ejemplos:

1. Escríbase la suma del cuadrado de **a** con el cubo de **b**.

$$a^2 + b^3$$

2. Siendo e un número entero, Escríbanse los dos números enteros consecutivos posteriores a a.

3. $a + 1; a + 2$

4. Siendo x un número entero, Escríbanse los dos números consecutivos anteriores a x.

$$x - 1; x - 2$$

Términos Semejantes

Los términos semejantes son expresiones algebraicas que tienen el mismo tipo de variable (por ejemplo, todos tienen "x") ya misma potencia o exponente en esas variables Solo difieren en el coeficiente numérico, o sea, el número que acompaña a la variable.

Ejemplos

1. Reducir el polinomio $5a - 6b + 8c + 9a - 20c - b + 6b - c$.

Se reducen por separado los de cada clase:

$$5a + 9a = 14a$$
$$-6b - b + 6b = -b$$
$$8c - 20c - c = -13c$$

Tendremos: $14a - b - 13c$.

2. Reducir el polinomio:

$$8a^3b^2 + 4a^4b^3 + 6a^3b^2 - 9a^4b^3 - 15 - 5ab^5 + 8 - 6ab^3.$$

Se reducen por separado los de cada clase:

$$4a^4b^3 - 9a^4b^3 = -5a^4b^3$$
$$8a^3b^2 + 6a^3b^2 - a^3b^2 = 13a^3b^2.$$
$$-5ab^5 - 6ab^5 = -11ab^5.$$
$$-15 + 8 = -7$$

Tendremos: $-5a^4b^3 + 13a^3b^2 - 11ab^5 - 7$ R.

3. Reducir el Polinomio:

$$\frac{2}{5}x^4 - \frac{1}{2}x^3y + 3x^4 - y^4 + \frac{5}{6}y^4 - 0.3x^4 - \frac{3}{5}x^3y - 6 + x^3y - 14 + 2\frac{1}{8}y^4.$$

$$\frac{2}{5}x^4 + 3x^4 - 0.3x^4 = 3\frac{1}{10}x^4.$$

$$x^3y - \frac{1}{2}x^2y - \frac{3}{5}x^3y = 3\frac{1}{10}x^4.$$

$$2\frac{1}{8}y^4 - \frac{5}{6}y^4 - y^4 = 2\frac{1}{6}y^4.$$

$$-6 - 14 = -20$$

Tendremos: $3\frac{1}{10}x^4 - \frac{1}{10}x^3y + 2\frac{1}{6}y^4 - 20$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Taller en clase

1. $15a^2 - 6ab - 8a^2 + 20 - 5ab - 31 + a^2 - ab.$

$15a^2 - 6ab - 8a^2 + 20 - 5ab - 31 + a^2 - ab.$

$$15\mathrm{a}^2 - 8\mathrm{b}^2 + \mathrm{a}^2 = 8\mathrm{a}^2$$
$$-6\mathrm{ab} - 5\mathrm{ab} - \mathrm{ab} = -12\mathrm{ab}$$
$$20 - 31 = -11$$

Respuesta: $8a^2 - 12ab - 11$

2. $-71a^2b - 84a^4b^2 + 50a^3b + 84a^4b^3 - 45a^3b + 18a^3b.$

$-a + b - c + 8 + 2a + 2b - 19 - 2c - 3a - 3 - 3b + 3c.$

$$-a + 2a - 3a = -2a$$
$$b + 2b - 3b = 0$$
$$-c - 2c + 3c = 0$$
$$8 - 19 - 3 = -14$$

$$Respuesta: -2a - 14$$

3. $-\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab - \frac{5}{6}b^2 - 2\frac{1}{3}a^2 - \frac{3}{4}ab + \frac{1}{6}b^2 - \frac{1}{3}b^2 - 2ab.$

$-\frac{3}{4}\mathrm{a}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{ab} - \frac{5}{6}\mathrm{b}^2 - 2\frac{1}{3}\mathrm{a}^2 - \frac{3}{4}\mathrm{ab} + \frac{1}{6}\mathrm{b}^2 - \frac{1}{3}\mathrm{b}^2 - 2\mathrm{ab}$

$$-\frac{3}{4}\mathrm{a}^2 - \frac{7}{4}\mathrm{a}^2 = \frac{-9+28}{12}\mathrm{a}^2 = \frac{19}{12}\mathrm{a}^2$$

$$-\frac{5}{6}\mathrm{b}^2 + \frac{1}{6}\mathrm{b}^2 - \frac{1}{3}\mathrm{b}^2 = \frac{-5+1-2}{6}\mathrm{b}^2 = -\frac{6}{6}\mathrm{b}^2 = -\mathrm{b}^2$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{ab} - \frac{3}{4}\mathrm{ab} - 2\mathrm{ab} = \frac{2-3-8}{4}\mathrm{ab} = -\frac{9}{4}ab$$

Respuesta: $\frac{19}{12}\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2 - \frac{9}{4}ab$

4.Suma y Resta de Expresiones Algebraicas

La suma o adición es una operación que tiene como objetivo reunir dos o más expresiones algebraicas (sumandos) en una sola expresión algebraica (suma). Así, la suma de a y b es $a + b$, porque esta última expresión es la reunión de las dos expresiones algebraicas dadas: a y b.
La suma de a y $-b$ es $a - b$, porque esta última expresión es la reunión de las dos expresiones dadas: a y $-b$.

Carácter general de la suma algebraica

En Aritmética, la suma siempre significa aumento, pero en Algebra la suma es un concepto más general, pues puede significar aumento o disminución, ya que hay sumas algebraicas como al del último ejemplo, que equivale a una resta Aritmética.
Resuelta, pues, que **sumar una cantidad negativa equivale a restar una cantidad positiva de igual valor absoluto.**
Así, la suma de m y $-n$ es $m - n$, que equivale a restar m el valor absoluto de $-n$ que es $|n|$.
La suma de $-2xy - 3y \ \ es \ -2x - 3y$, que equivale a restar $-2x$ el valor absoluto de $-3y$ que es $|3y|$.

Regla general para sumar

Para sumar dos o más expresiones algebraicas se escriben unas a continuación de las otras con sus propios signos y se reducen los términos semejantes si los hay.

Suma de monomios

1) Sumar $5a, 6b\ y\ 8c$
Los escribimos unos a continuación de otros con sus propios signos, y como $5a = +5a,\ 6b = +6b\ y\ 8c = +8c$ la suma será: $5a + 6b + 8c$.
El orden de los sumandos no altera la suma. Así, $5a + 6b + 8c$ es lo mismo que $5a + 8c + 6b$ o que $6b + 8c + 5a$.
Esta en las **Ley Conmutativa de la suma.**

2) Sumar $3a^2b, 4ab^2, 7ab^2, 6b^3$
Tendremos: $3a^2b + 4ab^2 + 7ab^2 + 6b^3$
Reduciendo los términos semejantes, queda: $4a^2b + 11ab^2 + 6b^3$.

3) Sumar: $3a\ y{-2b}$
Cuando algún sumando es negativo, suele incluirse dentro de un paréntesis para indicar la suma; así: $3a + (-2b)$.
La suma será: $3a - 2b$. R.

4) Suma: $7a;\ -8b;\ -15a;\ 9b; -4c\ y\ 8$.
Tendremos:

$$7a + (-8b) + (-15a) + 9b + (-4c) + 8 = -8a + b - 4c + 8.$$

5) Sumar: $\frac{2}{3}a^2; \frac{1}{2}ab; -2b^2; -\frac{3}{4}ab; \frac{1}{3}a^2; -\frac{3}{5}b^2$

$$\frac{2}{3}a^2 + \frac{1}{2}ab + (-2b^2) + \left(-\frac{3}{4}ab\right) + \frac{1}{3}a^2 + \left(-\frac{3}{5}b^2\right)$$

$$= \frac{2}{3}a^2 + \frac{1}{2}ab - 2b^2 - \frac{3}{4}ab + \frac{1}{3}a^2 - \frac{3}{5}b^2 = a^2 - \frac{1}{4}ab - \frac{13}{5}b^2.\ R.$$

Ejemplos:

1. $\boldsymbol{-2x; 3y} = -2x + 3y$
2. $\boldsymbol{9ab; -15ab} = 9ab - 15ab = -6ab$
3. $\boldsymbol{-\frac{1}{2}xy; -\frac{1}{2}xy} = -\frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}xy = -\frac{2}{2}xy = -xy$
4. $\boldsymbol{-4x^2y;\ \frac{3}{8}x^2y} = \frac{-32+3}{8}x^2y = -\frac{29}{8}x^2$

Taller en clase

1. $\boldsymbol{mn; -11mn} = mn - 11mn = -10mn$
2. $\boldsymbol{a; -b; c} = a - b + c$
3. $\boldsymbol{x^2; -3xy; -4y^2} = x^2 - 3xy - 4y^2$
4. $\boldsymbol{x^3; -x^2y; 6} = x^3 - x^2y + 6$
5. $\boldsymbol{2a; -b; 3a} = 2a + 3a - 6 = 5a - b$
6. $\boldsymbol{-m; -8n; 4n} = -m - 8n + 4n = -m - 4n$
7. $\boldsymbol{\frac{1}{2}x; \frac{2}{3}y; -\frac{3}{4}x} = \frac{4-6}{8}x + \frac{2}{3}y = -\frac{4}{8}x + \frac{2}{3}y = -\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y$
8. $\boldsymbol{-\frac{3}{5}m; -m; -\frac{2}{3}mn} = \frac{-3-5}{5}m - \frac{2}{3}mn = -\frac{8}{5}m - \frac{2}{3}mn$

Suma de Polinomios

1) Sumar $a - b;\ 2a + 3b - c$ y $-4a - 5b$.

La suma suele indicarse incluyendo los sumandos dentro de paréntesis; así:

$$(a - b) + (2a + 3b - c) + (-4a + 5b).$$

Ahora colocamos todos los términos de estos polinomios unos a continuación de otros con sus propios signos, y tendremos:

$$a - b + 2a + 3b - c - 4a - 5b = -a + 7b - c.\ \text{R.}$$

En la práctica, suelen colocarse los polinomios unos debajo de los otros de modo que los términos semejantes queden en columna; se hace la reducción de estos, separándolos unos de otros con sus propios signos.

Así la suma anterior se verifica de esta manera:

$$\begin{array}{r}
a - b \\
2a + 3b - c \\
-4a + 5b \\
\hline
-a + 7b - c.\quad R.
\end{array}$$

2) Sumar $3m - 2n + 4; 6n + 4p - 5; 8n - 6\ y\ m - n - 4p$.

Tenemos:

$$\begin{array}{rrrr}
3m & -2n & & +4 \\
 & 6n & +4p & -5 \\
 & 8n & & -6 \\
m & -n & -4p & \\
\hline
4m & +11n & & -7
\end{array}$$

Prueba de la suma por el valor numérico

Se halla el valor numérico de los sumandos y de la suma para los mismos valores, que fijamos nosotros, de las letras. Si la operación está correcta, la suma algebraica de los valores numéricos de los sumandos debe ser igual al valor numérico de la suma.

Sumar $8a - 3b + 5c - d, -2b + c - 4d\ \ y - 3a + 5b - c$ y probar el resultado por el valor numérico para $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$

Tendremos:

$$\begin{array}{rrrrcrrrrcr}
8a & -3b & +5c & -d & = & 8 & -6 & +15 & -4 & = & 13 \\
 & -2b & +c & -4d & = & & -4 & +3 & -16 & = & -17 \\
-3a & +5b & -c & & = & -3 & +10 & -3 & & = & 4 \\
\hline
5a & & +5c & -5d & = & 5 & & +15 & -20 & = & 0
\end{array}$$

La suma de los valores numéricos de los sumandos $13 - 17 + 4 = 0$, igual que el valor numérico de la suma que también es cero.

Ejemplos:

1. $\boldsymbol{9x - 3y + 5;\ -x - y + 4;\ -5x + 4y - 9}$

$$\begin{array}{r} 9x - 3y + 5 \\ -\ x\ - y + 4 \\ -5x + 4y - 9 \\ \hline 3x \end{array}$$

2. $\boldsymbol{p + q + r;\ -2p - 6q + 3r;\ p + 5q - 8r}$

$$\begin{array}{r} p + q + r \\ -2p - 6q + 3r \\ p + 5q - 8r \\ \hline -4r \end{array}$$

3. $\boldsymbol{-am + 6mn - 4s;\ -am - 5mn + 6s;\ 3m - 5mn - 2s}$

$$\begin{array}{l} -am + 6mn - 4s \\ -am - 5mn + 6s \\ +3m - 5mn - 2s \\ \hline +am - 4mn \end{array}$$

4. $\boldsymbol{2a + 3b;\ 6b + 4c;\ -a + 8c}$

$$\begin{array}{l} 2a + 3b \\ \quad\ +6b + 4c \\ -a \qquad\ + 8c \\ \hline +a + 9b + 4c \end{array}$$

Taller en Clase

1. $\mathbf{2a + 3b; +5c - 4; +8a + 6; +7c - 9}$

$$\begin{array}{llll}
2a + 3b, + & 5c & & \\
 & + \ 5c & -4 & \\
8a & & +6 & \\
 & + \ 7c & -9 & \\
10a + 3b & +12c & -7 &
\end{array}$$

2. $\mathbf{2x - 3y; +5z + 9; +6x - 4; +3y - 5}$

$$\begin{array}{llll}
2x - 3y & & & \\
 & +5z + 9 & & \\
6x & & -4 & \\
 \ \ +3y & & -5 & \\
\hline
8x & +5z & &
\end{array}$$

3. $\mathbf{2a + 3b; +5c - 4; +8a + 6; +7c - 9}$

$$\begin{array}{lll}
2a + 3b & & \\
 & + \ 5c & -4 \\
8a & & +6 \\
 & + \ 7c & -9 \\
\hline
10a + 3b & +12c & -7
\end{array}$$

4. $\mathbf{6m^{a+1} - 7m^{a+2} - 5m^{a+3}; \ 4m^{a+1} - 7m^{a+2} - m^{a+3}; \ -5m^{a+1} + 3m^{a+2} + 12m^{a+3}}$

$$\begin{array}{lll}
6m^{a+1} & -7m^{a+2} & -\ 5m^{a+3} \\
4m^{a+1} & -7m^{a+2} & -\ m^{a+3} \\
-5m^{a+1} & +3m^{a+2} & +\ 12m^{a+3} \\
\hline
5m^{a+1} & -11m^{a+2} & +6\,m^{a+3}
\end{array}$$

5. $\mathbf{-5a - 2b - 3c; \ 7a - 3b + 5c; \ -8a + 5b - 3c}$

$$\begin{array}{l}
-5a - 2b - 3c \\
+7a - 3b + 5c \\
-8a + 5b - 3c \\
\hline
-6a \qquad - \ c
\end{array}$$

Sumar $3x^2 - 4xy + y^2$; $-5xy + 6x^2 - 3y^2$; y $-6y^2 - 8xy - 9x^2$

Si los polinomios que se suman pueden ordenarse con relación a una letra, deben ordenarse todos con relación a una misma letra antes de sumar.

Así, en este caso vamos a ordenar en orden descendente a x y tendremos:

$$\begin{array}{r} +3x^2 - 4xy + \ \ y^2 \\ +6x^2 - 5xy - 3y^2 \\ -9x^2 - 8xy - 6y^2 \\ \hline -17xy - 8y^2 \end{array}$$

Sumar $a^3b - b^4 + ab^3$; $-2a^2b^2 + 4ab^3 + 2b^4$; y $5a^3b - 4ab^3 - 6a^2b^2 - b^4 - 6$

Ordenado con relación a la a se tiene:

$$\begin{array}{lllll} a^3b & & +ab^3 & -b^4 & \\ & -2a^2b^2 & +4ab^3 & +2b^4 & \\ 5a^3b & -6a^2b^2 & -4ab^3 & -b^4 & -6 \\ \hline 6a^3b & -8a^2b^2 & -ab^3 & & -6 \end{array}$$

Ejemplos:

1. $\boldsymbol{x^2 + 4x;\ -5x + x^2}$

$$\begin{array}{r} x^2 + 4x \\ x^2 - 5x \\ \hline 2x^2 - x \end{array}$$

2. $\boldsymbol{-x^2 + 3x;\ x^3 + 6}$

$$\begin{array}{llll} & -x^2 & +3x & \\ x^3 & & & +6 \\ \hline x^3 & -x^2 & +3x & +6 \end{array}$$

3. $\boldsymbol{m^2 + n^2;\ -3mn + 4n^2;\ -5m^2 - 5n^2}$

$$\begin{array}{lll} m^2 & +\ n^2 & \\ -5m^2 & -5n^2 & \\ & +4n^2 & -3mn \\ \hline -4m^2 & & -3mn \end{array}$$

4. $\boldsymbol{-7x^2 + 5x - 6;\ 8x - 9 + 4x^2;\ -7x + 14 - x^2}$

$$\begin{array}{l} -7x^2 + 5x - 6 \\ +4x^2 + 8x - 9 \\ -\ \ x^2 - 7x + 14 \\ -4x^2 + 6x - 1 \end{array}$$

Taller en clase

1. $\boldsymbol{\frac{2}{3}a^2 + \frac{1}{5}ab - \frac{1}{2}b^2; +\frac{5}{6}a^2 - \frac{1}{10}ab + \frac{1}{6}b^2; -\frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{20}ab - \frac{1}{3}b^2}$

$$\begin{array}{rrr}
+\frac{2}{3}a^2 & +\frac{1}{5}ab & -\frac{1}{2}b^2 \\
+\frac{5}{6}a^2 & -\frac{1}{10}ab & +\frac{1}{6}b^2 \\
-\frac{1}{12}a^2 & +\frac{1}{20}ab & -\frac{1}{3}b^2 \\
+\frac{17}{12}a^2 & +\frac{3}{20}ab & -\frac{2}{3}b^2
\end{array}$$

2. $\boldsymbol{\frac{2}{3}m^3 - \frac{1}{4}mn^2 + \frac{2}{5}n^3;\ +\frac{1}{8}mn^2 - \frac{3}{5}n^3 + \frac{1}{6}m^2n;\ m^3 - \frac{1}{2}m^2n - n^3}$

$$\begin{array}{rrrr}
\frac{2}{3}m^3 & & -\frac{1}{4}mn^2 & +\frac{2}{5}n^3 \\
 & +\frac{1}{6}m^2n & +\frac{1}{8}mn^2 & -\frac{3}{5}n^3 \\
m^3 & -\frac{1}{2}m^2n & & -n^3 \\
\hline
\frac{5}{3}m^3 & -\frac{1}{3}m^2n & -\frac{1}{8}mn^2 & -\frac{6}{5}n^3
\end{array}$$

3. $\boldsymbol{x^4 - x^2 + 5, +\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{8}x - 3, -\frac{3}{5}x^4 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{3}{4}x}$

$$\begin{array}{rrrrr}
x^4 & & -x^2 & & +5 \\
 & +\frac{2}{3}x^3 & & -\frac{3}{8}x & -3 \\
-\frac{3}{5}x^4 & +\frac{5}{6}x^3 & & -\frac{3}{4}x & \\
\hline
+\frac{2}{5}x^4 & +\frac{3}{2}x^3 & -x^2 & -\frac{9}{8}x & +2
\end{array}$$

Tarea

1. $3x + x^3;\ -4x^2 + 5; -x^3 + 4x^2 - 6$
2. $a^3 - 4a + 5;\ a^3 - 2a^2 + 6;\ a^2 - 7a + 4$
3. $a^3 - b^3;\ 5a^2b - 4ab^2; a^3 - 7ab^2 - b^3$
4. $x^4 - x^2 + x;\ x^3 - 4x^2 + 5; 7x^2 - 4x + 6$
5. $a^6 + a^4 + 6; a^5 - 3a^3 + 8;\ a^3 - a^2 - 14$
6. $\frac{1}{3}x^3 + 2y^3 - \frac{2}{5}x^2y + 3;\ -\frac{1}{10}x^2y + \frac{3}{4}xy^2 - \frac{3}{7}y^3; -\frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{8}xy^2 - 5$
7. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}xy; +\frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2$
8. $a^2 + \frac{1}{2}ab; -\frac{1}{4}ab + \frac{1}{2}b^2; -\frac{1}{4}ab - \frac{1}{5}b^2$

Solucionario de la Tarea

1. $\boldsymbol{3x + x^3;\ -4x^2 + 5; -x^3 + 4x^2 - 6}$

$$\begin{array}{llll} +x^3 & & +3x & \\ -x^3 & +4x^2 & & -6 \\ & -4x^2 & & +5 \\ & & +3x & -1 \end{array}$$

2. $\boldsymbol{a^3 - 4a + 5;\ a^3 - 2a^2 + 6;\ a^2 - 7a + 4}$

$$\begin{array}{lllll} a^3 & & -4a & +5 \\ a^3 & -2a^2 & & +6 \\ & +a^2 & -7a & +4 \\ \hline 2a^3 & -a^2 & -11a & +15 \end{array}$$

3. $\boldsymbol{a^3 - b^3;\ 5a^2b - 4ab^2; a^3 - 7ab^2 - b^3}$

$$\begin{array}{lllll} a^3 & & & -b^3 \\ & +5a^2b & -4ab^2 & \\ a^3 & & -7ab^2 & -b^3 \\ \hline 2a^3 & +5a^2b & -11ab^2 & -2b^3 \end{array}$$

4. $\boldsymbol{x^4 - x^2 + x;\ x^3 - 4x^2 + 5; 7x^2 - 4x + 6}$

$$\begin{array}{llllll} x^4 & & -x^2 & +x & \\ & +x^3 & -4x^2 & & +5 \\ & & +7x^2 & -4x & +6 \\ \hline x^4 & +x^3 & +2x^2 & -3x & +11 \end{array}$$

5. $\boldsymbol{a^6 + a^4 + 6; a^5 - 3a^3 + 8;\ a^3 - a^2 - 14}$

$$\begin{array}{llllll} a^6 & & +a^4 & & & +6 \\ & +a^5 & & -3a^3 & & +8 \\ & & & +a^3 & -a^2 & -14 \\ \hline a^6 & +a^5 & +a^4 & -2a^3 & -a^2 & \end{array}$$

Suma de polinomios con coeficientes fraccionarios

6. $\frac{1}{3}x^3 + 2y^3 - \frac{2}{5}x^2y + 3;\ -\frac{1}{10}x^2y + \frac{3}{4}xy^2 - \frac{3}{7}y^3; -\frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{8}xy^2 - 5$

$$
\begin{array}{rrrrr}
+\frac{1}{3}x^3 & -\frac{2}{5}x^2y & & +2y^3 & +3 \\
 & -\frac{1}{10}x^2y & +\frac{3}{4}xy^2 & -\frac{3}{7}y^3 & \\
 & & +\frac{1}{8}xy^2 & -\frac{1}{2}y^3 & -5 \\
\hline
+\frac{1}{3}x^3 & -\frac{1}{2}x^2y & +\frac{7}{8}xy^2 & -\frac{15}{14}y^3 & -2
\end{array}
$$

7. $\boldsymbol{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}xy; +\frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2}$

$$
\begin{array}{rrr}
\frac{1}{2}x^2 & +\frac{1}{3}xy & \\
 & +\frac{1}{2}xy & +\frac{1}{4}y^2 \\
\hline
\frac{1}{2}x^2 & +\frac{5}{6}xy & +\frac{1}{4}y^2
\end{array}
$$

8. $\boldsymbol{a^2 + \frac{1}{2}ab; -\frac{1}{4}ab + \frac{1}{2}b^2; -\frac{1}{4}ab - \frac{1}{5}b^2}$

$$
\begin{array}{rrr}
a^2 & +\frac{1}{2}ab & \\
 & -\frac{1}{4}ab & +\frac{1}{2}b^2 \\
 & -\frac{1}{4}ab & -\frac{1}{5}b^2 \\
\hline
a^2 & & +\frac{3}{10}b^2
\end{array}
$$

Resta de expresiones algebraicas

La resta o sustracción es una operación que tiene por objeto, dada una suma de dos sumados (minuendo) y uno de ellos (sustraendo), hallar el otro sumando (resta o diferencia).
Es evidente, de esta definición, que **la suma del sustraendo y la diferencia tiene que ser el minuendo**.

Si de a (minuendo) queremos restar b (sustraendo), la diferencia sera $a - b$.

En efecto: $a - b$ será la diferencia si sumada con el sustraendo b reproduce el minuendo a, y en efecto: $a - b + b = a$

Regla general para restar
Se escribe el minuendo con sus propios signos y a continuación el sustrayendo con los signos cambiados y se reducen los términos semejantes, si los hay

Resta de monomios

1. De -4 restar 7

Escribimos el minuendo -4 con su propio signo y a continuación el sustraendo 7 con el signo cambiado y la resta será:

$$-4 - 7 = -11$$

En efecto: -11 es la diferencia sumada con el sustraendo 7 produce el minuendo -4:

$$-11 + 7 = -4$$

2. De $4b$ restar $2a$

Escribimos el minuendo $2a$ con su signo y a continuación el sustraendo 7 con el signo cambiado y la resta será:

$$4b - 2a$$

En efecto: $4b - 2a$ es la diferencia, porque sumada con el sustraendo $4b$ produce el minuendo $-2a$:

$$2a - 4b + 4b = 4a$$

3. De $4a^2b$ restar $-5a^2b$

Escribimos el minuendo $-5a^2b$ con su signo y a continuación el sustraendo $4a^2b$ con el **signo cambiado** y tengo:

$$-5a^2b - 4a^2b = -9a^2b$$

$-9a^2b$ es la diferencia, porque sumada con el sustraendo $4a^2b$ produce el minuendo $-5a^2b$:

$$-9a^2b - 4a^2b = -5a^2b$$

4. De 7 restar -4

Cuando el signo es negativo suele incluirse dentro de un paréntesis para indicar la operación, de este modo distinguimos el signo "$-$" que indica la operación, de este modo distinguimos el signo "$-$" que señala el carácter negativo del sustraendo así:

$$7-(-4)=11$$

El signo "$-$" delante del paréntesis esta para indicar la resta y este signo no tiene mas objeto que decimos, de acuerdo con la regla general para restar, que debemos cambiar el signo al sustraendo -4. Poe eso a continuación del minuendo 7 escribimos $+4$.

5. De $7x^3y^4$ restar $-8x^3y^4$
   Tendremos $7x^3y^4-(-8x^3y^4)=7x^3y^4+8x^3y^4=15x^3y^4$

6. De $-\frac{1}{2}ab$ restar $-\frac{3}{4}ab$
   Tendremos $-\frac{1}{2}ab-\frac{3}{4}ab=-\frac{1}{2}ab+\frac{3}{4}ab=\frac{1}{4}ab$

Carácter general de la resta algebraica

En aritmética la resta siempre implica disminución, mientras que la resta algebraica tiene un carácter más general, pues puede significar **disminución o aumento.** Hay restas algebraicas, como las de los ejemplos 4 y 5 anteriores, en que la diferencia es **mayor que el minuendo.** Los ejemplos 4, 5 y 6 nos dicen que restar **una cantidad negativa** equivale a la **suma de la misma cantidad positiva.**

Resta de polinomios

Cuando el sustraendo es un polinomio, hay que restar del minuendo **cada uno de los términos del sustraendo,** así que a continuación del minuendo escribiremos el sustraendo **cambiándole el signo a todos sus términos.**

1. De $4x-3y+z$ restar $2x+5z-6$

La sustracción se indica incluyendo el sustraendo en un paréntesis precedido del signo "$-$", así:

$$4x-3y+z-(2x+5z-6)$$

Ahora dejemos el minuendo con sus propios signos y a continuación escribimos el sustraendo cambiándole el signo a todos sus términos y tendremos:

$$4x-3y+z-2x-5z+6$$

Reduciendo los términos semejantes, tendremos:

$$2x - 3y - 4z + 6$$

En la práctica suele escribirse el sustraendo con sus signos cambiados debajo del minuendo, de modo que los términos semejantes queden en columna y se hace la reducción de estos, separándolos unos de otros con sus propios signos.

Así, la restra anterior se verifica de esta manera

$$\begin{array}{r} 4x - 3y + z \\ -2x \qquad - 5z + 6 \\ \hline 2x - 3y - 4z + 6 \end{array}$$

En el ejemplo anterior, sumando la diferencia $2x - 3y - 4z + 6$ con el sustraendo Tendremos:

$$\begin{array}{l} 2x - 3y - 4z + 6 \\ 2x \qquad + 5z - 6 \\ \hline 4x - 3y + z \text{ (minuendo)} \end{array}$$

2. Restar $-4a^5b - ab^5 + 6a^3b^3 - a^2b^4 - 3b^6$ de $8a^4b^2 + a^6 - 4a^2b^2 + 6ab^5$

Al escribir el sustraendo con sus signos cambiados, debajo del minuendo deben ordenase ambos con relación a una misma letra.

Así, en este caso, ordenando en orden descendente con relación a la a tendremos:

$$\begin{array}{r} a^6 \qquad + 8a^4b \qquad - 4a^2b^2 + 6ab^5 \\ + 4a^5b \qquad - 6a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 - 3b^6 \\ \hline a^6 + 4a^5b + 8a^4b - 6a^3b^3 - 3a^2b^2 + 7ab^5 - 3b^6 \end{array}$$

La diferencia sumada con el sustraendo debe darnos el minuendo:

$$\begin{array}{l} a^6 + 4a^5b + 8a^4b - 6a^3b^3 - 3a^2b^2 + 7ab^5 - 3b^6 \\ - 4a^5b \qquad + 6a^3b^3 - a^2b^4 - ab^5 + 3b^6 \\ \hline a^6 \qquad + 8a^4b \qquad - 4a^2b^2 + 6ab^5 \text{ (minuendo)} \end{array}$$

1) Restar $-8a^2x + 6 - 5ax^2 - x^3$ de $7a^3 + 8a^2x + 7ax^2 - 4$ y probar el resultado por el valor numérico.
Efectuemos la resta ondeada con relación a x.

$$\begin{array}{r} 7ax^2 + 8a^2x + 7a^3 - 4 \\ x^3 + 5ax^2 + 8a^2x \qquad - 6 \\ \hline x^3 + 12ax^2 + 16a^2x + 7a^3 - 10 \end{array}$$

La prueba del valor numérico se efectúa hallando el valor numérico del minuendo, del sustraendo con los signos cambiados y de la diferencia para un mismo valor de letras (el valor de cada letra lo escogemos nosotros).
Reduciendo el valor numérico del minuendo y del sustraendo con el signo cambiado, debe darnos el valor numérico de la diferencia.

Así, en el ejemplo anterior para $a = 1$, $x = 2$, tendremos:

$$\begin{array}{rcl} 7ax^2 + 8a^2x + 7a^3 - 4 & = & 28 + 16 + 7 - 4 = 47 \\ \underline{x^3 + 5ax^2 + 8a^2x \qquad - 6} & = & \underline{8 + 20 + 16 \qquad - 6} = 38 \\ x^3 + 12ax^2 + 16a^2x + 7a^3 - 10 & = & 8 + 48 + 32 + 7 - 10 = 85 \end{array}$$

$47 + 38 = 85$ cumple

2) De 1 restar $x^2 + x + 5$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \underline{-5 - x - x^2} \\ -4 - x - x^2 \end{array}$$

El sustraendo $x^2 + x + 5$ sumando con la diferencia $-4 - x - x^2$ nos da el minuendo:

$$\begin{array}{r} x^2 + x + 5 \\ \underline{-x^2 - x - 4} \\ 1 \text{ (minuendo)} \end{array}$$

3) Restar $9ab^3 - 11a^3b + 8a^2b^2 - b^4$ de $a^4 - 1$

Tendremos:

$$\begin{array}{r} a^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 1 \\ \underline{11a^3b - 8a^2b^2 - 9ab^3 + b^4 \quad} \\ a^4 + 11a^3b - 8a^2b^2 - 9ab^3 + b^4 - 1 \end{array}$$

Resta de polinomios con coeficientes fraccionarios

Ejemplos:

a) De $\frac{3}{5}x^3$ restar $-\frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{3}xy^2 + \frac{2}{8}xy^2 - \frac{1}{2}y^3$

Tendremos:

$$\begin{array}{l} \frac{3}{5}x^3 \\ \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}xy^2 - \frac{2}{8}xy^2 + \frac{1}{2}y^3 \\ \hline \frac{11}{10}x^3 + \frac{2}{3}xy^2 - \frac{2}{8}xy^2 + \frac{1}{2}y^3 \end{array}$$

b) Restar $-4a^3b^3 - \frac{1}{10}ab + \frac{2}{3}a^2b^2 - 9$ de $-\frac{3}{5}ab + \frac{1}{6}a^2b^2 - 8$

Tendremos:

$$\begin{array}{c} \frac{1}{6}a^2b^2 - \frac{3}{5}ab - 8 \\ 4a^3b^3 - \frac{2}{3}a^2b^2 + \frac{1}{10}ab + 9 \\ \hline 4a^3b^3 - \frac{1}{2}a^2b^2 - \frac{1}{2}ab + 1 \end{array}$$

Taller en clase

Restar los siguientes monomios

1. -8 restar 5
2. -7 restar 4
3. 8 restar 11
4. $2a$ restar $3b$
5. $3b$ restar 2

Restar los siguientes polinomios

1. $a+b$ restar $a-b$
2. $2x-3y$ restar $-x+2y$
3. $8a+b$ restar $-3a+4$
4. x^2-3x restar $-5x+6$
5. a^3-a^2b restar $7a^2b+9ab^2$
6. $x-y+z$ restar $-x+y-z$
7. Restar m^3+14m^2+9 de $14m^2-8n+16$
8. Restar $ab-bc+6cd$ de $8ab+5bc+6cd$

Restar los siguientes polinomios

1. 1 restar $a-1$
2. 0 restar $a-8$
3. -9 restar $3a+a^2-5$
4. 16 restar $5xy-x^2+16$
5. 1 restar $a^3-a^2b+ab^2$
6. x^3 restar $-x^3-8x^2y-6xy^2$

Restar los siguientes polinomios con coeficientes fraccionarios

1. $\frac{1}{2}a^2$ restar $-\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{3}ab-\frac{2}{5}b^2$
2. 15 restar $\frac{4}{5}xy+\frac{2}{3}yz-\frac{5}{9}$
3. $\frac{3}{5}bc$ restar $-\frac{3}{4}ab+\frac{1}{6}bc-\frac{2}{9}cd$

Resolución

Restar los siguientes monomios

1. -8 restar 5
   $-8 - 5 + 13$

2. -7 restar 4
   $-7 - 4 = -11$

3. 8 restar 11
   $8 - 11 = -3$

4. $2a$ restar $3b$
   $2a - 3b = 2a - 3b$

5. $3b$ restar 2
   $3b - 2 = 3b - 2$

Restar los siguientes polinomios

1. $a + b$ restar $a - b$

$$\begin{array}{r} a + b \\ -a + b \\ \hline 2b \end{array}$$

2. $2x - 3y$ restar $-x + 2y$

$$\begin{array}{l} 2x - 3y \\ x - 2y \\ \hline 3x - 5y \end{array}$$

3. $8a + b$ restar $-3a + 4$

$$\begin{array}{l} 8a + b \\ 3a \qquad - 4 \\ \hline 11a + b - 4 \end{array}$$

4. $x^2 - 3x$ restar $-5x + 6$

$$\begin{array}{l} x^2 - 3x \\ \quad\quad 5x - 6 \\ \hline x^2 + 2x - 6 \end{array}$$

5. $a^3 - a^2b$ restar $7a^2b + 9ab^2$

$$\begin{array}{l} a^3 - a^2b \\ \quad -7a^2b - 9ab^2 \\ \hline a^3 - 8a^2b - 9ab^2 \end{array}$$

6. $x - y + z$ restar $-x + y - z$

$$\begin{array}{l} x - y + z \\ x - y + z \\ \hline 2x - 2y + 2z \end{array}$$

7. Restar $m^3 + 14m^2 + 9$ de $14m^2 - 8n + 16$

$$\begin{array}{l} \;14m^2 - 8n + 16 \\ -14m^2 \quad\quad - 9 - m^3 \\ \hline \quad\quad -8n \; + 7 - m^3 \end{array} = -m^3 - 8n + 7$$

8. Restar $ab - bc + 6cd$ de $8ab + 5bc + 6cd$

$$\begin{array}{l} \;8ab + 5bc + 6cd \\ -ab \;\; + bc \;\; - 6cd \\ \hline \;7ab + 6bc \end{array}$$

Restar los siguientes polinomios

1. 1 restar $a - 1$

$$\begin{array}{r} 1 \\ -a + 1 \\ \hline -a + 2 \end{array}$$

2. 0 restar $a - 8$

$$\begin{array}{r} 0 \\ -a + 8 \\ \hline -a + 8 \end{array}$$

3. -9 restar $3a + a^2 - 5$

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad -9 \\ \underline{-3a - a^2 + 5} \\ -3a - a^2 - 4 \; = -a^2 - 3a - 4 \end{array}$$

4. 16 restar $5xy - x^2 + 16$

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad 16 \\ \underline{-5xy + x^2 - 16} \\ -5xy + x^2 \qquad = +x^2 - 5xy \end{array}$$

5. 1 restar $a^3 - a^2b + ab^2$

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad 1 \\ \underline{-a^3 + a^2b - ab^2} \\ -a^3 + a^2b - ab^2 + 1 \end{array}$$

6. x^3 restar $-x^3 - 8x^2y - 6xy^2$

$$\begin{array}{l} x^3 \\ \underline{x^3 + 8x^2y + 6xy^2} \\ 2x^3 + 8x^2y + 6xy^2 \end{array}$$

Restar los siguientes polinomios con coeficientes fraccionarios

1. $\frac{1}{2}a^2$ restar $-\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{3}ab - \frac{2}{5}b^2$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}a^2 \\ \underline{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{3}ab + \frac{2}{5}b^2} \\ \qquad \frac{2+1}{4}a^2 - \frac{1}{3}ab - \frac{2}{5}b^2 \; = \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{3}ab - \frac{2}{5}b^2 \end{array}$$

2. 15 restar $\frac{4}{5}xy + \frac{2}{3}yz - \frac{5}{9}$

$$15$$
$$-\frac{4}{5}xy - \frac{2}{3}yz + \frac{5}{9}$$
$$-\frac{4}{5}xy - \frac{2}{3}yz + \frac{135+5}{9} = -\frac{4}{5}xy - \frac{2}{3}yz + \frac{140}{9}$$

3. $\frac{3}{5}bc$ restar -$\frac{3}{4}ab + \frac{1}{6}bc - \frac{2}{9}cd$

$$\frac{3}{5}bc$$
$$-\frac{1}{6}bc + \frac{3}{4}ab + \frac{2}{9}cd$$
$$\frac{18-5}{30}bc + \frac{3}{4}ab + \frac{2}{9}cd = \frac{3}{4}ab + \frac{13}{30}bc + \frac{2}{9}cd$$

4. Restar $\frac{5}{6}a^2$ de $\frac{3}{8}a^2 - \frac{5}{6}a$

$$\frac{3}{8}a^2 - \frac{5}{6}a$$
$$-\frac{5}{6}a^2$$
$$\frac{9-20}{24}a^2 - \frac{5}{6}a = -\frac{5}{6}a^2 - \frac{5}{6}a$$

5. Restar $\frac{1}{2}a - \frac{3}{5}b$ de $8a + 6b - 5$

$$8a + 6b - 5$$
$$-\frac{1}{2}a + \frac{3}{5}b$$
$$\frac{16-1}{2}a + \frac{30+3}{5}b - 5 = \frac{15}{2}a + \frac{33}{5}b - 5$$

Tarea

Restar los siguientes monomios

1. -1 restar -9
2. $4x$ restar $6b$
3. $-8x$ restar -3
4. $-9a^2$ restar $-5b^2$
5. $6a^n$ restar $-5a^n$
6. 5 restar $-\frac{1}{2}$

Restar los siguientes polinomios

1. $x^2 + y^2 - 3xy$ restar $3x^2 - y^2 - 4xy$
2. $x^3 - x^2 + 6$ restar $5x^2 - 4x + 6$
3. $a^3 - 6ab^2 + 9a$ restar $-8a + 15a^2b + 5$
4. Restar $-5a + b$ de $-7a + 5$
5. Restar $x^2 - 5x$ de $-x^2 + 6$
6. Restar $x^3 - xy^2$ de $x^2y + 5xy^2$

Restar los siguientes polinomios

1. a^3 restar $-8a^2b + 6ab^2 - b^3$
2. y^4 restar $-5x^3y + 7x^2y^2 - 8xy^3$
3. m^4 restar $a^3m - a^4 + 7a^2m^2 - 18am^3 + 5m^4$
4. 16 restar $b - a + c + d - 14$
5. $x^2 - 1$ restar $xy + y^2$
6. $a^3 + 6$ restar $5a^2b - 8ab^2 + b^3$

Restar los siguientes polinomios con coeficientes fraccionarios

1. $\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b$ restar $\frac{4}{5}a + \frac{2}{9}b - \frac{1}{2}$
2. $\frac{5}{9}x^2 - \frac{3}{8}y^2$ restar $\frac{5}{7}xy + \frac{1}{10}y^2 - \frac{3}{11}$
3. $\frac{5}{6}m^3 + \frac{2}{9}n^3$ restar $-\frac{1}{2}m^2n + \frac{3}{8}mn^2 - \frac{1}{5}n^3$
4. Restar $\frac{7}{9}x^2y$ de $x^3 + \frac{2}{3}x^2y - 6$

Solucionario de la Tarea

Restar los siguientes monomios

1. -1 restar -9
   $-1-(-9)=-1+9=8$

2. $4x$ restar $6b$
   $4x-6b=4x-6b$

3. $-8x$ restar -3
   $-8x-3=-8x-3$

4. $-9a^2$ restar $5b^2$
   $-9a^2-5b^2=-9a^2+5b^2$

5. $6a^n$ restar $-5a^n$
   $6a^n-(-5a^n)=6a^n+5a^n=11a^n$

6. 5 restar $-\frac{1}{2}$
   $$5-\left(-\frac{1}{2}\right)=5+\frac{1}{2}=\frac{10+1}{2}=\frac{11}{2}$$

Restar los siguientes polinomios

1. x^2+y^2-3xy restar $3x^2-y^2-4xy$
   $$\begin{array}{r}
x^2+y^2\ \ -3xy \\
-3x^2+y^2\ \ +4xy \\
\hline
-2x^2+2y^2+xy
\end{array}$$

2. x^3-x^2+6 restar $5x^2-4x+6$
   $$\begin{array}{l}
x^3-\ x^2+6 \\
\qquad -5x^2\ -6+4x \\
\hline
x^3-6\,x^2\qquad +4x
\end{array}$$

3. $a^3 - 6ab^2 + 9a$ restar $-8a + 15a^2b + 5$

$$\begin{array}{l} a^3 - 6ab^2 + 9a \\ \qquad\qquad 8a - 15a^2b - 5 \\ \hline a^3 - 6ab^2 + 17a - 15a^2b - 5 \end{array} = a^3 - 15a^2b - 6ab^2 + 17a - 5$$

4. Restar $-5a + b$ de $-7a + 5$

$$\begin{array}{l} -7a + 5 \\ \ 5a \qquad - b \\ \hline -2a + 5 - b \end{array} = -2a - b + 5$$

5. Restar $x^2 - 5x$ de $-x^2 + 6$

$$\begin{array}{l} -x^2 + 6 \\ -x^2 \qquad + 5x \\ \hline -2x^2 + 6 + 5x \end{array} = -2x^2 + 5x + 6$$

6. Restar $x^3 - xy^2$ de $x^2y + 5xy^2$

$$\begin{array}{l} x^2y + 5xy^2 \\ \qquad +xy^2 \ - x^3 \\ \hline x^2y + 6xy^2 - x^3 \end{array} = -x^3 + x^2y + 6xy^2$$

Restar los siguientes polinomios

1. a^3 restar $-8a^2b + 6ab^2 - b^3$

$$\begin{array}{l} a^3 \\ \quad 8a^2b - 6ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 8a^2b - 6ab^2 + b^3 \end{array}$$

2. y^4 restar $-5x^3y + 7x^2y^2 - 8xy^3$

$$\begin{array}{l} y^4 \\ 5x^3y - 7x^2y^2 + 8xy^3 \\ \hline 5x^3y - 7x^2y^2 + 8xy^3 + y^4 \end{array}$$

3. m^4 restar $a^3m - a^4 + 7a^2m^2 - 18am^3 + 5m^4$

$$\begin{array}{l} \quad m^4 \\ -5m^4 + 18am^3 - 7a^2m^2 - a^3m + a^4 \\ \hline -4m^4 + 18am^3 - 7a^2m^2 - a^3m + a^4 \end{array}$$

4. 16 restar $b-a+c+d-14$

$$\begin{array}{l} 16 \\ \underline{14-b+a-c-d} \\ 30-b+a-c-d = 14+a-b-c-d+30 \end{array}$$

5. x^2-1 restar $xy+y^2$

$$\begin{array}{l} x^2-1 \\ \underline{\qquad -xy-y^2} \\ x^2-1-xy-y^2 = x^2-xy-y^2-1 \end{array}$$

6. a^3+6 restar $5a^2b-8ab^2+b^3$

$$\begin{array}{l} a^3 \qquad\qquad\qquad\qquad +6 \\ \underline{\quad -5a^2b+8ab^2-b^3} \\ a^3-5a^2b+8ab^2-b^3+6 \end{array}$$

Restar los siguientes polinomios con coeficientes fraccionarios

1. $\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b$ restar $\frac{4}{5}a+\frac{2}{9}b-\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b \\ \underline{-\frac{4}{5}a-\frac{2}{9}b+\frac{1}{2}} \\ \frac{5-8}{10}a-\frac{6+2}{9}b+\frac{1}{2} = -\frac{3}{10}a-\frac{8}{9}b+\frac{1}{2} \end{array}$$

2. $\frac{5}{9}x^2-\frac{3}{8}y^2$ restar $\frac{5}{7}xy+\frac{1}{10}y^2-\frac{3}{11}$

$$\begin{array}{l} \frac{5}{9}x^2-\frac{3}{8}y^2 \\ \underline{\qquad -\frac{1}{10}y^2-\frac{5}{7}xy+\frac{3}{11}} \\ \frac{5}{9}x^2-\frac{30+8}{80}y^2-\frac{5}{7}xy+\frac{3}{11} = \frac{5}{9}x^2-\frac{5}{7}xy-\frac{19}{40}y^2+\frac{3}{11} \end{array}$$

3. Restar $\frac{7}{9}x^2y$ de $x^3+\frac{2}{3}x^2y-6$

$$x^3+\frac{2}{3}x^2y-6$$
$$-\frac{7}{9}x^2y$$
$$x^3-\frac{6-7}{9}x^2y-6 \;=x^3-\frac{1}{9}x^2y-6$$

4. Restar $\frac{1}{2}a-\frac{3}{4}b+\frac{2}{3}c$ de $a+b-c$

$$a+\quad b-\quad c$$
$$-\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b-\frac{2}{3}c$$
$$\frac{2-1}{2}a+\frac{4+3}{4}b-\frac{3+2}{3}c=\frac{1}{2}a+\frac{7}{4}b-\frac{5}{3}c$$

5. Restar $m+n-p$ de $\frac{2}{3}m+\frac{5}{6}n+\frac{1}{2}p$

$$\frac{2}{3}m+\frac{5}{6}n+\frac{1}{2}p$$
$$-m-n+p$$
$$\frac{2-3}{3}m+\frac{5-6}{6}n+\frac{1+2}{2}p=-\frac{1}{3}m-\frac{1}{6}n+\frac{3}{2}p$$

Signos de agrupación

Los signos de agrupación o paréntesis son de cuatro clases: el paréntesis ordinario **( )**, el paréntesis angular o corchete **[ ]** las llaves **{ }** y el vínculo o barra

Uso de los signos de agrupación

Los signos de agrupación se emplean para indicar que las cantidades encerradas en ellos deben considerarse como un todo, o sea, como una sola cantidad.

Así, $a + (b - c)$, que equivale a $a + (+b - c)$, indica que la diferencia de $b - c$ debe sumarse con a, y ya sabemos que para efectuar esta suma escribimos a continuación de a las demás cantidades con su **propio signo** y tendremos: $a + (b - c) = a + b - c$

La expresión $x + (-2y + z)$ indica que la x hay que sumarle $-2y + z$; luego, a continuación de x, escribimos $-2y + z$ con sus propios signos y tendremos: $x + (-2y + z) = x - 2y + z$

Vemos, pues, que hemos suprimido el paréntesis **precedido del signo** +, dejando a cada una de las cantidades que estaban dentro de el con su propio signo.

La expresión: $a - (b + c)$, que equivale a $a - (+b + c)$, indica que se a hay que restarla suma de $b + c$ y como para restar escribimos el sustraendo **con los signos cambiados** a continuación del minuendo, tendremos: $a - (+b + c) = a - b - c$

La expresión $x - (-y + z)$ indica que de $x$hay que restar $-y + z$; y luego, cambiando los signos al sustraendo, tenemos: $x - (-y + z) = x + y - z$

Vemos, pues, que hemos suprimido el paréntesis precedido del signo $-$, ca~~mbiando el~~ signo a cada una de las cantidades que estaban encerradas en, el paréntesis. El paréntesis angular [ ], las llaves { } y el vínculo o barra tienen la misma significación que el paréntesis ordinario y se suprimen del mismo modo.

Se usan estos signos, que tienen distinta forma, pero igual significación, para mayor claridad en los casos en que una expresión que ya tiene uno o más signos de agrupación se incluye en otro signo de agrupación.

Supresión de signos de agrupación

Regla para suprimir signos de agrupación

1) Para suprimir signos de agrupación precedidos del signo + se deja el mismo signo que tengan a cada una de las cantidades que se hallan dentro de él.

2) Para suprimir signos de agrupación precedidos del signo $-$ se cambia el signo a cada una de las cantidades que se hallan dentro de él.

Ejemplos:

(1) Suprimir los signos de agrupación en la expresión $a + (b - c) + 2a - (a + b)$.
Esta expresión equivale a: $+a + (+b - c) + 2a - (+a + b)$.
Como el primer paréntesis va precedido del signo + lo suprimimos dejando a las cantidades que se hallen dentro con su propio signo y como el segundo paréntesis va precedido del signo $-$ lo suprimimos cambiando el signo a las cantidades que se hallan dentro y tendremos:
$a + (b - c) + 2a - (a + b) = a + b - c + 2a - a - b = 2a - c$. R.

(2) Suprimir los signos de agrupación en $5x + (-x - y) - [-y + 4x] + \{x - 6\}$.
El paréntesis y las llaves están precedidas del signo +, luego les suprimimos dejando las cantidades que se hallan dentro con su propio signo y como el corchete va precedido del signo$-$, lo suprimimos cambiando el signo a las cantidades que se hallan dentro, y tendremos:
$5x + (-x - y) - [-y + 4x] + \{x - 6\}$
$= 5x - x - y + y - 4x + x - 6$
$= x - 6.$ R.

(3) Simplificar $m + 4n - 6 + 3m - n + 2m - 1$
El vínculo o barra equivale a un paréntesis que encierra o las cantidades que se hallan debajo de él y su signo es el signo de la primera de las cantidades que están debajo de él.
Así, la expresión anterior equivale a $= m + (4n - 6) + 3m - (n + 2m - 1)$
$m + \overline{4n - 6} + 3m - \overline{n + 2m - 1}$
$= m + 4n - 6 + 3m - n - 2m + 1$
$= 2m + 3n - 5. \quad R.$

Taller en clase

1. $\boldsymbol{x - (x - y)}$.
$x - x + y = y$

2. $\boldsymbol{2x + 3y - 4x + 3y}$
$2x + 3y - 4x - 3y = -2x$

3. $\boldsymbol{a + (a - b) + (-a + b)}$
$a + a - b - a + b = a$

4. $\boldsymbol{x + y + x - y + z - x + y - z}$
$x + y + x - y + z - x - y + z = x - y + 2z$

5. $\boldsymbol{4m - (-2m - n)}$
$4m + 2m + n = 6m + n$

(4) Simplificar la expresión: $3a+\{-5x-[-a+(9x-a+x)]\}$.
Cuando unos signos de agrupación están incluidos dentro de otros, como en este ejemplo, se suprime uno en cada paso empezando por el más interior.
Así, en este caso, suprimimos primero el vínculo y tendremos:
$$3a+\{-5x-[-a+(9x-a-x)]\}.$$
Suprimiendo el paréntesis, tenemos:$3a+\{-5x-[a+9x-a-x]\}$
Suprimiendo el corchete, tenemos:$3a+a\{-5x+a-9x+a+x\}$
Suprimiendo las llaves, tenemos:$3a-5x+a-9x++a+x$
Suprimiendo términos semejantes tenemos, queda:$5a-13x.\ R.$

(5) Simplificar la expresión:
$-[-3a-\{b+[-a+(2a-b)-(-a+b)]+3b\}+4a]$
Empezando por los más interiores que son los paréntesis ordinarios, tenemos:
$-[-3a-\{b-a+2a-b+a-b+3b\}+4a]$
$-[-3a--b+a-2a+b-a+b-3b+4a]$
$$=3a+b-a+2a-b+a-b+3b-4a$$
$$=a+2b.$$

Taller en clase

1. $\boldsymbol{2m+[(m-n)-(m+n)]}$
   $2m-[m-n-m-n]$
   $2m-m+n+m+n$
   $=2m+2n$

2. $\boldsymbol{2x+[-5x-(-2y+\{-x+y\})]}$
   2x+[-5x-(-2y-x+y)]
   $2x+[-5x+2y+x-y]$
   $2x-5x+2y+x-y=-2x+y$

3. $\boldsymbol{(-x+y)-\{4x+2y+[-x-\overline{y+y}]\}}$
   $-x+y-\{4x+2y-x-y-x-y\}$
   $-x+y-4x-2y+x+y+y$
   $=-3x+y$

4. $\boldsymbol{-(-a+b)+[-(a+b)-(-2a+3b)+(-b+a-b)]}$
   $a-b+[-a-b+2a-3b-b+a-b]$
   $a-b-a-b\}2a-3b-b+a-b$
   $$=3a-7b$$

Introducción de signos de agrupación

Sabemos que → $a + (-b + c) = a - b + c$
luego, recíprocamente: → $a - b + c = a + (-b + c)$
Hemos visto también que → $a - (b - c) = a - b + c$
luego, recíprocamente: → $a - b + c = a - (b - c)$
Del propio modo, → $a + b - c - d - e = a + (b - c) - (d + e)$

Lo anterior nos dice que **los términos de una expresión pueden agruparse de cualquier modo.** Esta es la ley Asociativa de la suma y de la resta.
Podemos, pues, enunciar lo siguiente:

Reglas generales para introducir cantidades en signos de agrupación

1) Para introducir cantidades dentro de un signo de agrupación precedido del signo + se deja a cada una de las cantidades con el mismo signo que tengan.
2) Para introducir cantidades dentro de un signo de agrupación precedido del signo $-$ se cambia el signo a cada una de las cantidades que se incluyen en él.

Ejemplos:

(1) Introducir los tres últimos términos de la expresión: $x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ en un paréntesis precedido del signo +.
Dejamos a cada cantidad con el signo que tiene y tendremos:
$x^3 + (-2x^2 + 3x - 4)$. R.

(2) Introducir los tres últimos términos de la expresión: $x^2 - a^2 + 2ab - b^2$ en un paréntesis precedido del signo $-$
Cambiamos el signo a cada una de las tres últimas cantidades y tendremos:
$x^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$. R.

5.Multiplicación Algebraica

La **multiplicación** es una operación que tiene por objeto, con dos cantidades llamadas multiplicando y multiplicador, hallar una tercera cantidad, llamada producto. El multiplicando y multiplicador son llamados factores del producto.

- Esta es la **Ley Conmutativa** de la multiplicación.

El orden de los factores no altera el producto. Esta propiedad, demostrada en aritmética, se cumple también en algebra, Así, el producto *ab* puede escribirse como *ba*; el producto *abc* puede escribirse también *bac* o *acb*.

- Esta es la **Ley Asociativa** de la multiplicación.

Los factores de un producto pueden agruparse de cualquier modo.

Así, en el producto abcd, tenemos: $abcd = a \times (bcd) = (ab) \times (cd) = (abc) \times d$

- **Ley de los signos**

Distinguiremos dos casos:

1. **Signo del producto de dos factores.** En este caso la regla es: Signos iguales dan " $+$ " y signos diferentes dan " $-$ "

$$1.\ (+a) \times (+b) = +ab$$

Porque según la definición de multiplicar, el signo del producto tiene que ser respecto del signo del multiplicando lo que el signo del multiplicador es respecto de la **unidad positiva,** pero en este caso, el multiplicador tiene el **mismo signo** que la unidad positiva; luego, el producto necesita tener el **mismo signo** que el multiplicando, pero el signo multiplicando es " $+$ ", luego el signo del producto será " $+$ ".

$$2.\ (-a) \times (+b) = -ab$$

Porque teniendo el multiplicador el **mismo signo** que la unidad positiva, el producto necesita tener el mismo signo que el multiplicando, pero éste tiene " $-$ ", luego el producto tendrá " $-$ ".

$$3.\ (+a) \times (-b) = -ab$$

Porque teniendo el multiplicador signo contrario a la unidad positiva, el producto tendrá **signo contrario** al multiplicando, pero el multiplicando tiene " $+$ ", luego, el producto tendrá " $-$ ".

$$4.\ (-a) \times (-b) = -ab$$

Porque teniendo el multiplicador **signo contrario** a la unidad positiva, el producto ha de tener el **signo contrario** al multiplicando; pero este tiene " $-$ ", luego, el producto tendrá " $+$ ".

Lo anterior podemos resumirlo diciendo que

$+$ por $+$ da $+$.
$-$ por $-$ da $+$.
$+$ por $-$ da $-$.
$-$ por $+$ da $-$.

2. **Signo del producto de mas de dos factores**. En este caso, la regla es:

a) El signo del producto de varios factores es " $+$ " cuando tiene un numero par de factores negativos o ninguno.

Así, $(-a) \times (-b) \times (-c) \times (-d) = abcd$

En efecto: Según se demostró antes, el signo del producto de **dos factores negativos** es " $+$ "; luego, tendremos:

$$(-a) \times (-b) \times (-c) \times (-d) = (-a.-b) \times (-c.-d) = (+ab) \times (+cd) = abcd$$

b) El signo del producto de varios factores es " $-$ " cuando tiene un numero impar de factores negativos.

Así, $(-a) \times (-b) \times (-c) = -abc$

En efecto:

$$(-a) \times (-b) \times (-c) = [(-a) \times (-b)] \times (-c) = (+ab) \times (-c) = -abc$$

- **Ley de los exponentes**

Para la multiplicar potenciad de la misma base se escribe la misma base y se le pone por exponente la suma de los exponentes de los factores.

Así, $a^4 \times a^3 \times a^2 = a^{4+3+2} = a^9$

En efecto: $a^4 \times a^3 \times a^2 = aaaa \times aaa \times aa = aaaaaaaaa = a^9$

- **Ley de los Coeficientes**

El coeficiente del producto de dos factores es el producto de los coeficientes de los factores.

Así, $3a \times 4b = 12ab$

En efecto: Como el orden de los factores no altera el producto, tenemos:

$$3a \times 4b = 3 \times 4 \times a \times b = 12ab$$

- **Casos de la multiplicación**
  Distinguiremos tres casos
  1) Multiplicación de monomios.
  2) Multiplicación de un polinomio por un monomio.
  3) Multiplicación de polinomios.

Multiplicación de monomios

Regla: Se multiplican los coeficientes y a continuación de este producto se escriben las letras de los factores en orden alfabético, poniéndole a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores. El signo del producto vendrá dado por la **Ley de los signos.**

Ejemplos:

1. Multiplicar $2a^2$ por $3a^3$
   $2a^2 \times 3a^3 = 2 \times 3a^{2+3} = 6a^5$
   El signo del producto es " $+$ " porque " $+$ " por " $+$ " da " $+$ ".

2. Multiplicar $-xy^2$ por $-5mx^4y^3$
   $(-xy^2) \times (-5mx^4y^3) = 5mx^{1+4}y^{2+3} = 5mx^5y^5$
   El signo del producto es " $+$ " porque " $-$ " por " $-$ " da " $+$ ".

3. Multiplicar $3a^2b$ por $-4b^2x$
   $(3a^2b) \times (-4b^2x) = -3 \times 4a^2b^{1+2}x = -12a^2b^3x$
   El signo del producto es " $-$ " porque " $+$ " por " $-$ " da " $-$ ".

4. Multiplicar $-ab^2$ por $4a^mb^nc^3$
   $\left(-ab^2\right) \times 4a^mb^nc^3 = -1 \times 4a^{1+m}b^{2+n}c^3 = -4a^{1+m}b^{2+n}c^3$
   El signo del producto es " $-$ " porque " $-$ " por " $+$ " da " $-$ ".

5. Multiplicar $a^{x+1}b^{x+2}$ por $-3a^{x+2}b^3$
   $(a^{x+1}b^{x+2}) \times (-3a^{x+2}b^3) = -3a^{x+1+x+2}b^{x+2+3} = -3a^{2x+3}b^{x+5}$
   El signo del producto es " $-$ " porque " $+$ " por " $-$ " da " $-$ ".

6. Multiplicar $-a^{m+1}b^{n-2}$ por $-4a^{m-2}b^{2n+4}$
   $(-a^{m+1}b^{n-2}) \times (-4a^{m-2}b^{2n+4}) = 4a^{2m-1}b^{3n+2}$
   El signo del producto es " $+$ " porque " $-$ " por " $-$ " da " $+$ ".

- **Producto continuado**

Multiplicación de más de dos monomios.

Ejemplos:

1. Efectuar $(2a)(-3a^2b)(-ab^3)$
   $(2a)(-3a^2b)(-ab^3) = 6a^4b^4$
   El signo del producto es " $+$ " porque hay un número par de factores negativos.

2. Efectuar $(-x^2y)(-\frac{2}{3}x^m)(-\frac{3}{4}a^2y^n)$
   $$(-x^2y)\left(-\frac{2}{3}x^m\right)\left(-\frac{3}{4}a^2y^n\right) = -\frac{1}{2}a^2x^{m+2}x^2y^{n+1}$$
   El signo del producto es " $-$ " porque hay un número impar de factores negativos

Multiplicación de polinomios por monomios

Sea el producto $(a+b)c$

Multiplicar $(a+b)$ por c equivale a tomar la suma $(a+b)$ como sumando c tres veces, luego:

$$\begin{aligned}(a+b)\text{c} &= (a+b)+(a+b)+(a+b)\ldots\ldots c \text{ veces}\\ &= (a+a+a\ldots\ldots c\ veces)+(b+b+b\ldots\ldots c\ veces)\\ &= ac+bc\end{aligned}$$

Sea el producto $(a-b)c$

Tendremos: $(a-b)\text{c} = (a-b)+(a-b)+(a-b)\ldots\ldots c$ veces

$$\begin{aligned}&= (a+a+a\ldots\ldots c\ veces)-(b+b+b\ldots\ldots c\ veces)\\ &= ac-bc\end{aligned}$$

Podemos, pues enunciar lo siguiente:

- **Regla para multiplicar un polinomio por un monomio**

Se multiplica el monomio por cada uno de los siguientes términos del polinomio, teniendo en cuenta cada caso de la regla de los signos y separan los productos parciales con sus propios signos. Esta es la **Ley Distributiva** de la multiplicación.

Ejemplos:

1. Multiplicar $3x^3 - 6x + 7$ por $4ax^2$

Tendremos: $[3x^3 - 6x + 7] \times 4ax^2 = 3x^3(4ax^2) - 6x(4ax^2) + 7(4ax^2)$

$$= 12ax^4 - 24ax^3 + 28ax^2$$

La operación suele disponerse así => $3x^3 - 6x + 7$

$$\begin{array}{l} 4ax^2 \\ \hline 12ax^4 - 24ax^3 + 28ax^2 \end{array}$$

2. Multiplicar a $a^3x - 4a^2x^2 + 5ax^3 - x^4$ por $-2a^2x$

$$\begin{array}{l} a^3x - 4a^2x^2 + 5ax^3 - x^4 \\ -2a^2x \\ \hline -2a^5x^2 + 8a^4x^5 - 10a^3x^5 + 2a^2x^5 \end{array}$$

3. Multiplicar a $x^{n+1}y - 3x^ny^2 + 2x^{n-1}y^8 - x^{n-2}y^4$ por $-3x^2y^m$

$$\begin{array}{l} x^{n+1}y - 3x^ny^2 + 2x^{n-1}y^8 - x^{n-2}y^4 \\ -3x^2y^m \\ \hline -3x^{n+3}y^{m+1} + 9x^{n+2}y^{m+2} - 6x^{n+1}y^{m+8} + 3x^ny^{m+4} \end{array}$$

4. Multiplicar $\frac{2}{3}x^4y^2 - \frac{3}{5}x^2y^4 + \frac{5}{6}y^6$ por $-\frac{2}{9}a^2x^3y^2$

$$\begin{array}{l} \frac{2}{3}x^4y^2 - \frac{3}{5}x^2y^4 + \frac{5}{6}y^6 \\ -\frac{2}{9}a^2x^3y^2 \\ \hline -\frac{4}{27}a^2x^7y^4 + \frac{2}{15}a^2x^5y^6 - \frac{5}{27}a^2x^3y^8 \end{array}$$

Multiplicación de polinomios por polinomios

Sea el producto $(a+b-c)(m+n)$

Haciendo $m+n=y$ tendremos:

$$(a+b-c)(m+n)=(a+b-c)y=ay+by-cy$$

Sustituyendo y por

Su valor $(m+n)$

$$\boxed{\begin{aligned}&=a(m+n)+b(m+n)-c(m+n)\\&=am+an+bm+bn-cm-cn\\&=am+bm-cm+an+bn-cn\end{aligned}}$$

Podemos enunciar lo siguiente:

- **Regla para multiplicar dos polinomios**

Se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, teniendo en cuenta la **Ley de los signos**, y se reducen los términos semejantes.

Ejemplos:

1. Multiplicar $(a-4)$ por $(3+a)$
   Los dos factores deben ordenarse con relación a una misma letra.

$$\begin{array}{l}(a-4)\\(3+a)\\\hline a(a)-4(a)+3(a)-3(4)\end{array}\quad \text{o sea}\quad \begin{array}{l}(a-4)\\(3+a)\\\hline a^2-4a+3a-12=a^2-a-12\end{array}$$

Hemos multiplicado el primer término del multiplicador por los dos términos del multiplicando y el segundo término del multiplicador " 3 " por los dos términos del multiplicando, escribiendo los productos parciales, de modo que los términos semejantes queden en columna y hemos reducido los términos semejantes.

2. Multiplicar $(4x-3y)$ por $(-2y+5x)$
   Ordenando en orden descendente con relación a la x tendremos:

$$\begin{array}{r}(4x-3y)\qquad\qquad\quad\\(5x-2y)\qquad\qquad\quad\\\hline 4x(5x)-3y(5x)\qquad\qquad\quad\\-4x(2y)+3y(2y)\end{array}\quad \text{o sea}\quad \begin{array}{c}(4x-3y)\\(5x-2y)\\\hline 20x^2-15xy-8xy+6y^2\\\hline 20x^2-23xy+6y^2\end{array}$$

3. Multiplicar $(2+a^2-2a-a^3)$ por $(a+1)$

Ordenando en orden ascendente con relación a la "a" tenemos:

$$
\begin{array}{r}
(2+a^2-2a-a^3) \\
(a+1) \\
\hline
2-2a+a^2-a^3 \qquad\qquad \\
2a-2a^2+a^3-a^4 \\
\hline
2-a^2-a^4 \qquad\qquad\qquad\quad
\end{array}
$$

4. Multiplicar $(6y^2+2x^2-5xy)$ por $(3x^2-4y^2+2xy)$

Ordenando en orden descendente con relación a la "x" tenemos:

$$
\begin{array}{r}
(2x^2-5xy+6y^2) \\
(3x^2+2xy-4y^2) \\
\hline
6x^4-15x^3y+18x^2y^2 \\
4x^3y-10x^2y^2+12xy^3 \\
-8x^2y^2+20xy^3-24y^4 \\
\hline
6x^4-11x^3y+32xy^3-24y^4
\end{array}
$$

5. Multiplicar $(x-4x^2+x^3-3)$ por (x^3-1+4x^2)

Ordenando en orden descendente con relación a la "x" tenemos:

$$
\begin{array}{r}
(x^3-4x^2+x-3) \\
(x^3+4x^2-1) \\
\hline
x^6-4x^5+x^4-3x^3 \\
4x^5-16x^4+4x^3-12x^2 \\
-x^3+4x^2-x+3 \\
\hline
x^6-15x^4-8x^2-x+3
\end{array}
$$

6. Multiplicar $(2x-y+3z)$ por $(x-3y-4z)$

$$
\begin{array}{r}
(2x-y+3z) \\
(x-3y-4z) \\
\hline
2x^2-xy+3xz \\
-6xy \qquad +3y^2-9yz \\
-8xz \qquad +4yz-12z^2 \\
\hline
2x^2-7xy-5xz+3y^2-5yz-12z^2
\end{array}
$$

Multiplicación de polinomios de exponentes literales

Ejemplos

1. Multiplicar $a^{m+2}-4a^{m}-2a^{m+1}$ por $a^{2}-2a$

$$
\begin{array}{l}
a^{m+2}-2a^{m+1}-4a^{m}\\
\underline{a^{2}-2a\qquad\qquad\qquad}\\
a^{m+4}-2a^{m+3}-4a^{m+2}\\
\underline{\qquad\quad -2a^{m+3}+4a^{m+2}+8a^{m+1}}\\
a^{m+4}-4a^{m+3}\qquad\qquad\quad +8a^{m+1}
\end{array}
$$

2. Multiplicar $x^{n+2}-3x^{n}-x^{n+1}+x^{n-1}$ por $x^{n+1}+x^{n}+4x^{n-1}$

$$
\begin{array}{l}
x^{n+2}-x^{n+1}-3x^{n}+x^{n-1}\\
\underline{x^{n+1}+x^{n}+4x^{n-1}\qquad\qquad}\\
x^{2n+3}-x^{2n+2}-3x^{2n+1}+x^{2n}\\
\qquad\quad x^{2n+2}-x^{2n+1}-3x^{2n}+x^{2n-1}\\
\underline{\qquad\qquad\qquad 4x^{2n+1}-4x^{2n}-12x^{2n-1}+4x^{2n-2}}\\
x^{2n+3}\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -6x^{2n}-11x^{2n-1}+4x^{2n-2}
\end{array}
$$

Multiplicación de Polinomios con Coeficientes Fraccionarios

Ejemplos

(1) Multiplicar $\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{3}xy$ por $\frac{2}{3}x-\frac{4}{5}y$

$$
\begin{array}{l}
\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{3}xy\\
\underline{\frac{2}{3}x-\frac{4}{5}y\qquad\quad}\\
\frac{1}{3}x^{3}-\frac{2}{9}x^{2}y\\
\underline{\qquad -\frac{4}{10}x^{2}y+\frac{4}{15}xy^{2}}\\
\frac{1}{3}x^{3}-\frac{28}{45}x^{2}y+\frac{4}{15}xy^{2}
\end{array}
$$

Los productos de los coeficientes deben simplificarse.

Así, en este caso, tenemos:

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

(2) Multiplicar $\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{5}ab$ por $\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}b^2$

$$\frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{5}ab + \frac{1}{2}b^2$$

$$\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}b^2$$

$$\frac{1}{4}a^4 - \frac{3}{20}a^3b + \frac{3}{8}a^2b^2$$

$$-\frac{1}{6}a^3b + \frac{1}{10}a^2b^2 - \frac{1}{4}ab^3$$

$$-\frac{1}{12}a^2b^2 + \frac{1}{20}ab^3 - \frac{1}{8}b^4$$

$$\frac{1}{4}a^2 - \frac{19}{60}a^3b + \frac{47}{120}a^2b^2 - \frac{1}{5}ab^3 - \frac{1}{8}b^4$$

Taller en Clase

Multiplicar los siguientes términos

1. 2 por -3
2. $-4m^2$ por $-5mn^2p$
3. $3a^2bx$ por $7b^3x^5$

Multiplicar los siguientes términos

1. $-x^a$ por $-x^{a+2}$
2. $-a^{n+1}b^{n+2}$ por $a^{n+2}b^n$
3. $3x^2y^3$ por $4x^{m+1}y^{m+2}$

Multiplicar los siguientes términos

1. $\frac{1}{2}a^2$ por $\frac{4}{5}a^3b$
2. $\frac{2}{3}x^2y^3$ por $-\frac{3}{5}a^2x^4y$
3. $-\frac{1}{8}m^3n^4$ por $-\frac{4}{5}a^3m^2n$

Multiplicación de más de un monomio

1. a por $-3a$ por a^2
2. $3x^2$ por $-x^3y$ por $-a^2x$
3. $-m^2n$ por $-3m^2$ por $-5mn^3$

Multiplicación de un polinomio por monomio

1. $3x^3 - x^2$ por $-2x$
2. $8x^2y - 3y^2$ por $-2ax^3$
3. $x^2 - 4x + 3$ por $-2x$

Multiplicación de un polinomio por monomio

1. $\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b$ por $\frac{2}{5}a^2$
2. $\frac{2}{3}a - \frac{3}{4}b$ por $-\frac{2}{3}a^3b$
3. $\frac{3}{5}a - \frac{1}{6}b + \frac{2}{5}c$ por $-\frac{5}{3}ac^2$

Multiplicación de polinomio por polinomio

1. $a+3$ por $a-1$
2. $a-3$ por $a+1$
3. $x+5$ por $x-4$

Multiplicación de polinomio por polinomio

1. x^2+xy+y^2 por $x-y$
2. a^2+b^2-2ab por $a-b$
3. x^3-3x^2+1 por $x+3$

Multiplicaciones con exponentes literales

1. $a^{n+2}-2a^n+3a^{n+1}$ por a^n+a^{n+1}
2. $x^{a+2}-x^a+2x^{a+1}$por $x^{a+3}-2x^{a+1}$
3. $3a^{x-2}-2a^{x-1}+a^x$por a^2+2a-1

Multiplicación con coeficientes fraccionarios

1. $\frac{1}{4}a^2-ab+\frac{2}{3}b^2$ por $\frac{1}{4}a-\frac{3}{2}b$
2. $\frac{2}{5}m^2+\frac{1}{3}mn-\frac{1}{2}n^2$ por $\frac{3}{2}m^2+2n^2-mn$
3. $\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{2}{5}$ por $2x^3-\frac{1}{3}x+2$

Soluciones

Multiplicar los siguientes términos

1. 2 por -3
   $(2) \times (-3) = -6$

2. $-4m^2$ por $-5mn^2p$
   $(-4m^2) \times (-5mn^2p) = 20m^{2+1}n^2p = 20m^3n^2p$

3. $3a^2bx$ por $7b^3x^5$
   $(3a^2bx) \times (7b^3x^5) = 21a^2b^{1+3}x^{1+5} = 21a^2b^4x^6$

Multiplicar los siguientes términos

1. $-x^a$ por $-x^{a+2}$
   $(-x^a) \times (x^{a+2}) = x^{a+a+2} = x^{2a+2}$

2. $-a^{n+1}b^{n+2}$ por $a^{n+2}b^n$
   $(-a^{n+1}b^{n+2}\ ) \times (a^{n+2}b^n) = -a^{n+1n+2}b^{n+2+n} = -a^{2n+3}b^{2n+2}$

3. $3x^2y^3$ por $4x^{m+1}y^{m+2}$
   $(3x^2y^3) \times (4x^{m+1}y^{m+2}) = 12x^{2+m+1}y^{3+m+2} = 12x^{m+3}y^{m+5}$

Multiplicar los siguientes términos (ejemplos 7-8)

1. $\frac{1}{2}a^2$ por $\frac{4}{5}a^3b$
   $$\left(\frac{1}{2}a^2\right) \times \left(\frac{4}{5}a^3b\right) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5}a^{2+3}b = \frac{4}{10}a^5b = \frac{2}{5}a^5b$$

2. $\frac{2}{3}x^2y^3$ por $-\frac{3}{5}a^2x^4y$

$$\left(\frac{2}{3}x^2y^3\right) \times \left(-\frac{3}{5}a^2x^4y\right) = -\frac{3}{5} \times \frac{2}{3}a^2x^{2+4}y^{3+1} = -\frac{6}{15}a^2x^6y^4 = -\frac{2}{5}a^2x^6y^4$$

3. $-\frac{1}{8}m^3n^4$ por $-\frac{4}{5}a^3m^2n$

$$\left(-\frac{1}{8}m^3n^4\right)\times\left(-\frac{4}{5}a^3m^2n\right)=-\frac{1}{8}\times-\frac{4}{5}a^3m^{3+2}n^{4+1}=\frac{4}{40}a^3m^5n^5=\frac{1}{10}a^3m^5n^5$$

Multiplicación de más de un monomio

1. a por $-3a$ por a^2
   $(a)\times(-3a)\times(a^2)=-3a^{1+1+2}=-3a^4$

2. $3x^2$ por $-x^3y$ por $-a^2x$
   $(3x^2)\times(-x^3y)\times(-a^2x)=3a^2x^{2+3+1}y=3a^2x^6y$

3. $-m^2n$ por $-3m^2$ por $-5mn^3$
   $(-m^2n\ )\times(-3m^2)\times(-5mn^3)=-15m^{2+2+1}n^{1+3}=-15m^5n^4$

Multiplicación de un polinomio por monomio

1. $3x^3-x^2$ por $-2x$
   $3x^3-x^2$
   $-2x$
   $-6x^4+2x^3$

2. $8x^2y-3y^2$ por $2ax^3$
   $8x^2y-3y^2$
   $-2ax^3$
   $16ax^5y-6ax^3y^2$

3. x^2-4x+3 por $-2x$
   x^2-4x+3
   $-2x$
   $-2x^3+8x^2-6x$

Multiplicación de un polinomio por monomio

1. $\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b$ por $\frac{2}{5}a^2$

$$\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b$$
$$\frac{2}{5}a^2$$
$$\frac{2}{10}a^3 - \frac{4}{15}a^2b = \frac{1}{5}a^3 - \frac{4}{15}a^2b$$

2. $\frac{2}{3}a - \frac{3}{4}b$ por $-\frac{2}{3}a^3b$

$$\frac{2}{3}a - \frac{3}{4}b$$
$$-\frac{2}{3}a^3b$$
$$-\frac{4}{9}a^4b + \frac{6}{12}a^3b^2 = -\frac{4}{9}a^4b + \frac{1}{2}a^3b^2$$

3. $\frac{3}{5}a - \frac{1}{6}b + \frac{2}{5}c$ por $-\frac{5}{3}ac^2$

$$\frac{3}{5}a - \frac{1}{6}b + \frac{2}{5}c$$
$$-\frac{5}{3}ac^2$$
$$-\frac{15}{15}a^2c^2 + \frac{5}{18}abc^2 - \frac{10}{15}ac^3 = -a^2c^2 + \frac{5}{18}abc^2 - \frac{2}{3}ac^3$$

Multiplicación de polinomio por polinomio

1. $a + 3$ por $a - 1$

$$a + 3$$
$$a - 1$$
$$a^2 + 3a$$
$$-a - 3$$
$$a^2 + 2a - 3$$

2. $a-3$ por $a+1$

$$\begin{array}{l} a-3 \\ \underline{a+1} \\ a^2-3a \\ \underline{\quad\ \ a-3} \\ a^2-2a-3 \end{array}$$

3. $x+5$ por $x-4$

$$\begin{array}{l} x+5 \\ \underline{x-4} \\ x^2+5x \\ \underline{\quad -4x-20} \\ x^2+x-20 \end{array}$$

Multiplicación de polinomio por polinomio (ejemplo 3-6)

1. x^2+xy+y^2 por $x-y$

$$\begin{array}{l} \underline{x^2+xy+y^2} \\ x-y \\ \underline{x^3+x^2y+xy^2} \\ \quad -x^2y-xy^2-y^3 \\ x^3-y^3 \end{array}$$

2. a^2+b^2-2ab por $a-b$

$$\begin{array}{l} a^2+b^2-2ab \\ \underline{a-b} \\ a^3-2a^2b+ab^2 \\ \underline{\quad -a^2b+2ab^2-b^3} \\ a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \end{array}$$

3. x^3-3x^2+1 por $x+3$

$$\begin{array}{l} x^3-3x^2+1 \\ \underline{x+3} \\ x^4-3x^3 \qquad +x \\ \underline{\quad +x^3-9x^2 \qquad +3} \\ \quad x^4-9x^2+x+2 \end{array}$$

Exponentes Literales

1. $a^{n+2} - 2a^{n} + 3a^{n+1}$ por $a^{n} + a^{n+1}$

$a^{n+2} + 3a^{n+1} - 2a^{n}$

$a^{n+1} + a^{n}$

$a^{2n+3} + 3a^{2n+2} - 2a^{2n+1}$

$a^{2n+2} + 3a^{2n+1} - 2a^{2n}$

$a^{2n+3} + 4a^{2n+2} + a^{2n+1} - 2a^{2n}$

2. $x^{a+2} - x^{a} + 2x^{a+1}$por $x^{a+3} - 2x^{a+1}$

$x^{a+2} + 2x^{a+1} - x^{a}$

$x^{a+3} - 2x^{a+1}$

$x^{2a+5} + 2x^{2a+4} - x^{2a+3}$

$-2x^{2a+3} - 4x^{2a+2} + 2x^{2a+1}$

$x^{2a+5} + 2x^{2a+4} - 3x^{2a+3} - 4x^{2a+2} + 2x^{2a+1}$

3. $3a^{x-2} - 2a^{x-1} + a^{x}$por $a^{2} + 2a - 1$

$a^{x} - 2a^{x-1} + 3a^{x-2}$

$a^{2} + 2a - 1$

$a^{x+2} - 2a^{x+1} + 3a^{x}$

$2a^{x+1} - 4a^{x} + 6a^{x-1}$

$-a^{x} + 2a^{x-1} - 3a^{x-2}$

$a^{x+2} \quad - 2a^{x} + 8a^{x-1} - 3a^{x-2}$

Coeficientes Fraccionarios

1. $\frac{1}{4}a^2 - ab + \frac{2}{3}b^2$ por $\frac{1}{4}a - \frac{3}{2}b$

$\frac{1}{4}a^2 - ab + \frac{2}{3}b^2$

$\frac{1}{4}a - \frac{3}{2}b$

$\frac{1}{16}a^3 - \frac{1}{4}a^2b + \frac{2}{12}ab^2$

$- \frac{3}{8}a^2b + \frac{3}{2}ab^2 - \frac{6}{6}b^3$

$\frac{1}{16}a^3 - \frac{5}{8}a^2b + \frac{5}{3}ab^2 - b$

2. $\frac{2}{5}m^2 + \frac{1}{3}mn - \frac{1}{2}n^2$ por $\frac{3}{2}m^2 + 2n^2 - mn$

$\frac{2}{5}m^2 + \frac{1}{3}mn - \frac{1}{2}n^2$

$\frac{3}{2}m^2 - mn + 2n^2$

$\frac{6}{10}m^4 + \frac{3}{6}m^3n - \frac{3}{4}m^2n^2$

$- \frac{2}{5}m^3n - \frac{1}{3}m^2n^2 + \frac{1}{2}mn^3$

$\frac{4}{5}m^2n^2 + \frac{2}{3}mn^3 - \frac{2}{2}n^4$

$$\frac{3}{5}m^4 + \frac{1}{10}m^3n - \frac{17}{60}m^2n^2 + \frac{7}{6}mn^3 - n^4$$

Tarea

Multiplicar los siguientes términos

1. ab por $-ab$
2. $3a^2b^3$ por $-4x^2y$
3. $-8m^2n^3$ por $-9a^2mx^4$

Multiplicar los siguientes términos

1. $4x^{a+2}b^{a+4}$ por $-5x^{a+5}b^{a+1}$
2. $a^m b^n c$ por $-a^m b^{2n}$
3. $-5m^a n^{b-1}c$ por $-7m^{2a-3}n^{b-4}$

Multiplicar los siguientes términos

1. $-\frac{7}{8}abc$ por $\frac{2}{7}a^3$
2. $-\frac{3}{5}x^3y^4$ por $-\frac{5}{6}a^2by^5$
3. $\frac{1}{3}a$ por $\frac{3}{5}a^m$

Multiplicación de más de un monomio

1. $4a^2$ por $-5a^3x^2$ por $-ay^2$
2. $-a^m$ por $-2ab$ por $-3a^2b^x$
3. $\frac{1}{2}x^3$ por $-\frac{2}{3}a^2x$ por $-\frac{3}{5}a^4m$

Multiplicación de un polinomio por monomio

1. $a^3 - 4a^2 + 6a$ por $3ab$
2. $a^2 - 2ab + b^2$ por $-ab$
3. $x^5 - 6x^3 - 8x$ por $3a^2x^2$

Multiplicación de polinomio por polinomio

1. $a^2 + b^2 + 2ab$ por $a + b$
2. $a^3 + a^2 - a$ por $a - 1$
3. $m^4 + m^2n^2 + n^4$ por $m^2 - n^2$

Coeficientes Literarios y exponentes fraccionarios

1. $3a^{x-1} + a^x - 2a^{x-2}$ por $a^x - a^{x-1} + a^{x-2}$
2. $\frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{2}{5}$ por $2x^3 - \frac{1}{3}x + 2$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Solucionario de la Tarea

Multiplicar los siguientes términos

1. ab por $-ab$
   $(ab) \times (-ab) = -a^{1+1}b^{1+1} = a^2b^2$

2. $3a^2b^3$ por $-4x^2y$
   $\left(3a^2b^3\right) \times (-4x^2y) = -12a^2b^3x^2y$

3. $-8m^2n^3$ por $-9a^2mx^4$
   $(-8m^2n^3) \times (-9a^2mx^4) = 72a^2m^{2+1}n^3x^4 = 72a^2m^3n^3x^4$

Multiplicar los siguientes términos

1. $4x^{a+2}b^{a+4}$ por $-5x^{a+5}b^{a+1}$
   $(4x^{a+2}b^{a+4}) \times (-5x^{a+5}b^{a+1}) = -20x^{a+2+a+5}b^{a+4+a+1} = -20x^{2a+7}b^{2a+5}$

2. a^mb^nc por $-a^mb^{2n}$
   $(a^mb^nc\ ) \times (-a^mb^{2n}) = -a^{m+m}b^{n+2n}c = -a^{2m}b^{3n}c$

3. $-5m^an^{b-1}c$ por $-7m^{2a-3}n^{b-4}$
   $(-5m^an^{b-1}c) \times (-7m^{2a-3}n^{b-4}) = 35m^{a+2a-3}n^{b-1+b-4}c = 35m^{3a-3}n^{2b-5}c$

Multiplicar los siguientes términos

1. $-\frac{7}{8}abc$ por $\frac{2}{7}a^3$
   $$\left(-\frac{7}{8}abc\right) \times \left(\frac{2}{7}a^3\right) = -\frac{7}{8} \times \frac{2}{7}a^{1+3}bc = \frac{14}{56}a^4bc = \frac{1}{4}a^4bc$$

2. $-\frac{3}{5}x^3y^4$ por $-\frac{5}{6}a^2by^5$
   $$\left(-\frac{3}{5}x^3y^4\right) \times \left(-\frac{5}{6}a^2by^5\right) = -\frac{3}{5} \times -\frac{5}{6}a^2bx^3y^{4+5} = \frac{3}{6}a^2bx^3y^9 = \frac{1}{3}a^2bx^3y^9$$

3. $\frac{1}{3}a$ por $\frac{3}{5}a^m$

$$\left(\frac{1}{3}a\right) \times \left(\frac{3}{5}a^m\right) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5}a^{1+m} = \frac{3}{15}a^{m+1} = \frac{1}{5}a^{m+1}$$

Multiplicación de más de un monomio

1. $4a^2$ por $-5a^3x^2$ por $-ay^2$
   $(4a^2) \times (-5a^3x^2) \times (-ay^2) = 20a^{2+3+1}x^2y^2 = 20a^6x^2y^2$

2. $-a^m$ por $-2ab$ por $-3a^2b^x$
   $(-a^m) \times (-2ab) \times (-3a^2b^x) = -6a^{m+1+2}b^{1+x} = -6a^{m+3}b^{x+1}$

3. $\frac{1}{2}x^3$ por $-\frac{2}{3}a^2x$ por $-\frac{3}{5}a^4m$
   $$\left(\frac{1}{2}x^3\right) \times \left(-\frac{2}{3}a^2x\right) \times \left(-\frac{3}{5}a^4m\right) = \frac{6}{30}a^{2+4}x^{3+1}m = \frac{1}{5}a^6x^4m$$

Multiplicación de un polinomio por monomio

1. $a^3 - 4a^2 + 6a$ por $3ab$

$$\begin{array}{l} a^3 - 4a^2 + 6a \\ 3ab \\ \hline 3a^4b - 12a^3b + 18a^2b \end{array}$$

2. $a^2 - 2ab + b^2$ por $-ab$

$$\begin{array}{l} a^2 - 2ab + b^2 \\ -ab \\ \hline -a^3b + 2a^2b^2 - ab^3 \end{array}$$

3. $x^5 - 6x^3 - 8x$ por $3a^2x^2$

$$\begin{array}{l} x^5 - 6x^3 - 8x \\ 3a^2x^2 \\ \hline 3a^2x^7 - 18a^2x^5 - 24a^2x^3 \end{array}$$

Multiplicación de polinomio por polinomio

1. $m-6$ por $m-5$

$$\begin{array}{l} m-6 \\ m-5 \\ \hline m^2-6m \\ \qquad -5m+30 \\ \hline m^2-11m+30 \end{array}$$

2. $-x+3$ por $-x+5$

$$\begin{array}{l} -x+3 \\ -x+5 \\ \hline x^2-3x \\ \qquad -5x+15 \\ \hline x^2-8x+15 \end{array}$$

3. $-a-2$ por $-a-3$

$$\begin{array}{l} -a-2 \\ -a-3 \\ \hline a^2+2a \\ \qquad +3a+6 \\ \hline a^2+5a+6 \end{array}$$

Multiplicación de polinomio por polinomio

1. a^2+b^2+2ab por $a+b$

$$\begin{array}{l} a^2+b^2+2ab \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ \qquad +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

2. a^3+a^2-a por $a-1$

$$\begin{array}{l} a^3+a^2-a \\ a-1 \\ \hline a^4+a^3-a^2 \\ \qquad -a^3-a^2+a \\ \hline a^4-2a^2+a \end{array}$$

Exponentes Literales y Coeficientes literarios

1. $3a^{x-1} + a^{x} - 2a^{x-2}$ por $a^{x} - a^{x-1} + a^{x-2}$

$a^{x} + 3a^{x-1} - 2a^{x-2}$

$a^{x} - a^{x-1} + a^{x-2}$

$a^{2x} + 3a^{2x-1} - 2a^{2x-2}$

$-a^{2x-1} - 3a^{2x-2} + 2a^{2x-3}$

$a^{2x-2} + 3a^{2x-3} - 2a^{2x-4}$

$a^{2x} + 2a^{2x-1} - 4a^{2x-2} + 5a^{2x-3} - 2a^{2x-4}$

2. $\frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{2}{5}$ por $2x^3 - \frac{1}{3}x + 2$

$\frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{2}{5}$

$2x^3 - \frac{1}{3}x + 2$

$\frac{6}{8}x^5 + \frac{2}{4}x^4 - \frac{4}{5}x^3$

$-\frac{3}{24}x^3 - \frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{15}x$

$\frac{6}{8}x^2 + \frac{2}{4}x - \frac{4}{5}$

$\frac{3}{4}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{37}{40}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{19}{30}x - \frac{4}{5}$

6.División Algebraica

La división es una operación que tiene por objeto, dado el producto de dos factores (dividiendo) y uno de los factores (divisor), hallar el otro fator (coeficiente). De esta definición se deduce que el cociente multiplicado por el diviso reproduce el dividiendo.

Así, la operación de dividir $6a^2$entre $3a$, que se indica $6a^2 \div 3a$ ó $\frac{6a^2}{3a}$, consiste en hallar una cantidad que multiplicada por $3a$ de $6a^2$. Esa cantidad (consiente) es $2a$

Es evidente que $6a^2 \div 2a = \frac{6a^2}{2a} = 3a$, donde emos que si el dividiendo se divide entre el cociente nos da de cociente lo que antes era divisor.

Ley de los signos

La ley de los signos en la división es la misma que en la multiplicación:

Signos iguales dan + y diferentes –

En efecto:

1. $$+ab \div +a = \frac{+ab}{+a} = +b$$

Porque el cociente multiplicado por el divisor tiene que dar el dividendo con su signo y siendo el dividendo positivo, como el divisor es positivo, el cociente tiene que ser positivo para que multiplicado por el divisor reproduzca el dividendo: $(+a) \times (+b) = +ab$

2. $-ab \div -a = \frac{-ab}{-a} = +b$ porque $(-a) \times (+b) = -ab$

3. $+ab \div -a = \frac{+ab}{-a} = -b$ porque $(-a) \times (-b) = +ab$

4. $-ab \div +a = \frac{-ab}{+a} = -b$ porque $(+a) \times (-b) = -ab$

En resumen:

+ entre + da +
− entre − da +
+ entre − da −
−entre + da −

Ley de los exponentes

Para dividir potencias de la misma base se deja la misma base y se le pone de exponente la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor.

Sea el cociente $a^5 \div a^3$, Decimos que

$$a^5 \div a^3 = \frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$$

a^2 será el cociente de esta división si multiplicada por el divisor a^3 reproduce el dividendo, y en efecto: $a^2 \times a^3 = a^5$

Ley de los coeficientes

El coeficiente del cociente es el cociente de dividir el coeficiente del dividendo entre el cociente del divisor.

En efecto: $$20a^2 \div 5a = 4a$$

$4a$ es el cociente porque $4a \times 5a = 20a^2$ y vemos que el coeficiente del cociente 4, es el cociente de dividir 20 entre 5.

División de monomios

De acuerdo con las leyes anteriores, podemos enunciar la siguiente:

Regla para dividir dos monomios: Se divide el coeficiente del dividendo entre el coeficiente del divisor y a continuación se escriben en orden alfabético las letras, poniéndole a cada letra un exponente igual a la diferencia entre el exponente que tiene en el dividendo y el exponente que tiene en el divisor. El signo lo da la ley de los signos.

Ejemplos:

1. Dividir $4a^3b^2$ entre $-2ab$

$$4a^3b^2 \div -2ab = \frac{4a^3b^2}{-2ab} = -2a^2b$$

Porque $(-2ab) \times (-2a^2b) = 4a^3b^2$

2. Dividir $-5a^4b^3c$ entre $-a^2b$

$$-5a^4b^3c \div -a^2b = \frac{-5a^4b^3c}{-a^2b} = 5a^2b^2c$$

Porque $5a^2b^2c \times (-a^2b) = -5a^4b^3c$

Obsérvese que cuando en el dividendo hay una letra que no existe en el divisor, en este caso, c, dicha letra aparece en el cociente. Sucede lo mismo que si la c estuviera en el divisor con exponente cero, porque tendríamos:

$$c \div c^0 = c^{1-0} = c$$

3. Dividir $-20mx^2y^3 \div 4xy^3$

$$-20mx^2y^3 \div 4xy^3 = \frac{-20mx^2y^3}{4xy^3} = -5mx$$

Porque $4xy^3 \times (-5mx) = -20mx^2y^3$

Obsérvese que letras iguales en el dividendo y divisor se cancelan porque su cociente es 1. Así, en este caso, y^3 del dividendo se cancela con y^3 del diviso, igual que en Aritmética suprimimos los factores comunes en el numerador y denominador de un quebrado.

También, de acuerdo con la ley de los exponentes $y^3 \div y^3 = y^{3-3} = y^0$ y veremos más adelante que $y^0 = 1$ y 1 como factor puede suprimirse en el cociente.

4. Dividir $-x^my^nz^a$ entre $3xy^2z^3$

$$-x^my^nz^a \div 3xy^2z^3 = \frac{-x^my^nz^a}{3xy^2z^3} = -\frac{1}{3}x^{m-1}y^{n-2}z^{a-3}$$

División de polinomios por monomios

Sea $(a + b - c) \div m$ tendremos

$$(a + b - c) \div m = \frac{a + b - c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m}$$

En efecto: $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m}$ es el cociente de la división porque multiplicado por el divisor reproduce el dividendo:

$$\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m}\right)m = \frac{a}{m} \times m + \frac{b}{m} \times m - \frac{c}{m} \times m = a + b - c$$

Podemos, pues, enunciar la siguiente:

Regla para dividir un polinomio por un monomio

Se divide cada uno de los términos del polinomio por el monomio separando los cocientes parciales con sus propios signos. Esta es la ley distributiva de la división.

Ejemplos:

1. Dividir $3a^3 - 6a^2b + 9ab^2$ entre $3a$

$$(3a^3 - 6a^2b + 9ab^2) \div 3a = \frac{3a^3 - 6a^2b + 9ab^2}{3a} = \frac{3a^3}{3a} - \frac{6a^2b}{3a} + \frac{9ab^2}{3a}$$
$$= a^2 - 2ab + 3b^2$$

2. Dividir $2a^xb^m - 6a^{x+1}b^{m-1} - 3a^{x+2}b^{m-2}$ entre $-2a^3b^4$

$$(2a^xb^m - 6a^{x+1}b^{m-1} - 3a^{x+2}b^{m-2}) \div -2a^3b^4 =$$
$$\frac{2a^xb^m - 6a^{x+1}b^{m-1} - 3a^{x+2}b^{m-2}}{-2a^3b^4} = -\frac{2a^xb^m}{2a^3b^4} + \frac{6a^{x+1}b^{m-1}}{2a^3b^4} + \frac{3a^{x+2}b^{m-2}}{2a^3b^4}$$
$$= -a^{x-3}b^{m-4} + 3a^{x-2}b^{m-5} + \frac{3}{2}a^{x-1}b^{m-6}$$

División de dos polinomios

Regla para dividir dos polinomios: Se ordenan el dividendo y el divisor con relación a una misma letra. Se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor y tendremos el primer término del cociente. Este primer término del cociente se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del dividendo, para lo cual se le cambia el signo, escribiendo cada término debajo de su semejante. Si algún término de este producto no tiene término semejante en el dividendo se escribe en el lugar que le corresponda de acuerdo con la ordenación del dividendo y el divisor. Se divide el primer término del resto entre el primer término del divisor y tendremos el segundo término del cociente. Este segundo término del cociente se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del dividendo, cambiando los signos. Se divide el primer término del segundo resto entre el primero del divisor y se efectúan las operaciones anteriores; y así sucesivamente hasta que el residuo sea cero.

Ejemplos:

1. Dividir $3x^2 + 2x - 8$ entre $x + 2$

$$\begin{array}{rrr|l}
3x^2 & +2x & -8 & \ x+2 \\ \cline{4-4}
-3x^2 & -6x & & \ \mathbf{3x-4} \\ \cline{1-2}
 & -4x & -8 & \\
 & 4x & +8 &
\end{array}$$

Explicación:

El dividendo y el divisor están ordenados en orden descendente con relación a x.

Dividimos el primer término del dividendo $3x^2$ entre el primero del divisor y tenemos

$3x^2 \div x = 3x$. Este es el primer término del cociente.

Multiplicamos $3x$ por cada uno de los términos del divisor y como estos productos hay que restarlos del dividendo, tendremos $3x \times x = 3x^2$, para restar $-3x^2$; $3x \times 2 = 6x$, para restar $-6x$.

Estos productos con sus signos cambiados los escribimos los escribimos debajo de los términos semejantes con ellos del dividendo y hacemos la reducción; nos da $-4x$ y bajamos el -8

Dividimos $-4x$ entre x: $-4x \div x = -4$ y este es el segundo término del cociente. Este -4 hay que multiplicarlo por cada uno de los términos del divisor y restar los productos del dividendo y tendremos:

$(-4) \times x = -4x$, para restar $+4x$; $(-4) \times 2 = -8$, para restar 8.

Escribimos estos términos debajo de sus semejantes y haciendo la reducción nos da cero de residuo.

Razón de la regla aplicada

Dividir $3x^2 + 2x - 8$ entre $x + 2$ es hallar una cantidad que multiplicada por $x + 2$ nos dé $3x^2 + 2x - 8$, de acuerdo con la definición de división. El término $3x^2$ que contiene la mayor potencia de x en el dividendo tiene que ser el producto del término que tenga la mayor potencia de x en el cociente, luego dividiendo $3x^2 \div x = 3x$ tendremos el mismo término que contiene la mayor potencia de x en el cociente. Hemos multiplicado $3x$ por $x + 2$ que nos da $3x^2 + 6x$ y este producto lo restamos del dividendo. El residuo es $-4x - 8$. Este residuo $-4x - 8$, se considera como un nuevo dividendo, porque tiene que ser el producto del divisor $x + 2$ por lo que aún nos falta del cociente. Divido $-4x$ entre x y me da cociente -4.

Este es el segundo término del cociente. Multiplicando -4 por $x + 2$ obtengo $-4x - 8$. Restando este producto del dividendo $-4x - 8$ me da cero de residuo. Luego $3x - 4$ es la cantidad que multiplicada por el divisor $x + 2$ nos da el dividendo $3x^2 + 2x - 8$, luego

$3x - 4$ es el cociente de la división.

2. Dividir $28x^2 - 30y^2 - 11xy$ entre $4x - 5y$
   Ordenando dividiendo y divisor en orden descendente con relación a x tenemos:

$$\begin{array}{l|l} 28x^2 - 11xy - 30y^2 & 4x - 5y \\ \cline{2-2} \underline{-28x^2 + 35xy} & \mathbf{7x + 6y} \\ \qquad 24xy - 30y^2 & \\ \quad -24xy + 30y^2 & \end{array}$$

Explicación

Dividimos $28x^2 \div 4 = 7x$. Este primer término del cociente lo multiplicamos por cada uno de los términos del divisor: $7x \times 4x = 28x^2$, para restar $-28x^2$; $7x \times (-5y) = -35xy$, para restar $+35xy$. Escribimos estos términos debajo de sus semejantes en el dividendo y los reducimos. El residuo es $24xy - 30y^2$. Divido el primer término del residuo entre el primero del divisor: $24xy \div 4x = +6y$. Este es el segundo término del cociente. Multiplico $6y$ por cada uno de los términos del divisor. $6y \times 4x = 24xy$ para restar $-24xy$; $6y \times (-5y) = -30y^2$, para restar $+30y^2$. Escribimos estos términos debajo de sus semejantes y haciendo la reducción nos da cero de residuo. $7x + 6y$ Es el cociente de la división.

Prueba de la división

Puede verificarse, cuando la división es exacta, multiplicando el divisor por el cociente, debiendo darnos el dividendo si la operación está correcta.

3. Dividir $2x^3 - 2 - 4x$ entre $2 + 2x$

Al ordenar el dividendo y el divisor, debemos tener presente que en el dividendo falta el término en x^2, luego debemos dejar un lugar para ese término.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 \qquad\qquad\quad - 4x - 2 & 2x + 2 \\ \cline{2-2} & \mathbf{x^2 - x - 1} \\ \underline{-2x^3 - 2x^2 \qquad\qquad\quad} & \\ \qquad -2x^2 - 4x & \\ \qquad \underline{\ 2x^2 + 2x\ } & \\ \qquad\qquad -2x - 2 & \\ \qquad\qquad\ \ 2x + 2 & \end{array}$$

4. Dividir $3a^5 + 10a^3b^2 + 64a^2b^3 - 21a^4b + 32ab^4$ entre $a^3 - 4ab^2 - 5a^2b$
Ordenando con relación a la a en orden descendente:

$$
\begin{array}{l|l}
3a^5 + 10a^3b^2 + 64a^2b^3 - 21a^4b + 32ab^4 & a^3 - 5a^2b - 4ab^2 \\ \cline{2-2}
-3a^5 + 15a^4b + 12a^3b^2 & \mathbf{3a^2 - 6ab - 8b^2} \\ \hline
\quad -6a^4b + 22a^3b^2 + 64a^2b^3 & \\
\quad 6a^4b - 30a^3b^2 - 24a^2b^3 & \\ \hline
\quad -8a^3b^2 + 40a^2b^3 + 32ab^4 & \\
\quad 8a^3b^2 - 40a^2b^3 - 32ab^4 &
\end{array}
$$

5. Dividir $x^{12} + x^6y^6 - x^8y^4 - x^2y^{10}$ entre $x^8 + x^6y^2 - x^4y^4 - x^2y^6$

Al ordenar dividiendo tenemos $x^{12} - x^8y^4 + x^6y^6 - x^2y^{10}$.

Aquí podemos observar que faltan los términos en $x^{10}y^2$ y en x^4y^8; dejaremos pues un espacio entre x^{12} y $-x^8y^4$ para el término en $x^{10}y^2$ y otro espacio entre x^6y^6 y $-x^2y^{10}$ para término en x^4y^8 y tendremos:

$$
\begin{array}{l|l}
x^{12} \qquad\qquad - x^8y^4 + x^6y^6 \qquad\qquad - x^2y^{10} & x^8 + x^6y^2 - x^4y^4 - x^2y^6 \\ \cline{2-2}
-x^{12} - x^{10}y^2 + x^8y^4 + x^6y^6 & \mathbf{x^4 - x^2y^2 + y^4} \\ \hline
\quad -x^{10}y^2 \qquad + 2x^6y^6 & \\
\quad x^{10}y^2 + x^8y^4 - x^6y^6 - x^4y^8 & \\ \hline
\qquad x^8y^4 + x^6y^6 - x^4y^8 - x^2y^{10} & \\
\qquad -x^8y^4 - x^6y^6 + x^4y^8 + x^2y^{10} & \\ \hline
\end{array}
$$

6. Dividir $11a^3 - 3a^5 - 46a^2 + 32$ entre $8 - 3a^2 - 6a$

Ordenaremos en orden ascendente porque con ello logramos que el primer término del divisor sea positivo, lo cual siempre es más cómodo. Además, como en el dividendo faltan los términos en a^4 y en a dejaremos los lugares vacíos correspondientes y tendremos:

$$
\begin{array}{lll|l}
32 & -46a^2 + 11a^3 & -3a^5 & 8 - 6a - 3a^2 \\ \cline{4-4}
\multicolumn{3}{l}{-32 + 24a + 12a^2} & \mathbf{4 + 3a - 2a^2 + a^3} \\ \cline{1-2}
\multicolumn{3}{l}{\quad 24a - 34a^2 + 11a^3} & \\
\multicolumn{3}{l}{\quad -24a + 18a^2 + 9a^3} & \\ \cline{1-2}
\multicolumn{3}{l}{\qquad -16a^2 + 20a^3} & \\
\multicolumn{3}{l}{\qquad 16a^2 - 12a^3 - 6a^4} & \\ \cline{1-2}
\multicolumn{3}{l}{\qquad\qquad 8a^3 - 6a^4 - 3a^5} & \\
\multicolumn{3}{l}{\qquad\qquad -8a^3 + 6a^4 + 3a^5} & \\ \cline{2-3}
\end{array}
$$

Tarea

Dividir

1. $16m^6n^4$ entre $-5n^3$
2. $-3a^xb^m$ entre ab^2
3. x^{2n+3} entre $-4x^{n+4}$
4. $a^{m+n}b^{x+a}$ entre a^mb^a
5. $\frac{3}{4}a^mb^n$ entre $-\frac{3}{2}b^3$
6. $3m^4n^5p^6$ entre $-\frac{1}{3}m^4np^5$
7. $x^4-5x^3-10x^2+15x$ entre $-5x$
8. $4x^8-10x^6-5x^4$ entre $2x^3$
9. a^x+a^{m-1} entre a^2
10. $\frac{1}{4}m^4-\frac{2}{3}m^3n+\frac{3}{8}m^2n^2$ entre $\frac{1}{4}m^2$
11. $\frac{2}{5}a^5-\frac{1}{3}a^3b^3-ab^5$ entre $5a$
12. $\frac{1}{3}a^m+\frac{1}{4}a^{m-1}$ entre $\frac{1}{2}a$
13. $x^6+6x^3-2x^5-7x^2-4x+6$ entre x^4-3x^2+2
14. $a^5-a^4+10-27a+7a^2$ entre a^2+5-a
15. $4y^4-13y^2+4y^3-3y-20$ entre $2y+5$

Solución de la tarea

1. $16m^6n^4 \div -5n^3 = \frac{16m^6n^4}{-5n^3} = \boldsymbol{-\frac{16}{5}m^6n}$
2. $-3a^xb^m \div ab^2 = \frac{-3a^xb^m}{ab^2} = \boldsymbol{-3a^{x-1}b^{m-2}}$
3. $x^{2n+3} \div -4x^{n+4} = \frac{x^{2n+3}}{-4x^{n+4}} = \boldsymbol{-\frac{1}{4}x^{n-1}}$
4. $a^{m+n}b^{x+a} \div a^mb^a = \frac{a^{m+n}b^{x+a}}{a^mb^a} = \boldsymbol{a^nb^x}$
5. $\frac{3}{4}a^mb^n \div -\frac{3}{2}b^3 = \frac{\frac{3}{4}a^mb^n}{-\frac{3}{2}b^3} = \boldsymbol{-\frac{1}{2}a^mb^{n-3}}$
6. $3m^4n^5p^6 \div -\frac{1}{3}m^4np^5 = \frac{3m^4n^5p^6}{-\frac{1}{3}m^4np^5} = \boldsymbol{-9n^4p}$
7. $\frac{x^4-5x^3-10x^2+15x}{-5x} = \frac{x^4}{-5x} - \frac{5x^3}{-5x} - \frac{10x^2}{-5x} + \frac{15x}{-5x} = \boldsymbol{-\frac{1}{5}x^3 + x^2 + 2x - 3}$
8. $\frac{4x^8-10x^6-5x^4}{2x^3} = \frac{4x^8}{2x^3} - \frac{10x^6}{2x^3} - \frac{5x^4}{2x^3} = \boldsymbol{2x^5 - 5x^3 - \frac{5}{2}x}$
9. $\frac{a^x+a^{m-1}}{a^2} = \frac{a^x}{a^2} + \frac{a^{m-1}}{a^2} = \boldsymbol{a^{x-2} + a^{m-3}}$
10. $\frac{\frac{1}{4}m^4}{\frac{1}{4}m^2} - \frac{\frac{2}{3}m^3n}{\frac{1}{4}m^2} + \frac{\frac{3}{8}m^2n^2}{\frac{1}{4}m^2} = \boldsymbol{m^2 - \frac{8}{3}mn + \frac{3}{2}n^2}$
11. $\frac{\frac{2}{5}a^5}{5a} - \frac{\frac{1}{3}a^3b^3}{5a} - \frac{ab^5}{5a} = \boldsymbol{\frac{2}{25}a^4 - \frac{1}{15}a^2b^3 - \frac{1}{5}b^5}$
12. $\frac{\frac{1}{3}a^m}{\frac{1}{2}a} + \frac{\frac{1}{4}a^{m-1}}{\frac{1}{2}a} = \boldsymbol{\frac{2}{3}a^{m-1} + \frac{1}{2}a^{m-2}}$

13.
$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^6 & -2x^5 & & +6x^3 & -7x^2 & -4x & +6 & x^4-3x^2+2 \\
\cline{8-8}
-x^6 & & +3x^4 & & -2x^2 & & & \boldsymbol{x^2-2x+3} \\
\hline
 & -2x^5 & +3x^4 & +6x^3 & -9x^2 & -4x & & \\
 & +2x^5 & & -6x^3 & & +4x & & \\
\hline
 & & 3x^4 & & -9x^2 & & +6 & \\
 & & -3x^4 & & +9x^2 & & -6 & \\
\hline
\end{array}
$$

14. $a^5 - a^4 \qquad\qquad + 7a^2 - 27a + 10$ | $a^2 - a + 5$

$-a^5 + a^4 - 5a^3$

$\boldsymbol{a^3 - 5a + 2}$

$-5a^3 + 7a^2 - 27a$

$+5a^3 - 5a^2 + 25a$

$2a^2 - 2a + 10$

$-2a^2 + 2a - 10$

15. $4y^4 + 4y^3 - 13y^2 - 3y - 20$ | $2y + 5$

$-4y^4 - 10y^3$

$\boldsymbol{2y^3 - 3y^2 + y - 4}$

$-6y^3 - 13y^2$

$+6y^3 + 15y^2$

$2y^2 - 3y$

$-2y^2 - 5y - 20$

$-8y - 20$

$8y + 20$

División de Polinomios con Exponentes Literales

Ejemplos

1. $a^{x+3} + a^{x}\ entre\ a + 1$
2. $a^{x+2} - 2a^{x} + 8a^{x-1} - 3a^{x-2}\ entre\ 3a^{x-2} - 2a^{x-1} + a^{x}$
3. $a^{x} - ab^{n-1} - a^{x-1}b + b^{n}\ entre\ a - b$

Soluciones

$$\boldsymbol{a^{x+3} + a^{x}} \ \big|\ \underline{\boldsymbol{a+1}}$$

$$\underline{-a^{x+3} - a^{x+2}} \qquad a^{x+2} - a^{x+1} + a^{x}$$

$$-a^{x+2}$$

$$a^{x+2} + a^{x+1}$$

$$a^{x+1} + a^{x}$$

$$-a^{x+1} - a^{x}$$

$$\boldsymbol{a^{x+2} - 2a^{x} + 8a^{x-1} - 3a^{x-2}} \ \big|\ \underline{\boldsymbol{a^{x} - 2a^{x-1} + 3a^{x-2}}}$$

$$\underline{-a^{x+2} + 2a^{x+1} - 3a^{x}} \qquad a^{2} + 2a - 1$$

$$2a^{x+1} - 5a^{x} + 8a^{x-1}$$

$$\underline{-2a^{x+1} + 4a^{x} - 6a^{x-1}}$$

$$-a^{x} + 2a^{x-1} - 3a^{x-2}$$

$$a^{x} - 2a^{x-1} + 3a^{x-2}$$

$$\boldsymbol{a^{x} - a^{x-1}b + b^{n} - ab^{n-1}} \ \big|\ \underline{\boldsymbol{a-b}}$$

$$\underline{-a^{x} + a^{x-1}b} \qquad a^{x-1} - b^{n-1}$$

$$b^{n} - ab^{n-1}$$

$$-b^{n} + ab^{n-1}$$

Taller en Clase

1. $a^{2n+3} + 4a^{2n+2} + a^{2n+1} - 2a^{2n}$ *entre* $a^{n+1} + a^n$
2. $x^{2a+5} + 2x^{2a+4} - 3x^{2a+3} - 4x^{2a+2} + 2x^{2a+1}$ *entre* $a^{n+1} + a^n$
3. $-x^{n+5} + x^{n+4} + 3x^{n+3} + x^{n+2}$ *entre* $x^2 + x$

Solucionario del taller

$\boldsymbol{a^{2n+3} + 4a^{2n+2} + a^{2n+1} - 2a^{2n}} \;|\; \underline{\boldsymbol{a^{n+1} + a^n}}$

$\underline{-a^{2n+3} - a^{2n+2}}$ $\qquad a^{n+2} + 3a^{n+1} - 2a^n$

$3a^{2n+2} + a^{2n+1}$

$\underline{-3a^{2n+2} - 3a^{2n+1}}$

$-2a^{2n+1} - 2a^{2n}$

$2a^{2n+1} + 2a^{2n}$

$\boldsymbol{x^{2a+5} + 2x^{2a+4} - 3x^{2a+3} - 4x^{2a+2} + 2x^{2a+1}} \;|\; \underline{\boldsymbol{a^{n+1} + a^n}}$

$\underline{-x^{2a+5} \qquad + 2x^{2a+3}}$ $\qquad x^{a+2} + 2x^{a+1} - x^a$

$2x^{2a+4} - x^{2a+3}$

$\underline{-2x^{2a+4} \qquad + 4x^{2a+2}}$

$-x^{2a+3} \qquad + 2x^{2a+1}$

$x^{2a+3} \qquad - 2x^{2a+1}$

$\boldsymbol{-x^{n+5} + x^{n+4} + 3x^{n+3} + x^{n+2}} \;|\; \underline{\boldsymbol{x^2 + x}}$

$\underline{x^{n+5} \; + x^{n+4}}$ $\qquad - x^{n+3} + 2x^{n+2} + x^{n+1}$

$2x^{n+4} + 3x^{n+3}$

$\underline{- 2x^{n+4} - 2x^{n+3}}$

$x^{n+3} + x^{n+2}$

$-x^{n+3} - x^{n+2}$

Tarea

1. $a^{m+x} + a^m b^x + a^x b^m + b^{m+x}$ *entre* $a^x + b^x$
2. $a^{2n}b^3 - a^{2n-1}b^4 + a^{2n-2}b^5 - 2a^{2n-4}b^7 + a^{2n-5}b^8$ *entre* $a^n b - a^{n-1}b^2 + 2a^{n-2}b^3 - a^{n-3}b^4$
3. $a^{2x} + 2a^{2x-1} - 4a^{2x-2} + 5a^{2x-3} - 2a^{2x-4}$ *entre* $a^x - a^{x-1} + a^{x-2}$

Solucionario de la tarea

$$\boldsymbol{a^{m+x} + a^m b^x + a^x b^m + b^{m+x}} \;|\; \underline{\boldsymbol{a^x + b^x}}$$

$$\underline{-a^{m+x} - a^m b^x} \qquad a^m + b^m$$

$$a^x b^m + b^{m+x}$$

$$-a^x b^m - b^{m+x}$$

$$\boldsymbol{a^{2n}b^3 - a^{2n-1}b^4 + a^{2n-2}b^5 \quad - 2a^{2n-4}b^7 + a^{2n-5}b^8} \;|\; \underline{\boldsymbol{a^n b - a^{n-1}b^2 + 2a^{n-2}b^3 - a^{n-3}b^4}}$$

$$\underline{-a^{2n}b^3 + a^{2n-1}b^4 - 2a^{2n-2}b^5 + a^{2n-3}b^6} \qquad a^n b^2 - a^{n-2}b^4$$

$$-a^{2n-2}b^5 + a^{2n-3}b^6 - 2a^{2n-4}b^7 + a^{2n-5}b^8$$

$$a^{2n-2}b^5 - a^{2n-3}b^6 + 2a^{2n-4}b^7 - a^{2n-5}b^8$$

$$\boldsymbol{a^{2x} + 2a^{2x-1} - 4a^{2x-2} + 5a^{2x-3} - 2a^{2x-4}} \;|\; \underline{\boldsymbol{a^x - a^{x-1} + a^{x-2}}}$$

$$\underline{-a^{2x} + a^{2x-1} - a^{2x-2}} \qquad a^x + 3a^{x-1} - 2a^{x-2}$$

$$3a^{2x-1} - 5a^{2x-2} + 5a^{2x-3}$$

$$\underline{-3a^{2x-1} + 3a^{2x-2} - 3a^{2x-3}}$$

$$-2a^{2x-2} + 2a^{2x-3} - 2a^{2x-4}$$

$$2a^{2x-2} - 2a^{2x-3} + 2a^{2x-4}$$

División con Coeficientes Fraccionarios

Ejemplos

1. $\frac{1}{6}a^2 + \frac{5}{36}ab - \frac{1}{6}b^2 \ entre \ \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b$
2. $\frac{9}{4}a^4 - a^3x - \frac{1}{12}a^2x^2 + \frac{13}{18}ax^3 - \frac{1}{3}x^4 \ entre \ \frac{3}{2}a^2 - ax + \frac{2}{3}x^2$
3. $\frac{1}{2}m^5 - \frac{5}{6}m^4n + \frac{99}{40}m^3n^2 - \frac{101}{60}m^2n^3 + \frac{7}{6}mn^4 - \frac{5}{8}n^5 \ entre \ \frac{3}{4}m^3 - \frac{1}{2}m^2n + \frac{2}{5}mn^2 - \frac{1}{4}n^3$

Soluciones de los ejemplos

$$\frac{1}{6}a^2 + \frac{5}{36}ab - \frac{1}{6}b^2 \mid \underline{\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b}$$

$$\underline{-\frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{4}ab} \qquad \frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b$$

$$-\frac{1}{9}ab - \frac{1}{6}b^2$$

$$\frac{1}{9}ab + \frac{1}{6}b^2$$

$$\frac{9}{4}a^4 - a^3x - \frac{1}{12}a^2x^2 + \frac{13}{18}ax^3 - \frac{1}{3}x^4 \mid \underline{\frac{3}{2}a^2 - ax + \frac{2}{3}x^2}$$

$$\underline{-\frac{9}{4}a^4 + \frac{3}{2}a^3x - a^2x^2} \qquad \frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{3}ax - \frac{1}{2}x^2$$

$$\frac{1}{2}a^3x - \frac{13}{12}a^2x^2 + \frac{13}{18}ax^3$$

$$\underline{-\frac{1}{2}a^3x + \frac{1}{3}a^2x^2 - \frac{2}{9}ax^3}$$

$$-\frac{3}{4}a^2x^2 + \frac{1}{2}ax^3 - \frac{1}{3}x^4$$

$$\frac{3}{4}a^2x^2 - \frac{1}{2}ax^3 + \frac{1}{3}x^4$$

$$\frac{1}{2}m^5-\frac{5}{6}m^4n+\frac{99}{40}m^3n^2-\frac{101}{60}m^2n^3+\frac{7}{6}mn^4-\frac{5}{8}n^5 \mid \frac{3}{4}m^3-\frac{1}{2}m^2n+\frac{2}{5}mn^2-\frac{1}{4}n^3$$

$$-\frac{1}{2}m^5+\frac{1}{3}m^4n-\frac{4}{15}m^3n^2+\frac{1}{6}m^2n^3 \qquad \frac{2}{3}m^2-\frac{2}{3}mn+\frac{5}{2}n^2$$

$$-\frac{1}{2}m^4n+\frac{53}{24}m^3n^2-\frac{91}{60}m^2n^3+\frac{7}{6}mn^4$$

$$\frac{1}{2}m^4n-\frac{1}{3}m^3n^2+\frac{4}{15}m^2n^3-\frac{1}{6}mn^4$$

$$\frac{15}{8}m^3n^2-\frac{5}{4}m^2n^3+mn^4-\frac{5}{8}n^5$$

$$-\frac{15}{8}m^3n^2+\frac{5}{4}m^2n^3-mn^4+\frac{5}{8}n^5$$

Taller en Clase

1. $\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{10}xy-\frac{1}{3}y^2$ *entre* $x-\frac{2}{5}y$
2. $\frac{3}{5}m^4+\frac{1}{10}m^3n-\frac{17}{60}m^2n^2+\frac{7}{6}mn^3-n^4$ *entre* $\frac{3}{2}m^2-mn+2n^2$
3. $\frac{3}{4}x^5+\frac{1}{2}x^4-\frac{37}{40}x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{19}{30}x-\frac{4}{5}$ *entre* $2x^3-\frac{1}{3}x+2$

Solucionario del taller

$$\boldsymbol{\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{10}xy-\frac{1}{3}y^2 \mid x-\frac{2}{5}y}$$

$$-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{15}xy \qquad \frac{1}{3}x+\frac{5}{6}y$$

$$\frac{5}{6}xy-\frac{1}{3}y^2$$

$$-\frac{5}{6}xy+\frac{1}{3}y^2$$

$$\boldsymbol{\frac{3}{5}m^4+\frac{1}{10}m^3n-\frac{17}{60}m^2n^2+\frac{7}{6}mn^3-n^4 \mid \frac{3}{2}m^2-mn+2n^2}$$

$$-\frac{3}{5}m^4+\frac{2}{5}m^3n-\frac{4}{5}m^2n^2 \qquad \frac{2}{5}m^2+\frac{1}{3}mn-\frac{1}{2}n^2$$

$$\frac{1}{2}m^3n-\frac{65}{60}m^2n^2+\frac{7}{6}mn^3$$

$$-\frac{1}{2}m^3n+\frac{1}{3}m^2n^2-\frac{2}{3}mn^3$$

$$-\frac{3}{4}m^2n^2+\frac{1}{2}mn^3-n^4$$

$$\frac{3}{4}m^2n^2-\frac{1}{2}mn^3+n^4$$

$$\boldsymbol{\frac{3}{4}x^5+\frac{1}{2}x^4-\frac{37}{40}x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{19}{30}x-\frac{4}{5} \mid 2x^3-\frac{1}{3}x+2}$$

$$-\frac{3}{4}x^5 \qquad +\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2 \qquad \frac{3}{8}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{2}x^4-\frac{4}{5}x^3-\frac{1}{12}x^2+\frac{19}{30}x$$

$$-\frac{1}{2}x^4 \qquad +\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{2}x$$

$$-\frac{4}{5}x^3 \qquad +\frac{2}{15}x-\frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{5}x^3 \qquad -\frac{2}{15}x+\frac{4}{5}$$

Tarea

1. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{35}{36}x^2y + \frac{2}{3}xy^2 - \frac{3}{8}y^3 \ entre \ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{1}{4}y^2$
2. $\frac{1}{16}a^3 - \frac{5}{8}a^2b + \frac{5}{3}ab^2 - b^3 \ entre \ \frac{1}{4}a - \frac{3}{2}b$
3. $\frac{3}{8}x^5 + \frac{21}{40}x^4 - \frac{47}{120}x^3 + \frac{79}{120}x^2 + \frac{1}{10}x - \frac{1}{10} \ entre \ \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

Solucionario de la tarea

$$\frac{1}{3}x^3-\frac{35}{36}x^2y+\frac{2}{3}xy^2-\frac{3}{8}y^3 \mid \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{4}y^2$$

$$-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{9}x^2y-\frac{1}{6}xy^2 \qquad \frac{2}{3}x-\frac{3}{2}y$$

$$-\frac{3}{4}x^2y+\frac{1}{2}xy^2-\frac{3}{8}y^3$$

$$\frac{3}{4}x^2y-\frac{1}{2}xy^2+\frac{3}{8}y^3$$

$$\frac{1}{16}a^3-\frac{5}{8}a^2b+\frac{5}{3}ab^2-b^3 \mid \frac{1}{4}a-\frac{3}{2}b$$

$$-\frac{1}{16}a^3+\frac{3}{8}a^2b \qquad \frac{1}{4}a^2-ab+\frac{2}{3}b^2$$

$$-\frac{1}{4}a^2b+\frac{5}{3}ab^2$$

$$\frac{1}{4}a^2b-\frac{3}{2}ab^2$$

$$\frac{1}{6}ab^2-b^3$$

$$-\frac{1}{6}ab^2+b^3$$

$$\frac{3}{8}x^5+\frac{21}{40}x^4-\frac{47}{120}x^3+\frac{79}{120}x^2+\frac{1}{10}x-\frac{1}{10} \mid \frac{1}{4}x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$$

$$-\frac{3}{8}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2 \qquad \frac{3}{2}x^2+\frac{1}{10}x-\frac{1}{5}x$$

$$\frac{1}{40}x^4-\frac{1}{60}x^3-\frac{11}{120}x^2+\frac{1}{10}x$$

$$-\frac{1}{40}x^4-\frac{1}{30}x^3+\frac{1}{40}x^2-\frac{1}{20}x$$

$$-\frac{1}{20}x^3-\frac{1}{15}x^2+\frac{1}{20}x-\frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{20}x^3+\frac{1}{15}x^2-\frac{1}{20}x+\frac{1}{10}$$

7.Productos Notables

Se llama productos notables a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación.

- **Cuadrado de un Binomio**

Cuadrado de la Suma de dos cantidades

Elevar al cuadrado $a + b$ equivale a multiplicar este binomio por sí mismo y tendremos:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

Efectuando este producto, tenemos:

$$(a + b)(a + b)$$

$$= a^2 + ab + ab + b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

O sea: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Luego, el cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad más el duplo de la primera cantidad por la segunda más el cuadrado de la segunda cantidad.

- **Cuadrado de la Diferencia de dos cantidades**

Elevar $(a - b)$ al cuadrado equivale a multiplicar esta diferencia por sí misma; luego:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$

Efectuando este producto, tendremos:

$$(a - b)(a - b)$$

$$= a^2 - ab - ab + b^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

O sea: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Luego, el cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad menos el duplo de la primera cantidad por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad.

Ejemplos

Escribir, por simple inspección, el resultado de:

1. $(6a+b)^2$
2. $(1+3x^2)^2$
3. $(a^2x+by^2)^2$
4. $(2a-3b)^2$
5. $(3a^4-5b^2)^2$
6. $(x^5-3ay^2)^2$

Soluciones

$$(6a+b)^2 = (6a)^2 + 2(6a)(b) + (b)^2$$
$$= 36a^2 + 12ab + b^2$$

$$(1+3x^2)^2 = (1)^2 + 2(1)(3x^2) + (3x^2)^2$$
$$= 1 + 6x^2 + 9x^4$$

$$(a^2x+by^2)^2 = (a^2x)^2 + 2(a^2x)(by^2) + (by^2)^2$$
$$= a^4x^2 + 2a^2xby^2 + b^2y^4$$

$$(2a-3b)^2 = (2a)^2 - 2(2a)(3b) + (3b)^2$$
$$= 4a^2 - 12ab + 9b^2$$

$$(3a^4-5b^2)^2 = (3a^4)^2 - 2(3a^4)(5b^2) + (5b^2)^2$$
$$= 9a^8 - 30a^4b^2 + 25b^4$$

$$(x^5-3ay^2)^2 = (x^5)^2 - 2(x^5)(3ay^2) + (3ay^2)^2$$
$$= x^{10} - 6ax^5y^2 + 9a^2y^4$$

Taller en Clase

1. $(7x + 11)^2$
2. $(4ax - 1)^2$
3. $(4m^5 + 5n^6)^2$
4. $(2m - 3n)^2$
5. $(4ab^2 + 5xy^3)^2$

Solucionario

$$(7x + 11)^2 = (7x)^2 + 2(7x)(11) + (11)^2$$
$$= 49x^2 + 154x + 121$$

$$(4ax - 1)^2 = (4ax)^2 - 2(4ax)(1) + (1)^2$$
$$= 16a^2x^2 - 8ax + 1$$

$$(4m^5 + 5n^6)^2 = (4m^5)^2 + 2(4m^5)(5n^6) + (5n^6)^2$$
$$= 16m^{10} + 40m^5n^6 + 25n^{12}$$

$$(2m - 3n)^2 = (2m)^2 - 2(2m)(3n) + (3n)^2$$
$$= 4m^2 - 12mn + 9n^2$$

$$(4ab^2 + 5xy^3)^2 = (4ab^2)^2 + 2(4ab^2)(5xy^3) + (5xy^3)^2$$
$$= 16a^2b^4 + 40ab^2xy^3 + 25x^2y^6$$

Tarea

1. $(7a^2b^3 + 5x^4)^2$
2. $(a^7 - b^7)^2$
3. $(8x^2y + 9m^3)^2$
4. $(10x^3 - 9xy^5)^2$
5. $(x^{10} + 10y^{12})^2$

Solucionario de la tarea

$$(7a^2b^3+5x^4)^2=(7a^2b^3)^2+2(7a^2b^3)(5x^4)+(5x^4)^2$$
$$=49a^4b^6+70a^2b^3x^4+25x^8$$

$$(a^7-b^7)^2=(a^7)^2-2(a^7)(b^7)+(b^7)^2$$
$$=a^{14}-2a^7b^7+b^{14}$$

$$(8x^2y+9m^3)^2=(8x^2y)^2+2(8x^2y)(9m^3)+(9m^3)^2$$
$$=64x^4y^2+144x^2ym^3+81m^6$$

$$(10x^3-9xy^5)^2=(10x^3)^2-2(10x^3)(9xy^5)+(9xy^5)^2$$
$$=100x^6-180x^4y^5+81x^2y^{10}$$

$$(x^{10}+10y^{12})^2=(x^{10})^2+2(x^{10})(10y^{12})+(10y^{12})^2$$
$$=x^{20}+20x^{10}y^{12}+100y^{24}$$

- **Producto de la Suma por la Diferencia de Dos Cantidades**

Sea el producto $(a+b)(a-b)$

Efectuando esta multiplicación, tenemos:

$$(a+b)(a-b)$$
$$= a^2 + ab - ab - b^2$$
$$= a^2 - b^2$$

O sea: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Luego, la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia es igual al cuadrado del minuendo (en la diferencia) menos el cuadrado del sustraendo.

Ejemplos

Escribir, por simple inspección, el resultado de:

1. $(n-1)(n+1)$
2. $(x^2+a^2)(x^2-a^2)$
3. $(1-3ax)(3ax-1)$
4. $(x+y-2)(x-y+2)$
5. $(x^2-5x+6)(x^2+5x-6)$

Soluciones de los ejemplos

$(n-1)(n+1) = n^2 - 1$

$(x^2+a^2)(x^2-a^2) = x^4 - a^4$

$(1-3ax)(3ax-1) = 1 - 9a^2x^2$

$(x+y-2)(x-y+2) = x^2 - (y-2)^2$

$$= x^2 - y^2 + 4y - 4$$

$(x^2-5x+6)(x^2+5x-6) = (x^2)^2 - (5x-6)^2$

$$= x^4 - 25x^2 + 60x - 36$$

Taller en clase

1. $(a^3 - b^2)(a^3 + b^2)$
2. $(1 - 8xy)(8xy + 1)$
3. $(6x^2 - m^2x)(6x^2 + m^2x)$
4. $(n^2 + 2n + 1)(n^2 - 2n - 1)$
5. $(2a - b - c)(2a - b + c)$

Solucionario del taller

$(a^3 - b^2)(a^3 + b^2) = a^6 - b^4$

$(1 - 8xy)(8xy + 1) = 1 - 64x^2y^2$

$(6x^2 - m^2x)(6x^2 + m^2x) = 36x^4 - m^4x^2$

$$\begin{aligned}(n^2 + 2n + 1)(n^2 - 2n - 1) &= (n^2)^2 - (2n + 1)^2 \\ &= n^4 - 4n^2 - 4n - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2a - b - c)(2a - b + c) &= (2a - b)^2 - (c)^2 \\ &= 4a^2 - 4ab + b^2 - c^2\end{aligned}$$

Tarea

1. $(y^2 - 3y)(y^2 + 3y)$
2. $(2m + 9)(2m - 9)$
3. $(2x + y - z)(2x - y + z)$
4. $(a^2 - ab + b^2)(a^2 + b^2 + ab)$
5. $(x^3 - x^2 - x)(x^3 + x^2 + x)$

Solucionario de la tarea

$$(y^2 - 3y)(y^2 + 3y) = y^4 - 9y^2$$

$$(2m + 9)(2m - 9) = 4m^2 - 81$$

$$\begin{aligned}(2x + y - z)(2x - y + z) &= (2x)^2 - (y - z)^2 \\ &= 4x^2 - y^2 + 2yz - z^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a^2 - ab + b^2)(a^2 + b^2 + ab) &= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 \\ &= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 \\ &= a^4 + a^2b^2 + b^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x^3 - x^2 - x)(x^3 + x^2 + x) &= (x^3)^2 - (x^2 + x)^2 \\ &= x^6 - x^4 - 2x^3 - x^2\end{aligned}$$

- **Cubo de un Binomio**

Elevemos $a + b$ al cubo

Tendremos: $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^2(a+b)$

$$= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$$

Efectuando esta multiplicación, tenemos:

$$(a^2 + 2ab + b^2)\ (a+b)$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

O sea: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Lo que nos dice que el cubo de la suma de dos cantidades es igual al cubo de la primera cantidad más el triplo del cuadrado de la primera por la segunda, más el triplo de la primera por el cuadrado de la segunda, más el cubo de la segunda.

1) Elevemos $a - b$ al cubo

Tendremos: $(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b)$

Efectuando esta multiplicación, tenemos:

$$(a^2 - 2ab + b^2)(a-b)$$
$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

O sea: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Lo que nos dice que el cubo de la diferencia de dos cantidades es igual al cubo de la primera cantidad, menos el triplo del cuadrado de la primera por la segunda, más el triplo de la primera por el cuadrado de la segunda, menos el cubo de la segunda cantidad.

Ejemplos

1. $(a+2)^3$
2. $(2x+1)^3$
3. $(n-4)^3$
4. $(x-1)^3$

Soluciones

$(a+2)^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$

$(2x+1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

$(n-4)^3 = n^3 - 12n^2 + 48n - 64$

$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Taller en clase

1. $(m+3)^3$
2. $(1-2n)^3$
3. $(1-3y)^3$
4. $(1-a^2)^3$

Solucionario del taller

$(m+3)^3 = m^3 + 9m^2 + 27m + 27$

$(1-2n)^3 = 1 - 6n + 12n^2 - 8n^3$

$(1-3y)^3 = 1 - 9y + 27y^2 - 27y^3$

$(1-a^2)^3 = 1 - 3a^2 + 3a^4 - a^6$

Tarea

1. $(2 + y^2)^3$
2. $(4n + 3)^3$
3. $(a^2 - 2b)^3$
4. $(2x + 3y)^3$

Solucionario de la tarea

$(2 + y^2)^3 = 8 + 12y^2 + 6y^4 + y^6$

$(4n + 3)^3 = 64n^3 + 144n^2 + 108n + 27$

$(a^2 - 2b)^3 = a^6 - 6a^4b + 12a^2b^2 - 8b^3$

$(2x + 3y)^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

- **Producto de Dos Binomios de la Forma $(\mathbf{x}+\mathbf{a})(\mathbf{x}+\mathbf{b})$**

La multiplicación nos da:

$(x+2)(x+3)$ $=x^2+2x+3x+6$ $=x^2+5x+6$	$(x-3)(x-4)$ $=x^2-3x-4x+12$ $=x^2-7x+12$	$(x-2)(x+5)$ $=x^2-2x+5x-10$ $=x^2+3x-10$	$(x+6)(x-4)$ $=x^2+6x-4x-24$ $=x^2+2x-24$

En los cuatro ejemplos expuestos se cumplen las siguientes reglas:

El primer término del producto es el producto de los primeros términos de los binomios.

El coeficiente del segundo término del producto es la suma algebraica de los segundos términos de los binomios y en este término la x está elevada a un exponente que es la mitad del que tiene esta letra en el primer término del producto.

El tercer término del producto es el producto de los segundos términos de los binomios.

Ejemplos

Escribir, por simple inspección, el resultado de:

1. $(x+5)(x-2)$
2. $(a^2+5)(a^2-9)$
3. $(ab+5)(ab-6)$
4. $(a^5-2)(a^5+7)$

Soluciones de los ejemplos

$$(x+5)(x-2)=x^2+3x-10$$

$$(a^2+5)(a^2-9)=a^4-4a^2-45$$

$$(ab+5)(ab-6)=a^2b^2-ab-30$$

$$(a^5-2)(a^5+7)=a^{10}+5a^5-14$$

Taller en clase

1. $(m-6)(m-5)$
2. $(n-19)(n+10)$
3. $(xy^2-9)(xy^2+12)$
4. $(a^4+8)(a^4-1)$
5. $(n^2-1)(n^2+20)$

Solucionario del taller

$$(m-6)(m-5)=m^2-11m+30$$

$$(n-19)(n+10)=n^2-9n-190$$

$$(xy^2-9)(xy^2+12)=x^2y^4+3xy^2-108$$

$$(a^4+8)(a^4-1)=a^8+7a^4-8$$

$$(n^2-1)(n^2+20)=n^4+19n^2-20$$

Tarea

1. $(a^6 + 7)(a^6 - 9)$
2. $(a^2b^2 - 1)(a^2b^2 + 7)$
3. $(x^3y^3 - 6)(x^3y^3 + 8)$
4. $(x^3 + 7)(x^3 - 6)$
5. $(a - 11)(a + 10)$

Solucionario de la tarea

$(a^6+7)(a^6-9)=a^{12}-2a^6-63$

$(a^2b^2-1)(a^2b^2+7)=a^4b^4+6a^2b^2-7$

$(x^3y^3-6)(x^3y^3+8)=x^6y^6+2x^3y^3-48$

$(x^3+7)(x^3-6)=x^6+x^3-42$

$(a-11)(a+10)=a^2-a-110$

8.Factorización

- **Factor común monomio**

1. Descomponer en factores $a^2 + 2a$

$a^2 + 2a$ contiene un factor común *a*. Escribimos el factor común *a* como el coeficiente de un paréntesis; dentro del paréntesis escribimos los cocientes de dividir $a^2 \div a = a$

y $2a \div a = 2,$ y tendremos $a^2 + 2a = a(a + 2)$.

2. Descomponer $10b - 30ab^2$

Los coeficientes 10 y 30 tiene los factores comunes 2, 5 y 10. Tomamos 10 porque siempre se casa el mayor factor común. De las letras, el único factor común es *b* porque está en los 2 términos de la expresión dada y la tomamos con su menor exponente *b*. El factor común es *10b*. Lo escribimos como coeficiente de un paréntesis y dentro ponemos los cocientes de dividir $10b \div 10b = 1$ y $-30ab^2 \div 10b = -3ab$ y tendremos: $10b - 30ab^2 = 10b(1 - 3ab)$

3. Descomponer $10a^2 - 5a + 15a^3$

El factor común es $5a$. tendremos:

$$10a^2 - 5a + 15a^3 = 5a(2a - 1 + 3a^2)$$

4. Descomponer $18mxy^2 - 54m^2x^2y^2 + 36my^2$.

El factor común es $18my^2$. Tendremos:

$$18mxy^2 - 54m^2x^2y^2 + 36my^2 = 18my^2(x - 3mx^2 + 2)$$

5. Factor $6xy^3 - 9nx^2y^3 + 12nx^3y^3 - 3n^2x^4y^3$.

Factor común $3xy^3$.

$$6xy^3 - 9nx^2y^3 + 12nx^3y^3 - 3n^2x^4y^3$$
$$= 3xy^3(2 - 3nx + 4nx^2 - n^2x^3)$$

- **Factor común polinomio**

1. Descomponer $x(a+b)+m(a+b)$.

Los dos términos de esta expresión tienen de factor común el binomio $(a+b)$. Escribo $(a+b)$ como coeficiente de un paréntesis y dentro del paréntesis escribo los cocientes de dividir los dos términos de la expresión dada entre el factor común $(a+b)$, o sea:

$$\frac{x\,(a+b)}{(a+b)}=x \quad y \quad \frac{m\,(a+b)}{(a+b)}=m \quad y\ tendremos:$$

$$x\,(a+b)+m(a+b)=(a+b)(x+m)$$

2. Descomponer $2x(a-1)-y\,(a-1)$.

Factor común $(a-1)$. Dividiendo los dos términos de la expresión dada entre el factor común $(a-1)$, tenemos:

$$2x\,\frac{(a-1)}{(a-1)}=2x \quad y \quad \frac{-y\,(a-1)}{(a-1)}=-y$$

$$Tendremos: 2x\,(a-1)-y(a-1)=(a-1)(2x-y)$$

3. Descomponer $m\,(x+2)+x+2$.

Esta expresión podemos escribirla: $m(x+2)+(x+2)=m(x+2)+1(x+2)$.

Factor común $(x+2)$. Tendremos:

$$m(x+2)+1(x+2)=(x+2)(m+1)$$

4. Descomponer $a(x+1)-x-1$.

Introduciendo los dos últimos términos en un paréntesis precedido del signo – se tiene:

$$\begin{aligned} a(x+1)-x-1 &= a(x+1)-(x+1)=a(x+1)-1(x+1)\\ &=(x+1)(a-1). \end{aligned}$$

5. Factorar $2x\,(x+y+z)-x-y-z.$

Tendremos:

$$2x\,(x+y+z)-x-y-z=2x(x+y+z)-(x+y+z)$$
$$=(x+y+z)(2x-1)$$

6. Factorar $(x-a)(y+2)+b(y+2).$

Factor común $(y+2).$ Dividiendo los dos términos de la expresión dada entre $(y+2)$

$$\frac{(x-a)(y+2)}{(y+2)}=x-a \quad y \quad \frac{b(y+2)}{(y+2)}=b; \quad luego:$$

$$(x-a)(y+2)+b(y+2)=(y+2)(x-a+b)$$

7. Descomponer $(x+2)(x-1)-(x-1)(x-3).$

Dividiendo entre el factor común $(x-1)$ tenemos:

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)}=(x+2) \quad y \quad \frac{-(x-1)(x-3)}{(x-1)}=-(x-3).$$

Por tanto:

$$(x+2)(x-1)-(x-1)(x-3)=(x-1)[(x+2)-(x-3)]$$
$$=(x-1)(x+2-x+3)=(x-1)(5)=5(x-1)$$

8. Factorar $x(a-1)+y(a-1)-a+1$

$$x(a-1)+y(a-1)-a+1=x(a-1)+y(a-1)-(a-1)$$
$$=(a-1)(x+y-1)$$

Tarea

1. $3a^3{-}a^2$.
2. $15c^3d^2 + 60c^2d^3$
3. $24a^2xy^2 - 36x^2y^4$.
4. $x(a + 1) - a - 1$.
5. $(x + y)(n + 1) - 3(n + 1)$.
6. $(a + b - c)(x - 3) - (b - c - a)(x - 3)$.

Solución de la tarea

1. $3a^3 - a^2$
   $= a^2(3a - 1)$

2. $15c^3d^2 + 60c^2d^3$
   $= 15c^2d^2(c + 4d)$

3. $24a^2xy^2 - 36x^2y^4$
   $= 12xy^2(2a^2 - 3xy^2)$

4. $x(a + 1) - a - 1$
   $= x(a + 1) - (a + 1)$
   $= (a + 1)(x - 1)$

5. $(x + y)(n + 1) - 3(n + 1)$
   $= (n + 1)(x + y - 3)$

6. $(a + b - c)(x - 3) - (b - c - a)(x - 3)$
   $= (x - 3)(a \cancel{+b} \cancel{-c} + a \cancel{-b} \cancel{+c})$
   $= (x - 3)2a$

- **Factor común por agrupación de términos.**

Ejemplos:

1. Descomponer $ax + bx + ay + by.$

Los dos primeros términos tienen un factor común *x y* los dos últimos el factor común *y.* Agrupamos los dos primeros términos en un paréntesis y los dos últimos en otro precedido del signo + porque el tercer termino tiene el signo + y tendremos:

$$\begin{aligned} ax + bx + ay + by &= (ax + bx) + (ay + by) \\ &= x(a + b) + y(a + b) \\ &= (a + b)(x + y) \end{aligned}$$

La agrupación puede hacerse generalmente de más de un modo con tal que los dos términos que se agrupan tengan algún factor común, y siempre que las cantidades que quedan dentro de los paréntesis después de sacar el factor común en cada grupo sean exactamente iguales. Si esto no es posible lograrlo la expresión dada no se puede descomponer por este método. Así en el ejemplo anterior podemos agrupar el 1ª y 3er. Términos que tienen el factor común *a* y el 2ª y 4ª que tienen el factor común *b* y tendremos:

$$ax + bx + ay + by = (ax + bx) + (ay + by)$$

$$= a(x + y) + b(x + y)$$

$$= (x + y)(a + b)$$

Resultado idéntico al anterior, ya que el orden de los factores es indiferente.

2. Factor $3m^2 - 6mn + 4m - 8n$

Los dos Primeros términos tienen el factor común 3m y los 2 últimos el factor común 4. Agrupando, tenemos:

$$\begin{aligned} 3m^2 - 6mn + 4m - 8n &= (3m^2 - 6mn) + (4m - 8n) \\ &= 3m\,(m - 2n) + 4(m - 2n) \\ &= (m - 2n)(3m + 4) \end{aligned}$$

3. Descomponer $2x^2 - 3xy - 4x + 6y.$

Los 2 primeros términos tienen el factor común *x y* Los 2 últimos el factor común *2,* luego Los agrupamos, pero introducimos los 2 últimos términos en un paréntesis precedido del signo - porque el signo del 3er. Término es -, para lo cual hay que cambiarles el signo y tendremos:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3xy - 4x + 6y &= (2x^2 - 3xy) - (4x - 6y) \\ &= x(2x - 3y) - 2(2x - 3y) \\ &= (2x - 3y)(x - 2) \end{aligned}$$

4. Descomponer $x + z^2 - 2ax - 2az^2$.

$$\begin{aligned} x + z^2 - 2ax - 2az^2 &= (x + z^2) - (2ax + 2ax^2) \\ &= (x + z^2) - 2a(x + z^2) \\ &= (x + z^2)(1 - 2a) \end{aligned}$$

5. Factorar $3ax - 3x + 4y - 4ay$.

$$\begin{aligned} 3ax - 3x + 4y - 4ay &= (3ax - 3x) + (4y - 4ay) \\ &= 3x(a - 1) + 4y(1 - a) \\ &= 3x(a - 1) - 4y(a - 1) \\ &= (a - 1)(3x - 4y) \end{aligned}$$

Observe que la segunda línea del ejemplo anterior los binomios $(a - 1) y\ (1 - a)$ Tiene los signos distintos; para hacerlos iguales combinamos los signos al binomio $(1 - a)$ convirtiéndolo en $(a - 1)$, pero para que el producto $4y\ (1 - a)$ no variara de signo le combinamos el signo al otro factor 4y convirtiéndolo en -4. En el ejemplo anterior, agrupando

$$\begin{aligned} 3ax - 3x + 4y - 4ay &= (3ax - 4ay) - (3x - 4y) \\ &= a(3x - 4y) - (3x - 4y) \\ &= (3x - 4y)(a - 1) \end{aligned}$$

6. Factorar $ax - ay + az + x - y + z$.

$$\begin{aligned} ax - ay + az + x - y + z &= (ax - ay + az) + (x - y + z) \\ &= a(x - y + z) + (x - y + z) \\ &= (x - y + z)(a + 1) \end{aligned}$$

7. Descomponer $a^2x - ax^2 - 2a^3y + 2axy + x^3 - 2x^3y$.

$$\begin{aligned} &a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy + x^3 - 2x^2y \\ &= (a^2x - 2a^2y) - (ax^2 - 2axy) + (x^3 - 2x^2y) \\ &= a^2(x - 2y) - ax(x - 2y) + x^2(x - 2y) \\ &= (x - 2y)(a^2 - ax + x^2) \end{aligned}$$

Agrupando de otro modo:

$$\begin{aligned} &a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy + x^3 - 2x^2y \\ &= (a^2x - ax^2 + x^3) - (2a^2y - 2axy + 2x^2y) \\ &= x(a^2 - ax + x^2) - 2y(a^2 - ax + x^2) \\ &= (a^2 - ax + x^2)\ (x - 2y) \end{aligned}$$

Tarea

1. $x^3 - a^2 + x - a^2x$.
2. $3abx^2 - 2y^2 - 2x^2 + 3aby^2$.
3. $2a^2x - 5a^2y + 15by - 6bx$.
4. $4am^3 - 12amn - m^3 + 3n$.
5. $a^3 - a^2 + a + 1$.
6. $3ax - 2by - 2bx - 6a + 3ay + 4b$.

Solución para la Tarea

1. $x^2 - a^2 + x - a^2x$
   $= -(a^2 + a^2x) + (x^2 + x)$
   $= -a^2(1 + x) + x(x + 1)$
   $= (x + 1)(x - a^2)$

2. $3abx^2 - 2y^2 - 2x^2 + 3aby^2$
   $= (3abx^2 + 3aby^2) - (2y^2 + 2x^2)$
   $= 3ab\,(x^2 + y^2) - 2(x^2 + y^2)$
   $= (x^2 + y^2)(3ab - 2)$

3. $2a^2x - 5a^2y + 15by - 6bx$
   $= (2a^2x - 5a^2y) + (15by - 6bx)$
   $= a^2(2x - 5y) + 3b(5y - 2x)$
   $= a^2(2x - 5y) + 3b(2x - 5y)$
   $= (5y - 2x)(a^2 + 3b)$

4. $4am^3 - 12amn - m^3 + 3n$
   $= (4am^3 - 12amn) - (m^2 + 3n)$
   $= 4am\,(m^2 - 3n) - (m^2 - 3n)$
   $= (m^2 - 3n)(4am - 1)$

5. $a^3 - a^2 + a + 1$
   $= (a^3 + a^2) + (a + 1)$
   $= a^2(a + 1) + (a + 1)$
   $= (a^2 + 1) + (a + 1)$

6. $3ax - 2by - 2bx - 6a + 3ay + 4b$
   $= (3ax - 6a + 3ay) - (2by + 2bx - 4b)$
   $= 3a\,(x - 2 + y) - 2b\,(y + x - 2)$
   $= (x + y - 2)(3a - 2b)$

- **Trinomio Cuadrado Perfecto**

Una cantidad es cuadrado perfecto cuando es el cuadrado de otra cantidad, o sea es el producto de dos factores iguales. Así, $4a^2$ es cuadrado perfecto porque es el cuadrado de $2a$. En efecto:

$(2a)^2 = 2a\ x\ 2a = 4a^2$ y $2a$, que multiplicada por si misma de $4a^2$, es la raíz cuadrada de $4a^2$.

Obsérvese que $(-2a)^2 = (-2\text{a})\ x\ (-2\text{a}) = 4a^2$; luego -2ª es también la raíz cuadrada de $4a^2$. Lo anterior nos dice que la raíz cuadrada de una cantidad positiva tiene dos signos, $+$ y $-$:

Raíz Cuadrada de un Monomio

Para extraer la raíz cuadrada de un monomio se extrae la raíz cuadrada de su coeficiente y se divide el exponente de cada letra por 2. Así, la raíz cuadrada de $9a^2b^4$ es $3ab^2$ porque $(3ab^2)^2 = 3ab^2\ x\ 3ab^2 = 9a^2b^4$. La raíz cuadrada de $36x^6y^8$ es $6x^3y^4$. Un trinomio es cuadrado perfecto cuando es el cuadrado de un binomio, o sea, el producto de dos binomios iguales.

Así, $a^2 + 2ab + b^2$ es cuadrado perfecto porque es el cuadrado de $a + b$.

En efecto $(a + b)^2 = (a + b)\ (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$. Del propio modo, $(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 2xy + 9y^2$ luego un trinomio cuadrado perfecto.

Regla para conocer si un Trinomio es Cuadrado Perfecto

Un trinomio ordenado con relación a una letra es cuadrado perfecto cuando el primero y tercero términos son cuadrados perfectos (o tienen raíz cuadrada exacta) y positivos, y el segundo término es el doble producto de sus raíces cuadradas.

Así, $a^2 - 4ab + 4b^2$ es cuadrado perfecto porque:

Raíz cuadrada de a^2……………. a

Raíz cuadrada de $4b^2$…………... $2b$

Doble producto de estas raíces $2\ X\ a\ X\ 2b = 4ab$, segundo término.

$36x^2 - 18y^4 + 4y^8$ no es cuadrado perfecto porque:

Raíz cuadrada de $36x^2$…………. $6x$

Raíz cuadrada de $4y^8$……........ $2y^4$

Doble producto de estas raíces: $2\ \cdot 6x\ \cdot 2y^4 = 24\text{x}y^4$, que no es el 2° término.

Regla para Factorar un Trinomio un Trinomio Cuadrado Perfecto

Se extrae la raíz cuadrada al primero y tercer término del trinomio y se separan estas raíces por el signo del segundo término. El binomio así formado, que es la raíz cuadrada del trinomio, se multiplica por sí mismo o se eleva a cuadrado.

Ejemplos:

1. Factorar $m^2 + 2m + 1$.

$$m^2 + 2m + 1 = (m+1)(m+1) = (m+1)^2$$

2. Descomponer $4x^2 + 25y^2 - 20xy$.

Ordenando el trinomio, tenemos:

$$4x^2 - 20xy + 25y^2 = (2x - 5y)(2x - 5y) = (2x - 5y)^2$$

Importante

Cualquiera de las dos raíces puede ponerse de minuendo. Así, en el ejemplo anterior se tendrá también:

$$4x^2 - 20xy + 25y^2 = (5y - 2x)(5y - 2x) = (5y - 2x)^2$$

Porque desarrollando este binomio se tiene:

$$(5y - 2x)^2 = 25y^2 - 20xy + 4x^2$$

Expresión idéntica a $4x^2 - 20xy + 25y^2$ ya que tiene las mismas cantidades con los mismos signos.

3. Descomponer $1 - 16ax^2 - 64a^2x^4$.

$$1 - 16ax^2 - 64a^2x^4 = (1 - 8ax^2)^2 = (8ax^2 - 1)^2$$

4. Factorar $x^2 + bx + \frac{b^2}{4}$.

Este trinomio es cuadrado perfecto porque: Raíz cuadrada de $x^2 = x$; raíz cuadrada de $\frac{b^2}{4} = \frac{b}{2}$ y el doble producto de estas raíces: $2 \cdot x \cdot \frac{b}{2} =$ bx , luego:

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

5. Factorar $\frac{1}{4} - \frac{b}{3} + \frac{b^2}{9}$.

Es cuadrado perfecto porque: Raíz cuadrada de $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; raíz cuadrada de

$\frac{b^2}{9} = \frac{b}{3}$ y $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{3} = \frac{b}{3}$ luego: $\frac{1}{4} - \frac{b}{3} + \frac{b^2}{9} = \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{3}\right)^2 = \left(\frac{b}{3} - \frac{1}{2}\right)^2$

Tarea

1. $49m^6 - 70am^3n^2 + 25\,a^2n^4$
2. $121 + 198x^6 + 81\,x^{12}$
3. $a^2 - 24am^2x^2 + 144\,m^4x^4$
4. $1\, + \frac{2\mathrm{b}}{3} + \frac{b^2}{9}$
5. $(a + x)^2 - 2\,(a + x)(x + y) +\, (x + y)^2$
6. $9(x - y\,)^2 + 12\,(c - y)(x + y) + 4\,(x + y)^2$

Solucionario de tarea

1. $49m^6 - 70am^3n^2 + 25\,a^2n^4 = (7m^3 - 5an^2)^2$
2. $121 + 198x^6 + 81\,x^{12} = (11 + 9x^6)^2$
3. $a^2 - 24am^2x^2 + 144\,m^4x^4 = (a - 12m^2x^2)^2$
4. $1 + \frac{2\mathrm{b}}{3} + \frac{b^2}{9} = \left(1 + \frac{b}{3}\right)^2$
5. $(a + x)^2 - 2\,(a + x)(x + y) + (x + y)^2 = [(a + x) - (x + y)]^2$

   $= a + x - x - y = (a - y)^2$
6. $9(x - y\,)^2 + 12\,(c - y)(x + y) + 4\,(x + y)^2 = 3(x - y) + 2(x + y)$

   $= 3x - 3y + 2x + 2y$

   $= (3x + 2x) + (2y - 3y) = (\,5x - y)^2$

- **Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$**

Se tratan de los trinomios que cumplen con las siguientes condiciones:

a) El coeficiente del primer término es 1.
b) El primer término es una letra cualquiera elevada al cuadrado
c) El segundo término tiene la misma letra que el primero con un exponente 1 y su coeficiente es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.
d) El tercer término es independiente de la letra que aparece en el 1º y 2º términos y es una cantidad cualquiera positiva o negativa

Regla práctica para factorizar un trinomio de la forma $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$

1. El trinomio se descompone en dos factores binomios cuyo primer término es x, o sea la raíz cuadrada del primer término del trinomio.
2. En el primer factor, después de x se escribe el signo del segundo término del trinomio, y en el segundo factor, después de x se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo del 2º término del trinomio por el signo del tercer término del trinomio
3. Si los dos factores binomios tienen en el medio **signos iguales** se buscan los dos números cuya suma sea el valor absoluto del segundo término del trinomio y cuyo producto sea el calor absoluto del tercer término del trinomio. Estos números son los segundos términos de los binomios.
4. Si los dos factores binomios tienen en el medio **signos distintos** se buscan dos números cuya diferencia sea el valor absoluto del tercer término del trinomio. El mayor de estos números es el segundo término del primer binomio, y el menos, el segundo término del segundo binomio

Esta regla práctica, muy sencilla en su aplicación, se aclarará con los siguientes ejemplos:

1. Factorizar $x^2 + 5x + 6$

El trinomio se descompone en dos binomios cuyo primer término es la raíz cuadrada de x^2 o sea x:

$$x^2 + 5x + 6 \qquad (x \quad)(x \quad)$$

En el primer binomio después de x se pone el signo + porque el segundo término del trinomio +5x tiene signo +. En el segundo binomio, después de x, se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo de +5x por el signo de +6 y se tiene que + por + da + o sea:

$$x^2 + 5x + 6 \qquad (x+ \quad)(x+ \quad)$$

Ahora, como en estos binomios tenemos signos iguales buscamos dos números que cuya suma sea 5 y cuyo producto sea 6. Estos números son 2 y 3, luego:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

2. Factorizar $x^2 - 7x + 12$

Tenemos: $x^2 - 7x + 12 \qquad (x- \quad)(x- \quad)$

En el primer binomio se pone – porque -7x tiene signo –. En el segundo Binomio se pone – porque multiplicando el signo de -7x por el signo de +12 se tiene que: - por + da -.

Ahora, como en los binomios tenemos signos iguales buscamos dos números cuya suma sea 7 y cuyo producto sea 12. Estos números son 3 y 4, luego:

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$$

3. Factorizar $x^2 + 2x - 15$

Tenemos: $x^2 + 2x - 15 \qquad (x+ \quad)(x- \quad)$

En el primer binomio se pone + porque +2x tiene signo +. En el segundo binomio se pone – porque multiplicando el signo de +2x por el signo de -15 se tiene que + por – da -. Ahora, como en los binomios tendremos signos distintos buscamos dos números cuya diferencia sea 2 y cuyo producto sea 15.

Estos números son 5 y 3. El mayor 5, se escribe en el primer binomio, y tenemos:

$$x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$$

4. Factorizar $x^2 - 5x - 14$

Tenemos: $x^2 - 5x - 14 \qquad (x- \quad)(x+ \quad)$

En el primer binomio se pone – porque -5x tiene signo -. En el segundo binomio se pone + porque multiplicando el signo de -5x por el signo de -14 se tiene que – por – da +. Ahora como en los binomios tenemos signos distintos se buscan dos números cuya diferencia sea 5 y cuyo producto sea 14. Estos números son 7 y 2. El mayor 7, se escribe en el primer binomio y se tendrá:

$$x^2 - 5x - 14 = \qquad (x - 7)(x + 2)$$

5. Factorizar $a^2 - 13a + 40$

$$a^2 - 13a + 40 = \qquad (a - 5)(a - 8)$$

6. Factorizar $m^2 - 11m - 12$

$$m^2 - 11m - 12 = \qquad (m - 12)(m + 1)$$

7. Factorizar $x^2 + 6x - 216$

$$x^2 + 6x - 216 \qquad (x+ \quad)(\,x- \quad)$$

Necesitamos dos números cuya diferencia sea 6 y cuyo producto sea 216.

Estos números no se ven fácilmente. Para hallarlos, descomponemos en sus factores primos el tercer término:

216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

Ahora, formamos con estos factores primos dos productos. Por tanto, variando los factores de cada producto, obtendremos los números que buscamos. Así:

2x2x2=8	3x3x3=27	28-8=19	no nos sirven
2x2x2x3=24	3x3=9	24-9=15	no nos sirven
2x2x3=12	2x3x3=18	18-12=**6**	sirven

18 y 12 son los números que buscamos porque en s u diferencia es 6 y su producto necesariamente es 216 ya que para obtener estos números hemos empleado todos los factores que obtuvimos en la descomposición de 216. Por lo tanto:

$$x^2 + 6x - 216 = \qquad (x + 18)(x - 12)$$

8. Factorizar $a^2 - 66a + 1080$

$$a^2 - 66a + 1080 \qquad (a- \quad)(\,a- \quad)$$

Necesitamos dos números cuya suma sea 66 y cuyo producto sea 1080.Descomponiendo 1080, tendremos:

1080	2
540	2
270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

2x2x2=8	3x3x3x5=105	105+8=113	no nos sirven
2x2x2x3=24	3x3x5=45	45+24=69	no nos sirven
2x3x5=30	2x2x3x3=36	30+36=66	sirven

Los números que necesitamos son 30 y 36 porque su suma es 66 y su producto necesariamente es 1080 ya que para obtener estos números hemos empleado todos los factores que obtuvimos en la descomposición de 1080, luego:

$$a^2 - 66a + 1080 = \qquad (a - 36)(\,a - 30)$$

Tarea

Factorizar o descomponer en dos factores

1. $m^2 + 5m - 14$
2. $y^2 - 4y + 3$
3. $x^2 - 7x - 30$
4. $x^2 + 15x + 56$
5. $a^2 + 42a + 432$

Solucionario de la Tarea

1. $m^2 + 5m - 14 = (x+5)(x+2)$
2. $y^2 - 4y + 3 = (y-3)(y-1)$
3. $x^2 - 7x - 30 = (x-10)(x+3)$
4. $x^2 + 15x + 56 = (x+8)(x+7)$
5. $a^2 + 42a + 432$

432	2	
216	2	$2^3 \cdot 3 = 24$
108	2	$2 \cdot 11 = 22$
54	2	$\Rightarrow 24 + 18 = 42$
27	3	$= (a+24)(a+18)$
9	3	
3	3	
1		

Otros Ejemplos

El procedimiento anterior es aplicable a la factorización de trinomios que siendo de la forma $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$ difieren algo de los estudiados anteriormente.

1. Factorizar $x^4 - 5x^2 - 50$

El primer término de cada factor binomio será la raíz cuadrada de x^4 o sea x^2:

$$x^4 - 5x^2 - 50 \quad (x^2 - \ )(x^2 + \ ).$$

Buscamos dos números cuya diferencia (signos distintos en los binomios) sea 5 y cuyo producto sea 30. Estos números son 10 y 5. Tendremos:

$$x^4 - 5x^2 - 50 = \quad (x^2 - 10)(x^2 + 5)$$

2. Factorizar $x^6 + 7x^3 - 44$

El primer término de cada binomio será la raíz cuadrada de x^6 o sea x^3.

$$x^6 + 7x^3 - 44 = \quad (x^3 + 11)(x^3 - 4)$$

3. Factorizar $a^2b^2 - ab - 42$

El primer término de cada factor será la raíz cuadrada de a^2b^2 o sea ab:

$$a^2b^2 - ab - 42 \quad (ab - \ )(ab + \ )$$

Buscamos dos números cuya diferencia sea 1 (que es el coeficiente de ab) y cuyo producto sea 42. Esos números son 7 y 6. Tendremos:

$$a^2b^2 - ab - 42 = \quad (ab - 7)(ab + 6)$$

4. Factorizar $(5x)^2 - 9(5x) + 8$

Llamamos la atención sobre este ejemplo porque usaremos esta descomposición en el caso siguiente. El primer término de cada binomio será la raíz cuadrada de $(5x)^2$ o sea 5x:

$$(5x)^2 - 9(5x) + 8 \quad (5x - \ )(5x - \ )$$

Dos números cuya suma (signos iguales en los binomios) es 9 y cuyo producto es 8 son 8 y 1. Tendremos:

$$(5x)^2 - 9(5x) + 8 = \quad (5x - 8)(5x - 1)$$

5. Factorizar $x^2 - 5ax - 32a^2$

$$x^2 - 5ax - 32a^2 \quad (x - \quad)(x + \quad)$$

El coeficiente de x en el segundo término es 5ª. Buscamos dos cantidades cuya diferencia sea 5a (que es el coeficiente de x en el segundo término) y cuyo producto sea $36a^2$. Estas cantidades son 9a y 4a. Tendremos:

$$x^2 - 5ax - 32a^2 = \quad (x - 9a)(x + 4a)$$

6. Factorizar $(a+b)^2 - 12(a+b) + 20$

El primer término de cada binomio será la raíz cuadrada de $(a+b)^2$ que es $(a+b)$.

$$(a+b)^2 - 12(a+b) + 20 \quad ((a+b) - \quad)\big((a+b) - \quad\big)$$

Buscamos dos números cuya suma sea 12 y cuyo producto sea 20. Esos números son 10 y 2. Tendremos:

$$(a+b)^2 - 12(a+b) + 20 = \quad \big((a+b) - 10\big)\big((a+b) - 2\big)$$

7. Factorizar $28 + 3x - x^2$.

Ordenando en orden descendente respecto de x, tenemos:

$$-x^2 + 3x + 28.$$

Para eliminar el signo – de $-x^2$ introducimos el trinomio en un paréntesis precedido del signo -:

$$-(x^2 - 3x - 28)$$

Factorizando $x^2 - 3x - 28 = (x+7)(x+4)$, pero como el trinomio está precedido de – su descomposición también debe ir precedido de – y tenemos:

$$-(x+7)(x+4)$$

Para que desaparezca el signo – del producto $-(x-7)(x+4)$ o sea, para convertirla en + basta cambiarle el signo a un factor, por ejemplo, a $(x-7)$ y quedará:

$$28 + 3x - x^2 = (7 - x)(x + 4)$$

Tarea

1. $(5x)^2 + 13(5x) + 42$
2. $x^4 + 7ax^2 - 60a^2$
3. $a^4b^4 - 2a^2b^2 - 99$
4. $(c + d)^2 - 18(c + d) + 65$
5. $a^4 - a^2b^2 - 156b^4$

Solucionario de la Tarea

1. $(5x)^2 + 13(5x) + 42 = (5x + 7)(5x + 6)$
2. $x^4 + 7ax^2 - 60a^2 = (x^2 + 12a)(x^2 - 5a)$
3. $a^4b^4 - 2a^2b^2 - 99$

$$\begin{array}{r|l}
99 & 3 \\
33 & 3 \\
11 & 11 \\
1 &
\end{array}$$

$3 \cdot 3 = 9$

$1 \cdot 11 = 11$

$\Rightarrow 11 - 9 = 2$

$= (a^2b^2 - 11)(a^2b^2 + 9)$

4. $(c + d)^2 - 18(c + d) + 65 = (c + d + 13)(c + d - 5)$
5. $a^4 - a^2b^2 - 156b^4$

$$\begin{array}{r|l}
156 & 2 \\
78 & 2 \\
39 & 3 \\
13 & 13 \\
1 &
\end{array}$$

$2^2 \cdot 3 = 12$

$1 \cdot 13 = 13$

$\Rightarrow 13 - 12 = 1$

$= (a^2 - 13b^2)(a^2 + 12b^2)$

• Diferencia de Cuadrados Perfectos

En los productos notables se vio que la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia es igual al cuadrado del minuendo menos el cuadrado del sustraendo, o sea, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$; luego recíprocamente.

Podemos pues enunciar lo siguiente:

Regla para factorizar una diferencia de cuadrados

Se extrae la raíz cuadrada al minuendo y al sustraendo y se multiplica la suma de estas raíces cuadradas por la diferencia entre la raíz del minuendo y la del sustraendo.

(1) Factorar $1-a^2$.

La raíz cuadrada de 1 es 1; la raíz cuadrada de a^2 es a. Multiplica la suma de estas raíces $(1+a)$ por la diferencia de $(1-a)$ y tendremos:

$$1-a^2=(1+a)(1-a)$$

(2) Descomponer $16x^2-25y^4$.

La raíz cuadrada de $16x^2$es $4x$; la raíz cuadrada de $25y^4$ es $5y^2$.

Multiplico la suma de estas raíces $(4x+5y^2)$ por su diferencia $(4x-5y^2)$ y tendremos:

$$16x^2-25y^4=(4x+5y^3)(4x-5y^2)$$

(3) Factorar $49x^3y^8z^{10}-a^{12}$.

$$49x^3y^8z^{10}-a^{12}=(7xy^3z^5+a^6)(7xy^3z^5-a^6)$$

(4) *Descomponer* $\frac{a^2}{4}-\frac{b^4}{9}$

$$\frac{a^2}{4}-\frac{b^4}{9}=(\frac{a}{2}+\frac{b^2}{3})(\frac{a}{2}-\frac{b^2}{3})$$

(5) Factorar $a^{2n}-9b^{4m}$

$$a^{2n}-9b^{4m}=(a^n+3b^{2m})(a^n-3b^{2m})$$

Taller en clase

Factorar o descomponer en dos factores

1. $25x^2y^4 - 121 = (5xy^2 + 11)(5xy^2 - 11)$
2. $\frac{1}{4} - 9a^2 = (\frac{1}{2} + 3a)(\frac{1}{2} - 3a)$
3. $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2z^4}{81} = (\frac{x}{10} + \frac{yz^2}{9})(\frac{x}{10} - \frac{yz^2}{9})$
4. $a^{4n} - 225b^4 = (a^{2n} + 15b^2)(a^{2n} - 15b^2)$
5. $49a^{10m} - \frac{b^{12x}}{81} = (4x^{3m} + \frac{y^n}{7})(4x^{3m} - \frac{y^n}{7})$

Otros Ejemplos

1. Factorar $(a+b)^2 - c^2$.

La regla empleada en los ejemplos anteriores es aplicable a las diferencias de cuadrados en que uno o ambos cuadrados son expresiones compuestas. Así, en este caso, tenemos:

La raíz cuadrada de $(a+b)^2$ es $(a+b)$
La raíz cuadrada de c^2 es c.

Multiplico la suma de estas raíces $(a+b)+c$ por la diferencia $(a+b)-c$ y tengo:

$$(a+b)^2 - c^2 = [(a+b)+c][(a+b)-c]$$
$$= (a+b+c)(a+b-c)$$

2. Descomponer $4x^2 - (x+y)^2$.

La raíz cuadrada de $4x^2$ es $2x$.
La raíz cuadrada de $(x+y)^2$ es $(x+y)$.

Multiplico la suma de estás raíces $2x + (x+y)$ por la diferencia $2x - (x+y)$ y tenemos:

$$4x^2 - (x+y)^2 = [2x + (x+y)][2x - (x+y)]$$
$$= (2x + x + y)(2x - x - y)$$
$$= (3x + y)(x - y)$$

3. Factorar $(a+x)^2-(x+2)^2$.

La raíz cuadrada $(a+x)^2$ de $(a+x)$ es.

La raíz cuadrada de $(x+2)^2$ es $(x+2)$.

Multiplico la suma de estas raíces $(a+x)+(x+2)$ por la diferencia $(a+x)-(x+2)$ y tengo:

$$
\begin{aligned}
(a+x)^2-(x+2)^2 &= [(a+x)+(x+2)][(a+x)-(x+2)] \\
&= (a+x+x+2)(a+x-x-2) \\
&= (a+2x+2)(a-2)
\end{aligned}
$$

Taller en clase

1. $(a-b)^2-(c-d)^2=(a-b+c-d)(a-b-c+d)$

2. $(a-1+m-2)(a-1-m+2)=(a+m-3)(a-m+1)$

3. $m^6-(m^2-1)^2=(m^3+m^2-1)(m^3+m^2-1)(m^3-m^2+1)$

4. $(2a+b-c)^2-(a+b)^2$

$=(2a+b-c+a+b)(2a+b-c-a-b)$

$=(3a+2b-c)(a-c)$

5. $25(x-y)^2-4(x+y)^2$

$=(5x-5y+2x+2y)(5x-5y-2x-2y)$

$=(7x-3y)(3x-7y)$

Tarea

1. $1 - 4m^2 =$
2. $4x^2 - 81y^4 =$
3. $256a^{12} - 289b^4m^{10} =$
4. $\frac{1}{16} - \frac{4x^2}{49} =$
5. $a^{2n} - b^{2n} =$
6. $\frac{1}{100} - x^{2n}$

Solucionario de la Tarea

1. $1-4m^2=(1)^2-(2m)^2=(1-2m)(1+2m)$
2. $4x^2-81y^4=(2x)^2-(9y^2)^2=(2x-9y^2)(2x+9y^2)$
3. $256a^{12}-289b^4m^{10}=(16a^2)^2-(17b^2m^5)^2$

   $=(16a^2-17b^2m^5)(16a^2+17b^2m^5)$
4. $\frac{1}{16}-\frac{4x^2}{49}=\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{2x}{7}\right)^2=(\frac{1}{4}-\frac{2x}{7})(\frac{1}{4}+\frac{2x}{7})$

- **Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$**

Que se diferencian de los trinomios estudiados en el caso anterior en que en el primer término tiene un coeficiente distinto de 1.

Descomposición en factores de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

1. Factorizar $6x^2 - 7x - 3$

Multipliquemos el trinomio por el coeficiente de x^2 que es 6 y dejando indicado el producto de 6 por 7x se tiene:

$$36x^2 - 6(7x) - 18$$

Pero $36x^2 = (6x)^2$ y $6(7x) = 7(6x)$ luego podemos escribir $(6x)^2 - 7(6x) - 18.$

Descomponiendo este trinomio según se vio en el caso anterior, el 1er. Término de cada factor será la raíz cuadrada de $(6x)^2$ o sea $6x$: $(6x - \;)(6x + \;)$. Dos números cuya diferencia sea 7 y cuyo producto sea 18 son 9 y 2. Tendremos: $(6x - 9)(6x + 2)$. Como el principio multiplicamos el trinomio dado por 6, ahora tenemos que dividir por 6, para no alterar el término, y tendremos:

$$\frac{(6x-9)(6x+12)}{6}$$

Pero como ninguno de los binomios es divisible por 6, descomponemos 6 en 2×3 y dividiendo $(6x - 9)$ entre 3 y $(6x - 2)$ entre 2 se tendrá:

$$\frac{(6x-9)(6x+2)}{2 \times 3} = (2x - 3)(3x + 1)$$

Luego: $6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1)$

2. Factorar $20x^2+7x-6$

Multiplicando el trinomio por 20, tendremos: $(20x)^2+7(20x)-120$. Descomponiendo este trinomio tendremos: $(20x+15)(20x-8)$. Para cancelar se multiplicarán por 20, tenemos que dividir por 20, pero como ninguno de los dos binomios es divisible por 20, descomponemos 20 en 5× 4 y dividiendo el factor (20x+15) entre 5 y (20x-8) entre 4 tendremos:

$$\frac{(20x+15)(20x-8)}{5\times 4}=(4x+3)(5x-2)$$

$$20x^2+7x-6=(4x+3)(5x-2)$$

3. Factorar $18a^2-13a-5$

Multiplicando por 18: $(18a^2)-13(18a)-90$

Factorando este trinomio: $(18a-18)(18a+5)$.

Dividiendo por 18, para lo cual, como el primer binomio $18a-18$ es divisible por 18 basta dividir este factor entre 18, tendremos:

$$\frac{(18a-18)(18a+5)}{18}=(a-1)(18a+5)$$

$$18a^2-13a-5=(a-1)(18a+5)$$

Tarea

1. $6x^2 - 6 - 5x$
2. $20y^2 + 2 - 1$
3. $2a^2 + 5a + 2$
4. $m - 6 + 15m^2$
5. $2x^2 + 29x + 90$

Solucionario de la tarea

1. $6x^2 - 6 - 5x$

$$= 36x^2 - 5(6x) - 36$$
$$= \frac{(6x-9)(6x+4)}{3 \cdot 2}$$
$$= (2x-3)(3x+2)$$

2. $20y^2 + y - 1$

$$400y^2 + 1(20y) - 20$$
$$= \frac{(20y+5)(20y-4)}{5 \cdot 4}$$
$$= (4y+1)(5y-1)$$

3. $2a^2 + 5a + 2$

$$4a^2 + 5(2a) + 4$$
$$= \frac{(2a+4)(2a+1)}{2}$$
$$= (a+2)(2a+1)$$

4. $m - 6 + 15m^2$

$$225m^2 + 15m - 90$$
$$= \frac{(15m+10)(15m-9)}{5 \cdot 3}$$
$$= (3m+2)(5m-3)$$

5. $2x^2 + 29x + 90$

$$4x^2 + 29(2x) + 180$$

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$2^2 \cdot 5 = 20$$
$$3^2 = 9$$
$$\Rightarrow 20 + 9 = 29$$
$$= \frac{(2x+20)(2x+9)}{2}$$
$$= (2x+10)(2x+9)$$

Otros Ejemplos

1. $15x^2 - ax - 2a^2$
   $= (15x^2)^2 - a(15x) - 30a^2$
   $= \dfrac{(15x - 6a)(15x + 5a)}{3 \cdot 5}$
   $= (5x - 2a)(3x + a)$
2. $30a^2 - 13ab - 3b^2$
   $= 900a^2 - a(15x) - 90b^2$
   $= \dfrac{(30a - 18b)(30a + 5b)}{6 \cdot 5}$
   $= (5a - 3b)(6a + b)$

3. $7x^6 - 33x^3 - 10$
   $= (7x^3)^2 - 33(7x^3) - 70$
   $= \dfrac{(7x^3 - 35)(7x^3 + 2)}{7}$
   $= (x^3 - 5)(7x^3 + 2)$

4. $-25^8 + 5x^4 + 6$
   $= -(25^8 - 5x^4 - 6)$

   $= (25x^4)^2 - 5(25x^4) - 6$
   $= \dfrac{(15x - 6a)(15x + 5a)}{3 \cdot 5}$
   $= (5x - 2a)(3x + a)$

5. $30x^{10} - 91x^5 - 30$
   $= (30x^5)^2 - 91(30x^5) - 900$
   $= \dfrac{(30x^5 - 100)(30x^5 + 9)}{10 \cdot 3}$
   $= (3x^5 - 10)(10x^5 + 3)$

- **Cubo Perfecto de un Binomio**

En los productos notables se vio que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Lo anterior nos dice que para que una expresión algebraica ordenada con respecto a una letra sea el cubo de un binomio, tiene que cumplir las siguientes condiciones:

1. Tener cuatro términos.
2. Que el primero y el último término sean cubos perfectos.
3. Que el 2° término sea más o menos el triple del cuadrado de la raíz cúbica del primer término multiplicado por la raíz cúbica del último término.
4. Que el 3° término sea más el triple de la raíz cúbica del primer término por el cuadrado de la raíz cúbica del último.

Si todos los términos de la expresión son positivos, la expresión dada es el cubo de la suma de las raíces cúbicas de su primer y último término. Si los términos son alternativamente positivos y negativo, la expresión dada es el cubo de la diferencia de dichas raíces.

Raíz Cúbica de un monomio

La raíz cúbica de un monomio se obtiene extrayendo la raíz cúbica de su coeficiente y dividiendo el exponente de cada letra entre 3.

Así, la raíz cúbica de $8a^3b^6$es $2ab^2$. En efecto:

$$(2ab^2)^{\,3} = 2ab^2 \times 2ab^2 \times 2ab^2 = 8a^3b^6$$

Determinar si el polinomio es un Cubo Perfecto

Ejemplos:

1. Hallar si $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ es el cubo de un binomio.
   Veamos si cumplo las condiciones expuestas antes:
      La expresión tiene cuatro términos.
      La raíz cúbica de $8x^3$ es $2x$.
      La raíz cúbica de 1 es 1.
      $3(2x)^2(1) = 12x^2$, segundo término.
      $3(2x)(1)^2 = 6x$, tercer término.

Cumple las condiciones, y como todos sus términos son positivos, la expresión dada es el cubo de $(2x+1)$, o de otro modo $(2x+1)^3$

2. Hallar si $8x^4 + 54x^2y^4 - 27y^9 - 36x^4y^3$ es el cubo de un binomio.

Ordenando la expresión, se tiene: $8x^4 - 36x^4y^3 + 54x^2y^4 - 27y^8$.

La expresión tiene cuatro términos: $\begin{cases} \text{La raíz cúbica de } 8x^4 \text{ es } 2x^2. \\ \text{La raíz cúbica de } 27y^9 \text{ es } 3y^3. \\ 3(2x^2)^2(3y^3) = 36x^4y^3\text{, segundo término.} \\ 3(2x^2)\,(3y^3) = 54x^2y^4\text{, tercer término.} \end{cases}$

Y como los términos son alternativamente positivos y negativos, la expresión dada es el cubo de $(2x^2 - 3y^3)$.

Factorar expresiones que son el Cubo de un Binomio

Ejemplos:

1. Factorizar $1 + 12a + 48a^2 + 64a^3$.

Aplicando el procedimiento anterior vemos que esta expresión es el cubo de $(1 + 4a)$, luego:

$$1 + 12a + 48a^2 + 64a^3 = (1 + 4a)^3$$

2. Factorizar $a^9 - 18a^6b^5 + 108a^3b^{10} - 216b^{15}$.

Aplicando el procedimiento anterior vemos que esta expresión es el cubo de $(a^3 - 6b^5)$, luego:

$$a^9 - 18a^6b^5 + 108a^3b^{10} - 216b^{15} = (a^3 - 6b^5)^3$$

Taller en Clase

Factorizar por el método anterior, si es posible, las expresiones siguientes

1. $8 + 12a^2 + 6a^4 + a^6 = (2 + a^2)^3$

$$a^6 + 6a^4 + 12a^2 + 8$$
$$\sqrt[3]{a^6} = a^2, \quad \sqrt[3]{8} = 2$$
$$3(a^2)^2(2) = 6a^4$$
$$3(a^2)(2)^2 = 12a^2$$

2. $125x^3 + 1 + 75x^2 + 15x = (5x + 1)^3$

$$125x^3 + 75x^2 + 15x + 1$$
$$\sqrt[3]{125x^3} = 5x, \qquad \sqrt[3]{1} = 1$$
$$3(5x)^2(1) = 75x^2$$
$$3(5x)(1)^2 = 15x$$

3. $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3 = (2a - 3b)^3$

   $\sqrt[3]{8a^3} = 2a, \qquad \sqrt[3]{27b^3} = 3b$

   $3(2a)^2(3b) = 36a^2b$ (-)

   $3(2a)(3b)^2 = 54ab^2$ (+)

4. $27m^3 + 108m^2n + 144mn^2 + 64n^3 = (3m + 4n)^3$

   $\sqrt[3]{27m^3} = 3m, \qquad \sqrt[3]{64n^3} = 4n$

   $3(3m)^2(4n) = 108m^2n$

   $3(3m)(4n)^2 = 144mn^2$

5. $125a^3 + 150a^2b + 60ab^2 + 8b^3 = (5a + 2b)^3$

   $\sqrt[3]{125a^3} = 5a), \qquad \sqrt[3]{8b^3} = 2b$

   $3(5a)^2(2b) = 150a^2b$

   $3(5a)(2b)^2 = 60ab^2$

6. $8 + 36x + 54x^2 + 27x^3 = (2 + 3x)^3$

   $\sqrt[3]{8} = 2, \qquad \sqrt[3]{27x^3} = 3x$

   $3(2)^2(3x) = 36x$

   $3(2)(3x)^2 = 54x^2$

Tarea

1. $a^6 + 3a^4b^3 + 3a^2b^6 + b^9$
2. $x^9 - 9x^6y^4 + 27x^3y^8 - 27y^{12}$
3. $64x^3 + 240x^2y + 300xy^2 + 125y^3$
4. $216 - 756a^2 + 882a^4 - 343a^6$
5. $125x^{12} + 600x^8y^5 + 960x^4y^{10} + 512y^{15}$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Solucionario de la Tarea

1. $(a^6 + 3a^4b^3 + 3a^2b^6 + b^9)$

   $(\sqrt[3]{a^6} = a^2)$, $(\sqrt[3]{b^9} = b^3)$.

   $(3 \cdot (a^2)^2 \cdot b^3 = 3a^4b^3)$.

   $(3 \cdot a^2 \cdot (b^3)^2 = 3a^2b^6)$.

   $(a^2 + b^3)^3$

2. $x^9 - 9x^6y^4 + 27x^3y^8 - 27y^{12}$

   $\sqrt[3]{x^9} = x^3$, $\sqrt[3]{27y^{12}} = 3y^4$

   $3(x^3)^2(3y^4) = 9x^6y^4$

   $3(x^3)(3y^4)^2 = 27x^3y^8$

   $(x^3 - 3y^4)^3$

3. $64x^3 + 240x^2y + 300xy^2 + 125y^3$

   $\sqrt[3]{64x^3} = 4x$, $\sqrt[3]{125y^3} = 5y$

   $3(4x)^2(5y) = 240x^2y$

   $3(4x)(5y)^2 = 300xy^2$

   $(4x + 5y)^3$

4. $216 - 756a^2 + 882a^4 - 343a^6$

   $\sqrt[3]{216} = 6$, $\sqrt[3]{343a^6} = 7a^2$

   $3(6)^2(7a^2) = 756a^2$

   $3(6)(7a^2)^2 = 882a^4$

   $(6 - 7a^2)^3$

5. $125x^{12} + 600x^9y^5 + 960x^4y^{10} + 512y^{15}$

   $\sqrt[3]{125x^{12}} = 5x^4)$, $\sqrt[3]{512y^{15}} = 8y^5$

   $3(5x^4)^2(8y^5) = 600x^9y^5$

   $3(5x^4)(8y^5)^2 = 960x^4y^{10}$

   $(5x^4 + 8y^5)^3$

9.Ecuaciones de Primer Grado

Igualdad es la expresión de que dos cantidades o expresiones algebraicas tienen el mismo valor.
Ejemplos:

$$a = b + c \qquad\qquad 3x^2 = 4x + 15$$

Ecuación es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas **incógnitas** y que sólo se verifica o es verdadera para determinados valores de las incógnitas.

Las incógnitas se representan por las ultimas letras del alfabeto: $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$

Así: $5x + 2 = 17$

Es una ecuación, porque es una igualdad en la que hay una incógnita, la x, y está igualdad sólo se verifica, o sea que sólo es verdadera, para el valor $x = 3$ En efecto, si sustituimos la x por 3 tenemos: $5(3) + 2 = 17$ o sea; $17 = 17$

Sí damos a x un valor distinto de 3, la igualdad no se verifica o no es verdadera.

Identidad es una igualdad que se verifica para cualesquiera valores de las letras que entran en ella.

Así $$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$

$$a^2 - m^2 = (a + m)(a - m)$$

Así la identidad de $(x + y)^2$ con $x^2 + 2xy + y^2$ se escribe $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Miembros; se llama primer miembro de una ecuación o de una identidad a la expresión que ésta a la izquierda del signo de igualdad o identidad, y segundo miembro, a la expresión que ésta a la derecha.

Así en la ecuación $3x - 5 = 2x - 3$

El primer miembro es $3x - 5$

El segundo miembro $2x - 3$

Clases de ecuaciones

- **Ecuación Numérica** es una ecuación que no tiene más letras que las incógnitas, como donde la única letra es la incógnita x. $4x - 5 = x + 4$
- **Ecuación Literal** es una ecuación que además de incógnitas tiene otras letras, que representan cantidades conocidas como: $3x + 2a = 5b - bx$
- **Ecuación Entera** cuando ninguno de sus términos tiene denominador como en los ejemplos anteriores y es fraccionaria cuando algunos o todos sus términos tienen denominador, como

$$\frac{3x}{2} + \frac{6x}{5} = 5 + \frac{x}{5}$$

Grado de una ecuación con una sola incógnita es el mayor exponente que tiene la incógnita en la ecuación.

Así $$4x - 6 = 3x - 1 \;;\; ax + b = b^2x + c$$

Son ecuaciones de primer grado porque el mayor exponente de x es 1.

La ecuación $$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Es una ecuación de segundo grado porque el mayor exponente de x es 2.

Raíces o soluciones de una ecuación son los valores de las incógnitas que verifican o satisfacen la ecuación, es decir, que, sustituidos en lugar de las incógnitas, convierten la ecuación en identidad.

Así, en la ecuación $5x - 6 = 3x + 8$

La raíz es 7 porque haciendo $x = 7$ se tiene

$$5(7) - 6 = 3(7) + 8, \text{ o sea } 29 = 29$$

Donde vemos que 7 satisface la ecuación.

Axioma Fundamental de las ecuaciones

Si con cantidades iguales se verifican operaciones iguales los resultados serán iguales.

1. Si a los dos miembros de una ecuación se suma una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste (permanece).
2. Si a los dos miembros de una ecuación se resta una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste (permanece).
3. Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste (permanece).
4. Si los dos miembros de una ecuación se dividen por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste (permanece).
5. Si los dos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia o si a los dos miembros se extrae una misma raíz, la igualdad subsiste (permanece).

La transposición de términos consiste en cambiar los términos de una ecuación de un miembro al otro.

Regla
Cualquier término de una ecuación se puede pasar de un miembro a otro cambiándole el signo.

1. Sea la ecuación $\boldsymbol{5x = 2a - b}$

Sumando b a los dos miembros de esta ecuación, la igualdad subsiste (permanece).

(Regla 1), tendremos:

$$5x + b = 2a - b + b$$

Y como $-b + b = 0$, queda

$$5x + b = 2a$$

Donde vemos que $-b$, que estaba en el segundo miembro de la ecuación dada, ha pasado al primer miembro consigo +.

2. Sea la ecuación $\boldsymbol{3x + b - b = 2a - b}$

Restando b a los dos miembros de esta ecuación, la igualdad subsiste (permanece).

(Regla 2), y tendremos:

$$3x + b - b = 2a - b$$

Y como $b - b = 0$, queda

$$3x = 2a - b$$

Donde vemos que $+b$,que estaba en el primer miembro de la ecuación dada, ha pasado al segundo miembro con signo $-$.

Términos iguales con signos iguales en distintos miembros de una ecuación, pueden suprimirse.

Así, en la ecuación

$$x + b = 2a + b$$

Tenemos el término b con signo + en los dos miembros. Este término puede suprimirse, quedando

$$x = 2a$$

Porque equivale a restar b a los dos miembros.

En la ecuación

$$5x - x^2 = 4x - x^2 + 5$$

Tenemos el término x^2 con signo $-x^2$ en los dos miembros.

Podemos suprimirlo y queda

$$5x = 4x + 5$$

Cambios de signos los signos de todos los términos de una ecuación se pueden cambiar sin que la ecuación varíe, porque equivale a multiplicar los dos miembros de la ecuación por -1, con lo cual la igualdad no varía. (Regla 3).

Así en la ecuación

$$-2x - 3 = x - 15$$

Multiplicamos ambos miembros por -1, para lo cual hay que multiplicar por -1 todos los términos de cada miembro, tenemos:

$$2x + 3 = -x + 15$$

Resoluciones de ecuaciones enteras

Regla General

1. Se efectúan las operaciones indicadas, si las hay.
2. Se hace la transposición de términos, reuniendo en un miembro todos los términos que contengan la incógnita y en el otro miembro todas las cantidades conocidas.
3. Se reducen términos semejantes en cada miembro.
4. Se despeja la incógnita dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita.

Ejemplos:

1. Resolver la ecuación $\mathbf{3x - 5 = x + 3}$

Pasando x al primer miembro y-5 al segundo, cambiándoles los signos, tenemos,$3x - x = 3 + 5$

Reduciendo términos semejantes: $2x = 8$

Despejando x para lo cual dividimos los dos miembros de la ecuación por 2, tenemos:

$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$ y simplificando $x = 4$

La **verificación** es la prueba de que el valor obtenido para la incógnita es correcto.

La verificación se realiza sustituyendo en los dos miembros de la ecuación dada la incógnita por el valor obtenido, y si éste es correcto, la ecuación dada se convertirá es identidad.

2. Resolver la ecuación: $\mathbf{35 - 22x + 6 - 18x = 14 - 30x + 32}$

Pasando $-30x$ al primer miembro y 35 y 6 al segundo:

$$-22x - 18x + 30x = 14 + 32 - 35 - 6$$

Reduciendo: $-10x = 5$

Dividiendo por -5 $2x = -1$

Despejamos x para lo cual dividimos ambos miembros por 2. $x = -\frac{1}{2}$

Verificación

Haciendo $x = -\frac{1}{2}$ en la ecuación dada, se tiene:

$$35 - 22\left(-\frac{1}{2}\right) + 6 - 18\left(-\frac{1}{2}\right) = 14 - 30\left(-\frac{1}{2}\right) + 32$$

$$35 + 11 + 6 + 9 = 14 + 15 + 32$$

$$61 = 61$$

Taller en Clase

Resolver las ecuaciones:

1. $\mathbf{11x + 5x - 1 = 65x - 36}$
2. $\mathbf{8x - 4 + 3x = 7x + x + 14}$
3. $\mathbf{5y + 6y - 81 = 7y + 102 + 65y}$
4. $\mathbf{16 + 7x - 5 + x = 11x - 3 - x}$
5. $\mathbf{3x + 101 - 4x - 33 = 108 - 16x - 100}$

Solución del taller en clase

1. $\mathbf{11x + 5x - 1 = 65x - 36}$

$$16x = 65x - 36 + 1$$
$$16x - 65x = -35$$
$$-49x = -35$$
$$x = \frac{-35}{-49}$$
$$x = \frac{5}{7}$$

2. $\boldsymbol{8x - 4 + 3x = 7x + x + 14}$

$$11x - 4 = 8x + 14$$
$$11x - 8x = 14 + 4$$
$$3x = 18$$
$$x = \frac{18}{3}$$
$$x = 6$$

3. $\boldsymbol{5y + 6y - 81 = 7y + 102 + 65y}$

$$11y - 81 = 72y + 102$$
$$11y - 72y = 102 + 81$$
$$-61y = 183$$
$$y = \frac{183}{-61}$$
$$x = -3$$

4. $\boldsymbol{16 + 7x - 5 + x = 11x - 3 - x}$

$$8x + 11 = 10x - 3$$
$$8x - 10x = -3 - 11$$
$$-2x = -14$$
$$x = \frac{-14}{-2}$$
$$x = 7$$

5. $\boldsymbol{3x + 101 - 4x - 33 = 108 - 16x - 100}$

$$-x + 68 = 8 - 16x$$
$$-x + 16x = 8 - 68$$
$$15x = -60$$
$$x = \frac{-60}{15}$$
$$x = -4$$

Resolución de ecuaciones de primer grado con signos de agrupaciones

1. Resolver $\mathbf{3x-(2x-1)=7x-(3-5x)+(-x+24)}$

Suprimiendo los signos de agrupación

$$3x-2x+1=7x-3+5x-x+24$$

Transponiendo: $3x-2x-7x-5x+x=-3+24-1$

Reduciendo: $-10x=20$

$$x=\frac{20}{10}=-2$$

2. Resolver $\mathbf{5x\{-2x+(-x+6)\}=18-\{-(7x+6)-(3x-24)\}}$

Suprimiendo los paréntesis interiores:

$$5x+(-2x-x+6)=18-(-7x-6-3x+24)$$

Suprimiendo las llaves:

$$5x-2x-x+6=18+7x+6+3x-24$$
$$5x-2x-x-7x-3x=18+6-24-6$$
$$-8x=-6$$

Multiplicando por -1: $8x=6$

Dividiendo por 2: $4x=3$

$$x=\frac{3}{4}$$

Taller en Clase

1. $\mathbf{x-(2x+1)=8-(3x+3)}$
2. $\mathbf{(5-3x)-4x+6=(8x+11)-(3x-6)}$
3. $\mathbf{15x+(-6x+5)-2-(x+3)=-(7x+23)-x+(3-2x)}$
4. $\mathbf{16x-[3x-(6-9x)]=30x+[-(3x+2)-(x+3)]}$
5. $\mathbf{9x-(5x+1)-\{2+8x-(7x-5)\}+9x=0}$

1. $\mathbf{x-(2x+1)=8-(3x+3)}$

$$x-2x-1=8-3x-3$$
$$-x-1=5-3x$$
$$2x=6$$
$$x=\frac{6}{2}$$
$$x=3$$

2. $\mathbf{(5-3x)-4x+6=(8x+11)-(3x-6)}$

$$5-3x-6=8x+11-3x+6$$
$$x-1=5x+17$$
$$x-5x=17+1$$
$$-4x=18$$
$$x=\frac{18}{-4}$$
$$x=-\frac{9}{2}$$

3. $\mathbf{15x+(-6x+5)-2-(x+3)=-(7x+23)-x+(3-2x)}$

$$15x-6x+5-2+x-3=-7x-23-x+3-2x$$
$$10x=-10x-20$$
$$10x+10x=-20$$
$$x=\frac{-20}{20}$$
$$x=-1$$

4. $\mathbf{16x-[3x-(6-9x)]=30x+[-(3x+2)-(x+3)]}$

$$16x-[3x-6+9x]=30x+[-3x-2-x-3]$$
$$16x-[12x-6]=30x+[-4x-5]$$
$$16x-12x+6=30x-4x-5$$
$$4x+6=26x-5$$
$$4x-26x=-5-6$$
$$-22x=-11$$
$$x=\frac{-11}{-22}=\frac{1}{2}$$

5. $\mathbf{9x-(5x+1)-\{2+8x-(7x-5)\}+9x=0}$

$$9x-5x-1-\{2+8x-7x+5\}+9x=0$$
$$4x-1-\{x+7\}+9x=0$$
$$4x-1-x-7+9x=0$$
$$12x-8=0$$
$$12x=8$$
$$x=\frac{8}{12}$$
$$x=\frac{2}{3}$$

Resolución de ecuaciones de primer grado con productos

1. Resolver la ecuación

$$\mathbf{10(x-9)-9(5-6x)=2(4x-1)+5(1+2x)}$$

$$10x-90-45+54x=8x-2+5+10x$$

$$-90-45+54x=8x-2+5$$

Suprimiendo $10x$ en ambos miembros por ser cantidades iguales en distintos miembros, queda:

$$54x-8x=-2+5+90+45$$

$$46x=138$$

$$x=\frac{138}{46}$$

$$x=3$$

Verificación

Haciendo $x=3$ en la ecuación dada, se tiene:

$$10(3-9)-9(5-18)=2(12-1)+5(1+6)$$

$$10(-6)-9(-13)=2(11)+5(7)$$

$$-60+117=22+35$$

$$57=57$$

$x=3$ satisface la ecuación.

2. Resolver $\mathbf{4x-(2x+3)(3x-5)=49-(6x-1)(x-2)}$

Efectuando los productos indicados $\rightarrow$

$$(2x+3)(3x-5)=6x^2-x-15$$

$$(6x-1)(x-2)=6x^2-13x+2$$

El signo – delante de los productos indicados en cada miembro de la ecuación nos dice que hay que realizar las multiplicaciones y luego cambiar el signo de cada término resultante. Después, los términos se agrupan dentro de un paréntesis precedido por el signo menos, y tendremos que la ecuación dada se convierte en:

$$4x-(6x^2-x-15)=49-(6x^2-13x+2)$$

Suprimiendo los paréntesis $\rightarrow$

$$4x-6x^2+x+15=49-6x^2+13x-2$$

$$4x+x-13x=49-2-15$$

$$-8x=32$$

$$x=-4$$

3. Resolver $(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})-(\mathbf{4}\boldsymbol{x}-\mathbf{1})(\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{5})-\mathbf{6}=\mathbf{8}\boldsymbol{x}-\mathbf{11}(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})(\boldsymbol{x}+\mathbf{7})$

$$x^2-x-2-(12x^2+17x-5)-6=8x-11(x^2+4x-21)$$

$$x^2-x-2-12x^2-17x+5-6=8x-11x^2-44x+231$$

$$-x-2-17x+5-6=8x-44x+231$$

$$-x-17x-8x+44x=231+2-5+6$$

$$18x=234$$

$$x=\frac{234}{18}=13$$

4. Resolver $(\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}-\mathbf{3}(\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{3})^{\mathbf{2}}+\mathbf{42}=\mathbf{2}\boldsymbol{x}(-\boldsymbol{x}-\mathbf{5})-(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}$

Desarrollando los cuadrados de los binomios:

$$9x^2-6x+1-3(4x^2+12x+9)+42=2x(-x-5)-(x^2-2x+1)$$

$$9x^2-6x+1-12x^2-36x-27+42=-2x^2-10x-x^2+2x-1$$

$$-6x-36x+10x-2x=-1-1+27-42$$

$$-34x=-17$$

$$34x=17$$

$$x=\frac{17}{34}=\frac{1}{2}$$

Taller en clase

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $\mathbf{5}(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})+\mathbf{16}(\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{3})=\mathbf{3}(\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{7})-\boldsymbol{x}$
2. $\mathbf{7}(\mathbf{18}-\boldsymbol{x})-\mathbf{6}(\mathbf{3}-\mathbf{5}\boldsymbol{x})=-(\mathbf{7}\boldsymbol{x}+\mathbf{9})-\mathbf{3}(\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{5})-\mathbf{12}$
3. $(\mathbf{4}-\mathbf{5}\boldsymbol{x})(\mathbf{4}\boldsymbol{x}-\mathbf{5})=(\mathbf{10}\boldsymbol{x}-\mathbf{3})(\mathbf{7}-\mathbf{2}\boldsymbol{x})$
4. $(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})(\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{5})=(\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{3})(\boldsymbol{x}-\mathbf{4})+\mathbf{5}$

Solución de Taller en clase

1. $\mathbf{5(x-1)+16(2x+3)=3(2x-7)-x}$

$$5x-5+32x+48=6x-21-x$$

$$37x+43=5x-21$$

$$32x=-64$$

$$x=\frac{-64}{32}=-2$$

2. $\mathbf{7(18-x)-6(3-5x)=-(7x+9)-3(2x+5)-12}$

$$126-7x-18+30x=-7x-9-6x-15-12$$

$$108+23x=-13x-36$$

$$23x+13x=-36-108$$

$$36x=-144$$

$$x=\frac{-144}{36}$$

$$x=-4$$

3. $\mathbf{(4-5x)(4x-5)=(10x-3)(7-2x)}$

$$-20x^2+41x-20=-20x^2+76x-21$$

$$41x-76x=-21+20$$

$$-35x=-1$$

$$x=\frac{8}{13}$$

4. $\mathbf{(x+1)(2x+5)=(2x+3)(x-4)+5}$

$$2x^2+7x+5=2x^2-5x-12+5$$

$$7x+5x=-7-5$$

$$12x=-12$$

$$x=\frac{-12}{12}$$

$$x=-1$$

Tarea

1. $8x + 9 - 12x = 4x - 13 - 5x$
2. $(5 - 3x) - (-4x + 6) = (8x + 11) - (3x - 6)$
3. $3(5x - 6)(3x + 2) - 6(3x + 4)(x - 1) - 3(9x + 1)(x - 2) = 0$
4. $14x - (3x - 2) - [5x + 2 - (x - 1)] = 0$
5. $(x + 1)(x + 2)(x - 3) = (x - 2)(x + 1)(x + 1)$
6. $2(3x + 3) - 4(5x - 3) = x(x - 3) - x(x + 5)$

Solucionario de la Tarea

1. $\mathbf{8x + 9 - 12x = 4x - 13 - 5x}$

$$-4x + 9 = -x - 13$$

$$-4x + x = -13 - 9$$

$$-3x = -22$$

$$x = \frac{-22}{-3}$$

$$x = -4$$

2. $\mathbf{(5 - 3x) - (-4x + 6) = (8x + 11) - (3x - 6)}$

$$5 - 3x + 4x - 6 = 8x + 11 - 3x + 6$$
$$x - 1 = 5x + 17$$
$$-4x = 18$$
$$x = \frac{18}{-4}$$
$$x = -\frac{9}{2}$$

3. $\mathbf{3(5x - 6)(3x + 2) - 6(3x + 4)(x - 1) - 3(9x + 1)(x - 2) = 0}$

$$3(15x^2 - 8x - 12) - 6(3x^2 + x - 4) - 3(9x^2 - 17x - 2) = 0$$

$$45x^2 - 24x - 36 - 18x^2 - 6x + 24 - 27x^2 + 51x + 6 = 0$$

$$21x - 6 = 0$$

$$x = \frac{6}{21}$$

$$x = \frac{2}{7}$$

4. $\mathbf{14x-(3x-2)-[5x+2-(x-1)]=0}$

$$14x-3x+2-[5x+2-x+1]=0$$

$$11x+2-[4x+3]=0$$

$$7x-1=0$$

$$7x=1$$

$$x=\frac{1}{7}$$

5. $\mathbf{(x+1)(x+2)(x-3)=(x-2)(x+1)(x+1)}$

$$(x^2+3x+2)(x-3)=(x^2-x-2)(x+1)$$

$$x^3-3x^2+3x^2-9x+2x-6=x^3+x^2-x^2-x-2x-2$$

$$-7x-6=-3x-2$$

$$-7x+3x=-2+6$$

$$-4x=4$$

$$x=\frac{4}{-4}\ x=-1$$

6. $\mathbf{2(3x+3)-4(5x-3)=x(x-3)-x(x+5)}$

$$6x+6-20x+12=x^2-3x-x^2-5x$$

$$-14x+18=-8x$$

$$-14x+8x=-18$$

$$-6x=-18$$

$$x=\frac{-18}{-6}\ x=3$$

Desarrollar ecuaciones de primer grado con una incógnita

Taller en Clase

1. Hallar cuatro números enteros consecutivos cuya suma sea 74.
2. La suma de las edades de tres personas es 88 años. La mayor tiene 20 años más que la menor y la del medio 18 años menos que la mayor. Hallar las edades respectivas.
3. La edad de María es el triplo de la de Rosa más quince años y ambas edades suman 59 años. Hallar ambas edades.
4. Entre A y B tienen 99 bolívares, La parte de B excede al triplo de la de A en 19. Hallar la parte de cada uno.
5. El exceso de 8 veces un número sobre 60 equivale al exceso de 60 sobre 7 veces el número. Hallar el número.

Solucionario del Taller en Clase

1. Hallar cuatro números enteros consecutivos cuya suma sea 74.

$$x \rightarrow N°1$$
$$x + 1 \rightarrow N°2$$
$$x + 2 \rightarrow N°3$$
$$x + 3 \rightarrow N°4$$

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 74$$
$$4x + 6 = 74$$
$$4x = 74 - 6$$
$$4x = 68$$
$$x = \frac{68}{4}$$
$$x = 17 \rightarrow N°1$$

$$x + 1 \rightarrow 17 + 1$$
$$= 18 \rightarrow N°2$$
$$x + 2 \rightarrow 17 + 2$$
$$= 19 \rightarrow N°3$$
$$x + 3 \rightarrow 17 + 3$$
$$= 20 \rightarrow N°4$$

2. La suma de las edades de tres personas es 88 años. La mayor tiene 20 años más que la menor y la del medio 18 años menos que la mayor. Hallar las edades respectivas.

$$x \rightarrow mayor$$
$$x - 20 \rightarrow menor$$
$$x - 18 \rightarrow medio$$

$$x + x - 20 + x - 18 = 88$$
$$3x - 38 = 88$$
$$3x = 88 + 38$$
$$3x = 126$$
$$x = \frac{126}{3}$$
$$x = 42 \rightarrow mayor$$

$$x - 20 \rightarrow 42 - 20$$
$$= 22 \rightarrow menor$$
$$x - 18 \rightarrow 42 - 18$$
$$= 24 \rightarrow medio$$

3. La edad de María es el triplo de la de Rosa más quince años y ambas edades suman 59 años. Hallar ambas edades.

$$x \rightarrow edad\ Rosa$$
$$3x + 15 \rightarrow edad\ Maria$$
$$x + 3x + 15 = 59$$
$$4x + 15 = 59$$
$$4x = 59 - 15$$
$$4x = 44$$
$$x = \frac{44}{4}$$
$$x = 11 \rightarrow edad\ Rosa$$
$$3x + 15 \rightarrow 3 \cdot 11 + 15$$
$$= 33 + 15$$
$$= 48 \rightarrow edad\ Maria$$

4. Entre A y B tienen 99 bolívares, La parte de B excede al triplo de la de A en 19. Hallar la parte de cada uno.

$$A + B = 99$$
$$B = 3A + 19$$

$$A + 3A + 19 = 99$$
$$4A + 19 = 99$$
$$4A = 99 - 19$$
$$4A = 80$$
$$A = \frac{80}{4}$$
$$A = 20\ bolívares$$

$$B = 3 \cdot 20 + 19$$
$$B = 60 + 19$$
$$B = 79\ bolívares$$

5. El exceso de 8 veces un número sobre 60 equivale al exceso de 60 sobre 7 veces el número. Hallar el número.

$$x \rightarrow N°\ buscado$$
$$8x - 60 = 60 - 7x$$
$$8x + 7x = 60 + 60$$
$$15x = 120$$
$$x = \frac{120}{15}$$
$$x = 8\ \rightarrow N°\ buscado$$

Tarea

1. Tres cestos contienen 575 manzanas. El primer cesto tiene 10 manzanas más que el segundo y 15 más que el tercero. ¿Cuántas manzanas hay en cada cesto?
2. El mayor de dos números es 6 veces el menor y ambos números suman 147. Hallar los números.
3. La edad de Enrique es la mitad de la de Pedro; la de Juan el triplo de la de Enrique y la de Eugenio el doble de la de Juan. Si las cuatro edades suman 132 años, ¿Qué edad tiene cada uno?
4. Si me pagaran 60 sucres tendría el doble de lo que tengo ahora más 10 sucres. ¿Cuánto tengo?

Solucionario de la Tarea

1. Tres cestos contienen 575 manzanas. El primer cesto tiene 10 manzanas más que el segundo y 15 más que el tercero. ¿Cuántas manzanas hay en cada cesto?

$$x \rightarrow 1° \; cesto$$
$$x - 10 \rightarrow 2° \; cesto$$
$$x - 15 \rightarrow 3° \; cesto$$
$$x + x - 10 + x - 15 = 575$$
$$3x - 25 = 575$$
$$3x = 575 + 25$$
$$3x = 600$$
$$x = \frac{600}{3}$$
$$x = 200 \rightarrow 1° \; cesto$$
$$x - 10 \rightarrow 200 - 10$$
$$= 190 \rightarrow 2° \; cesto$$
$$x - 15 \rightarrow 200 - 15$$
$$= 185 \rightarrow 3° cesto$$

2. El mayor de dos números es 6 veces el menor y ambos números suman 147. Hallar los números.

$$x \rightarrow N° \; mayor$$
$$\frac{x}{6} \rightarrow N° \; menor$$
$$x + \frac{x}{6} = 147$$
$$\frac{6x + x}{6} = 147$$
$$\frac{7x}{6} = 147$$
$$7x = 147 \cdot 6$$
$$7x = 882$$
$$x = \frac{882}{7}$$
$$x = 126 \rightarrow N° \; mayor$$
$$\frac{x}{6} \rightarrow \frac{126}{6}$$
$$= 21 \rightarrow N° \; menor$$

3. La edad de Enrique es la mitad de la de Pedro; la de Juan el triplo de la de Enrique y la de Eugenio el doble de la de Juan. Si las cuatro edades suman 132 años, ¿Qué edad tiene cada uno?

$$x \rightarrow Edad\ Enrique$$
$$2x \rightarrow Edad\ Pedro$$
$$3x \rightarrow Edad\ Juan$$
$$6x \rightarrow Edad\ Eugenio$$

$$x + 2x + 3x + 6x = 132$$
$$12x = 132$$
$$x = \frac{132}{12}$$

$$x = 11 \rightarrow Edad\ Enrique$$
$$2x \rightarrow 2 \cdot 11 = 22 \rightarrow Edad\ Pedro$$
$$3x \rightarrow 3 \cdot 11 = 33 \rightarrow Edad\ Juan$$
$$6x \rightarrow 6 \cdot 11 = 66 \rightarrow Edad\ Eugenio$$

4. Si me pagaran 60 sucres tendría el doble de lo que tengo ahora más 10 sucres. ¿Cuánto tengo?

$$x \rightarrow tengo\ ahora$$
$$2x + 10 = x + 60$$
$$2x - x = 60 - 10$$
$$x = 50\ sucres \rightarrow tengo\ ahora$$

Ecuaciones Fraccionarias de Primer Grado

Una ecuación es fraccionaria cuando algunos de sus términos o todos tienen denominadores, como $\frac{x}{2} = 3x - \frac{3}{4}$.

Supresión de denominadores

Esta es una operación importantísima que consiste en convertir una ecuación fraccionaria en una ecuación equivalente entera, es decir sin denominadores.

La supresión de denominadores se funda en la propiedad, ya conocida, de las igualdades; *Una igualdad no varía si sus dos miembros se multiplican por una misma cantidad.*

Regla

Para suprimir denominadores en una ecuación se multiplican todos los términos de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Ejemplos

(1) Suprimir denominadores de la ecuación $\frac{x}{2} = \frac{x}{6} - \frac{1}{4}$.

El m.c.m. de los denominadores 2, 6 y 4 es 12. Multiplicamos todos los términos por 12 y tendremos: $\frac{12x}{2} = \frac{12x}{6} - \frac{12}{4}$. Y simplificando estas fracciones queda

$$6x = 2x - 3 \ \ (1)$$

ecuación equivalente a la ecuación dada y entera que es lo que buscábamos, porque la resolución de ecuaciones enteras ya la hemos estudiado. Ahora bien, la operación que hemos efectuado, de multiplicar todos los términos de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores equivale a dividir el m.c.m de los denominadores entre cada denominador y multiplicar cada cociente por el numerador respectivo.

En efecto: En la ecuación anterior $\frac{x}{2} = \frac{x}{6} - \frac{1}{4}$ el m.c.m de los denominadores es 12, Dividiendo 12 entre dos 2, 6 y 4 multiplicando cada cociente por su numerador respetivo, tenemos:

$$6x = 2x - 3$$

idéntica a la que obtuvimos antes en (1).

Podemos decir entonces que

Para suprimir denominadores en una ecuación:

1) Se halla el m.c.m de los denominadores.
2) Se divide este m.c.m entre cada denominador y cada cociente se multiplica por el numerador respectivo.

(2) Suprimir denominadores en $2 - \frac{x-1}{40} = \frac{2x-1}{4} - \frac{4x-5}{8}$.

El m.c.m de 4, 8 y 40 es 40. El primer término 2 equivale a $\frac{2}{1}$. Entonces divida $40 \div 1 = 40$ y este cociente 40 lo multiplico por 2; $40 \div 40 = 1$ y este cociente 1 lo multiplico por $x - 1$; $40 \div 4 = 10$ y este cociente 10 lo multiplico por $2x - 1$; $40 \div 8 = 5$ y este cociente 5 lo multiplico por $4x - 5$ y tendremos

$$2(40) - (x - 1) = 10(2x - 1) - 5(4x - 5)$$

Efectuando las multiplicaciones indicadas y quitando paréntesis, queda

$$80 - x + 1 = 20x - 10 - 20x + 25$$

ecuación que ya es entera.

Es de mucha importancia recordar que cuando una fracción cuyo numerador es un polinomio está precedida del signo – como $-\frac{x-1}{40}$ y $-\frac{4x-5}{8}$ en la ecuación anterior, hay que tener cuidado de cambiar el signo a cada uno de los términos de su numerador al quitar el denominador. Por eso hemos puesto $x - 1$ entre paréntesis precedido del signo – o sea $-(x - 1)$ y al quitar este paréntesis queda $-x + 1$ y en cuanto a la última fracción, al efectuar el producto $-5(4x - 5)$ decimos $(-5)(4x) = -20x$ y $(-5) \times (-5) = +25$, quedando $-20x + 25$.

Resolución de ecuaciones fraccionarias con denominadores monomios

Ejemplos

(1) Resolver la ecuación $3x - \frac{2x}{5} = \frac{x}{10} - \frac{7}{4}$.

El m.c.m de 5, 10 y 4 es 20. Dividimos 20 entre 1 (denominador de $3x$), 5, 10 y 4 y multiplicamos cada cociente por el numerador respectivo, tendremos:

$$60x - 8x = 2x - 35$$

Trasponiendo $60x - 8x - 2x = -35$

Reduciendo términos semejantes $50x = -35$

Despejando obtenemos $x = -\frac{35}{50} = -\frac{7}{10}$

Para verificar si la solución es correcta, sustitúyase x por $-\frac{7}{10}$ en la ecuación dada y dará identidad.

(2) Resolver la ecuación $\frac{2x-1}{3}-\frac{x-13}{24}=3x+\frac{5(x+1)}{8}$.

El m.c.m de 3, 24 y 8 es 24. Dividiendo 24 entre 3, 24, 1 y 8 y multiplicando los cocientes por el numerador respectivo, tendremos:

$$8(2x-1)-(x+13)=24(3x)+15(x+1)$$

$$16x-8-x-13=72x+15x+15$$

$$16x-x-72x-15x=8+13+15$$

Reducimos términos semejantes $-72x=36$

Despejando obtenemos $x=-\frac{36}{72}$

Simplificamos y nos resulta $x=-\frac{1}{2}$

(3) Resolver la ecuación $\frac{1}{5}(x-2)-(2x-3)=\frac{2}{3}(4x+1)-\frac{1}{6}(2x+7)$

Efectuando las multiplicaciones indicadas tenemos:

$$\frac{(x-2)}{5}-(2x-3)=\frac{8x+2}{3}-\frac{2x+7}{6}.$$

El m.c.m de 5, 3 y 6 es 30. Quitando denominadores obtenemos

$$6(x-2)-30(2x-3)=10(8x+2)-5(2x+7)$$

$$6x-12-60x+90=80x+20+10x-35$$

$$6x-60x-80x+10x=12-90+20-35$$

$$-124x=-93$$

Multiplicando (-1) $124x=93$

$$x=\frac{93}{124}=\frac{3}{4}$$

Taller en Clase

1. $\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}-\frac{1}{10x}=\frac{1}{5}$

2. $\frac{x-4}{3}-5=0$

3. $10x-\frac{8x-3}{4}=2(x-3)$

4. $x=(5x-1)-\frac{7-5x}{10}=1$

5. $\frac{1}{2}(x-1)-(x-3)=\frac{1}{3}(x+3)+\frac{1}{6}$

Solucionario del Taller en clase

1. $\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}-\frac{1}{10x}=\frac{1}{5}$

Multiplicamos toda la ecuación por el MCM= $20x$

$10+5x-2=4x$

$5x-4x=2-10$

$x=-8$

2. $\frac{x-4}{3}-5=0$

Multiplicamos toda la ecuación por el MCM= 3

$x-4-15=0$

$x-19=0$

$x=19$

3. $10x - \frac{8x-3}{4} = 2(x-3)$

Multiplicamos toda la ecuación por el MCM= 4

$40x - 8x + 3 = 8(x-3)$

$40x - 8x = 8x - 24 - 3$

$40x - 16x = -27$

$x = -\frac{27}{24}; x = -\frac{9}{8}$

4. $x = (5x-1) - \frac{7-5x}{10} = 1$

Multiplicamos toda la ecuación por el MCM= 10

$10x - 10(5x-1) - (7-5x) = 10$

$10x - 50x + 10 - 7 + 5x = 10$

$-35x + 3 = 10$

$-35x = 7$

$x = -\frac{7}{35}; x = -\frac{1}{5}$

5. $\frac{1}{2}(x-1) - (x-3) = \frac{1}{3}(x+3) + \frac{1}{6}$

Multiplicamos toda la ecuación por el MCM= 6

$3(x-1) - 6(x-3) = 2(x+3) + 1$

$3x - 3 - 6x + 18 = 2x + 6 + 1$

$-3x + 15 = 2x + 7$

$$-5x = -8$$

10. Fórmulas

Una **fórmula** es la expresión de una ley o de un principio general por medio de símbolos o letras.

Así como la geometría enseña que el área de un triángulo es igual a la mitad del producto de su base por su altura. Llamando A al área de un Triángulo, b a la base y h a la altura, Este principio general se expresa **exacta** y **brevemente** por su fórmula.

$$A = \frac{b * h}{2}$$

Que nos sirve para hallar el área de cualquier triángulo con solo sustituir b y h por sus valores concretos en el caso dado. Así, si la base de un triángulo es 8 m y su altura es 3 m, su área será:

$$A = \frac{8\,m * 3\,m}{2} = 12\,m^2$$

Uso y ventaja de las Fórmulas Algebraicas

Las fórmulas algebraicas son usadas en las ciencias como geometría, física, mecánica y son de enorme utilidad como apreciará el alumno en el transcurso de sus estudios.

La utilidad y ventaja de las fórmulas Algebraicas es muy grande:

1. Expresan brevemente una ley o principio general.
2. Son fáciles de recordar.
3. Su aplicación es muy fácil, pues para resolver un problema por medio de la fórmula adecuada, basta con sustituir las letras por sus valores en el caso dado.
4. Una fórmula nos dice la relación que existe entre las variables que en ella intervienen, pues según se ha probado en aritmética, la variable cuyo valor se da por medio de una fórmula es proporcional con las variables que se halla en el numerador del segundo término e inversamente proporcional con las que se hallen en el denominador, si las demás permanecen contantes.

Traducción de una formula al lenguaje cotidiano

Para traducir una fórmula lenguaje del cotidiano, o sea, para dar regla contenida en una fórmula, basta sustituir las letras por las magnitudes que ellas representan y expresar las relaciones que la fórmula nos dice existen entre ellas. Pondremos dos ejemplos:

1. Dar la regla contenida en la fórmula $A = h\left(\frac{b+b´}{2}\right)$, en que A representa el área de un trapecio, h su altura, b y b´ sus bases.

La regla es: “El área de un trapecio es igual al producto de su altura por la semisuma de sus bases”

2. Dar la regla contenía en la fórmula $v = \frac{x}{t}$, en la que v representa a la velocidad de un móvil que se mueve con movimiento uniforme y x la distancia recorrida en el tiempo t.

La regla es: La velocidad de un móvil que se mueve con movimiento uniforme es igual a la distancia que ha recorrido dividido entre el tiempo empleado en recorrerlo.

En cuanto a la relación de v con e y t, la fórmula me dicta las dos leyes siguientes:

- La velocidad es directamente proporcional a la distancia (porque x está en el numerador) para un mismo tiempo.
- La velocidad es inversamente proporcional al tiempo (porque t está en el denominador) para un mismo espacio.

Ejemplos

1. $\mathrm{A} = \frac{\mathrm{b}*\mathrm{h}}{2}$ siendo A el área de un triángulo, b su base y h su altura.

El área de un triángulo se obtiene multiplicando la base por la altura y dividiendo el resultado entre dos.

2. $x = vt$, siendo x la distancia recorrida por el móvil con movimiento uniforme, v su velocidad y t su tiempo.

La distancia que recorre un objeto con velocidad constante se calcula multiplicando la velocidad por el tiempo que ha estado en movimiento.

3. $t = \frac{x}{v}$, Las letras tienen el significado del caso anterior.

El tiempo que tarda un objeto en recorrer cierta distancia se calcula dividiendo la distancia recorrida entre la velocidad a la que se mueve.

Taller en clase

1. $T = Fe$, siendo T trabajo, F fuerza y e camino recorrido.

El trabajo realizado es igual a la fuerza aplicada multiplicada por la distancia recorrida.

2. $A = \frac{D*D'}{2}$; siendo A el área de un rombo, D y D´son diagonales.

El área de un rombo se obtiene multiplicando sus dos diagonales y dividiendo entre dos.

3. $V = h * B$, siendo V el volumen del prisma, h la altura y B el área de su base.

El volumen de un prisma se calcula multiplicando la altura por el área de la base.

4. $V = \frac{1}{3}h * B,$ siendo V el volumen de la pirámide, h la altura y B el área de su base.

El volumen de una pirámide se obtiene multiplicando la altura por el área de la base y dividiendo el resultado entre tres.

Expresar por medio de símbolos una Fórmula

Cuando por la investigación se ha tenido una ley matemática o física, para expresarla por medio de símbolos, o sea escribir su fórmula, generalmente se designan las variables por las iniciales de sus nombres y se escribe con ellas una expresión en la que aparezcan las relaciones observadas entre las variables.

1. Escribir una fórmula que exprese que la altura de un triángulo es igual al doble de su área dividido entre la base.

Designando la altura por h, el área por A y la base por b, La fórmula será: $h = \frac{2A}{B}$

2. Escribir una fórmula que exprese que la presión que ejerce un líquido sobre el fondo del recipiente que lo contiene es igual a la superficie del fondo multiplicada por la altura de líquido y por su densidad.

Designando la presión por P, La superficie del fondo del recipiente por S, La altura del líquido por h y su densidad por d, La fórmula será: $P = Shd$

Ejemplos

1. La suma de 2 números multiplicada por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

2. El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$a^2 + b^2 = c^2$, donde c es la hipotenusa y a y b son catetos.

3. La base de un triángulo es igual al duplo de su área dividido entre su altura

$b = \frac{2A}{h}$, donde A es el área, h la altura y b la base

4. La densidad de un cuerpo es igual al peso dividido por el volumen.

$\rho = \frac{W}{V}$, donde W es el peso y V el volumen

Taller en clase

1. El peso de un cuerpo es igual al producto de su volumen por su densidad.

$\mathrm{P} = \rho \cdot \mathrm{V}$; (donde P es el peso, ρ la densidad, y V el volumen)

2. El área de un cuadrado es igual al cuadrado del árbol

$\mathrm{A} = \mathrm{l}^2$; (donde A es el área y l el lado del cuadrado)

3. El volumen de un cubo es igual al cubo de su arista

$\mathrm{V} = \mathrm{a}^3$; (donde V es el volumen y a la arista)

4. El radio de una circunferencia es igual a longitud de la circunferencia dividida entre 2π

$\mathrm{r} = \frac{\mathrm{C}}{2\pi}$; (donde r es el radio y C el perímetro)

5. El cuadrado de un cateto de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto.

$a^2 = c^2 - b^2$; (donde c es la hipotenusa y a y b son catetos)

6. El área de un cuadrado es la mitad del cuadrado de su diagonal.

$A = \frac{d^2}{2}$; (donde d es la diagonal del cuadrado)

7. La fuerza de atracción entre 2 cuerpos es igual al producto de una constante k por el cociente que resulta dividir el producto de las masas de los cuerpos por el cuadrado de su distancia.

$F = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$; (donde F es la fuerza, m_1 y m_2 las masas, r la distancia entre ellas, y k una constante.

8. La potencia de una máquina es igual al trabajo que realiza en 1 segundo.

$$P = \frac{W}{t}$$

$cuando\ t = 1s, entonces$

$P = W$; (donde P es la potencia, W el trabajo y t el tiempo)

Empleo de fórmulas en casos prácticos

Basta sustituir las letras de la fórmula por sus valores

1. Hallar el área de un trapecio cuya altura mide 5 m y sus bases 6 y 8 m respectivamente

   La fórmula es $A = h\left(\frac{b+b'}{2}\right)$
   Donde, h=5m, b=6m, b´=8m; luego, sustituyendo:

$$A = 5\,m\left(\frac{6\,m + 8\,m}{2}\right) = 5\,m * 7\,m = 35m^2$$

2. Hallar el volumen de una pirámide siendo su altura 12 m Y el área de la base 36 m^2
   La fórmula es $V = \frac{1}{3}hB$
   Aquí, h=12m, B=36 m^2 sustituyendo:

$$V = \frac{1}{3}(12\,m)(36\,m^2) = 4\,m * 36\,m^2 = 144\,m^3$$

3. Hallar el área de un triángulo de 10 cm y 8 de altura. $A = \frac{b*h}{2}$
   b=10 cm; h=8cm

$$A = \frac{10\text{ cm} * 8\text{ cm}}{2} = 40cm^2$$

4. Hallar el área de un cuadrado diagonal mide 8 m. $A = \frac{d^2}{2}$
   d=8 m

$$A = \frac{(8\,m)^2}{2} = 32m^2$$

5. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 m y uno de los dos catetos 5 m. Hallar el otro cateto. $b^2 = a^2 - c^2$

   a=13 m; c=5 m

$$b^2 = (13\,m)^2 - (5\,m)^2$$
$$b^2 = 144\,m^2$$
$$\text{b} = 12\,m$$

Taller en clase

1. ¿Qué distancia recorre un móvil en 15 segundos?, Si se mueve con movimiento uniforme y lleva una velocidad de 9 $\frac{m}{s}$. $Donde\ x = vt$

t= 15 s; v= $9\frac{m}{s}$ $x = \left(9\frac{m}{s}\right)(15\ s) = 135\ m$

2. ¿En qué tiempo el móvil recorrerá 108 m?

x= 108 m; v= $9\frac{m}{s}$ $t = \frac{e}{v} = \frac{108\ m}{9\frac{m}{s}} = 12\ s$

3. Hallar la hipotenusa de un triángulo rectángulo siendo sus catetos b=4 m y c=3 m. Donde $c^2 + b^2 = a^2$

b= 4 m; c= 3 m

$a^2 = (3\ m)^2 + (4\ m)^2$
$a^2 = 25\ m^2$
$a = 5\ m$

4. Hallar el área de un círculo de 5 m de radio. Donde $A = \pi r^2$

$$\pi = 3.14$$

$A = (3.14)(5\ m)^2$
$A = (3.14)(25\ m^2)$

$$A = 78.5\ m^2$$

5. Hallar la longitud de una circunferencia de 5 m de radio. Donde $C = 2\pi r$

r= 5m; $\pi = 3.14$

$$C = 2(3.14)(5\ m) = 31.4\ m$$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Cambio de Sujeto de una fórmula

Una fórmula es una ecuación literal y nosotros podemos despejar cualquiera de los elementos que entran en ella, considerándolo como incógnita, Y con ello cambiamos el sujeto de la fórmula.

1. Dada la fórmula $x = \frac{1}{2}gt^2$ hacer a t el sujeto de la fórmula. Hay que despejar t en esta ecuación algebraica; t es la incógnita. Suprimiendo los denominadores tenemos.

   Despejando t^2: $t^2 = \frac{2e}{a}$

Extrayendo la raíz cuadrada a ambos miembros: $t = \sqrt[2]{\frac{2e}{a}}$

2. Dada la fórmula $S = 2R(N - 2)$ hacer a N el sujeto de la fórmula.

Hay que despejar N. N es la incógnita.

Efectuando el producto indicado: $S = 2RN - 4R$

Trasponiendo: $S + 4R = 2NR$

$$N = \frac{S+4R}{2R}$$

3. En la fórmula $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ despejar p´

El m.c.m. de los denominadores es pp´f. Quitando denominadores tenemos:

$$pp' = p'f + pf$$

La incógnita p´, trasponiendo:

$$pp' - p'f = pf$$
$$p'(p - f) = pf$$
$$p' = \frac{pf}{p-f}$$

4. Despejar a en $v = \sqrt[2]{2ae}$

   Elevando al cuadramos ambos miembros para destruir el radical:

$$v^2 = 2ae$$

Despejando a: $a = \frac{v^2}{2e}$

Esta operación de cambiar el sujeto de una fórmula será de incalculable utilidad para el alumno de la matemática y física.

Ejemplos

1. En la fórmula $x = vt$, despejar v y t

$$v = \frac{x}{t}; \quad t = \frac{x}{v}$$

2. En $e = \frac{1}{2}at^2$, despejar a

$$2e = at^2$$
$$\frac{2e}{t^2} = a$$

3. En $A = \pi r^2$, despejar R

$$\frac{A}{\pi} = r^2$$
$$r = \sqrt[2]{\frac{A}{\pi}}$$

4. En $V = V_0 + at$, despejar $V_0, a\ y\ t$

$$V_0 = V - at$$
$$V - V_0 = at$$
$$\frac{V - V_0}{a} = t; \ \frac{V - V_0}{t} = a$$

Taller

1. En $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$, $despejar\ x$

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bx$$

$$-\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2b} = x$$

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$$

2. En $e = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2, despejar\ V_0$

$$e - \frac{1}{2} g t^2 = V_0 t$$

$$\frac{e - \frac{1}{2} g t^2}{t} = V_0$$

$$\frac{e - \frac{1}{2} g t^2}{t} = V_0$$

3. En $V = \frac{1}{3} h \pi r^2, despejar\ h\ y\ r$

$$3V = h\pi r^2$$

$$\frac{3V}{\pi r^2} = h$$

$$\frac{3V}{h\pi} = r^2 \rightarrow r = \sqrt[2]{\frac{3V}{h\pi}}$$

4. En $I = \frac{Q}{t}$, $despejae\ Q\ y\ t$

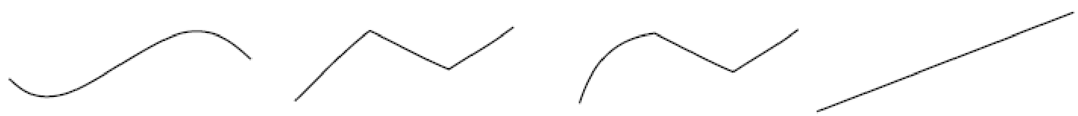
$$It = Q; \quad t = \frac{Q}{I}$$

11. Geometría

La línea, este término tiene su origen en el vocablo griego linón, que se trata de un hilo de lino. Línea es uno de los denominados conceptos primitivos, porque su definición es necesariamente basada en una idea asociada a imágenes de la cotidianidad.

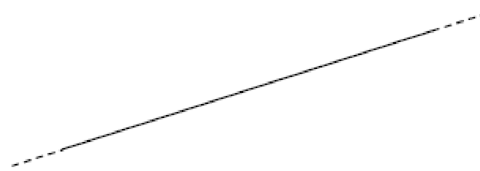
Se entiende que línea es una sucesión continua de puntos de tal forma que no tiene grosor, sólo se le puede medir la longitud.

Las líneas pueden ser curvas, quebradas, rectas



Líneas, Rectas y Plano

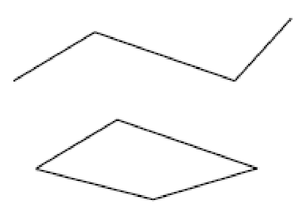
Recta. Es una línea que no tiene inicio ni fin, no tiene curvas ni puntos de quiebre.



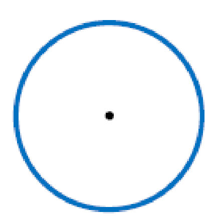
A la mitad de una recta se le denomina **Semirecta**, inicia en un punto y no tiene fin.

Las porciones de recta comprendidas entre dos puntos, se denominan **Segmentos**.

La unión de varios segmentos de tal forma que no están alineados, es decir, que forman una línea quebrada, se denomina **Línea Poligonal**. Existen líneas poligonales abiertas y líneas poligonales cerradas.



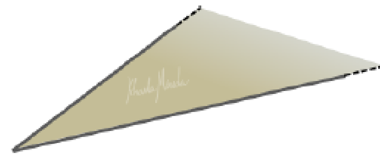
La línea curva cerrada en la que todos los puntos se encuentran a la misma distancia de otro punto llamado centro se denomina **Circunferencia**.



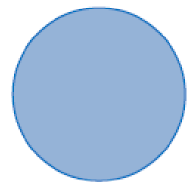
Plano. Este término proviene del latín planus, y se refiere a una superficie lisa, sin espesor y sin relieves. puedes notar que

Para definir plano usamos términos como **superficie**, **lisa** o **relieve**, que tendríamos también que definir, de modo que plano es otro concepto primitivo que asumimos de forma intuitiva.

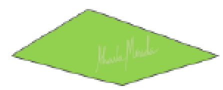
La porción de plano delimitada por dos semirectas que parten del mismo punto se denomina **Ángulo.**



La porción de plano delimitada por una circunferencia se denomina **Círculo.**



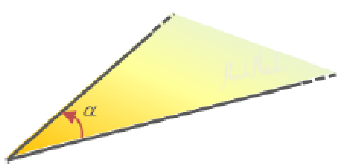
La porción de plano delimitada por una línea poligonal cerrada se denomina **Polígono.**



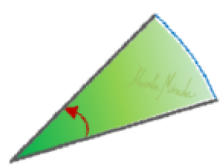
Ángulos, medidas y tipos de ángulos

Hay dos sistemas para medir los ángulos, uno es el **sistema sexagesimal**, dado en grados, minutos y segundos y el **sistema decimal**, basado en la relación que hay entre el arco de circunferencia, correspondiente a un ángulo, y el radio, y se denominan radianes.

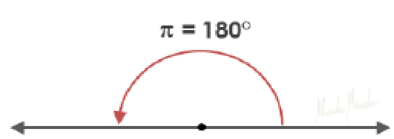
Media circunferencia corresponde a un arco de π radianes y es equivalente a 180º.



Sistema Sexagesimal
Grados° Minutos' segundos''



Sistema Decimal
Radianes



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

Conversión de Radianes a Grados a Radianes y Viceversa

Se realizan las siguientes operaciones para convertir ángulos de grados a radianes:

$$Grados = (Radianes) \cdot \frac{180}{\pi}$$

$$Radianes = (Grados) \cdot \frac{\pi}{180}$$

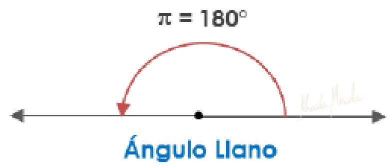
Convierte $\mathbf{30}$°a radianes	Convierte $\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$ rad a grados
Convierte $\mathbf{150}$°a radianes	Convierte $\frac{3\pi}{4}$ rad a grados
Convierte $\mathbf{120}$°a radianes	Convierte π rad a grados
Convierte $\mathbf{45}$°a radianes	Convierte $\frac{5\pi}{3}$ rad a grados
Convierte $\mathbf{225}$°a radianes	Convierte 2.5 rad a grados
Convierte $\mathbf{315}$°a radianes	Convierte $\frac{7\pi}{6}$ rad a grados

Ángulos Notables

Conozcamos los ángulos notables por su medida.

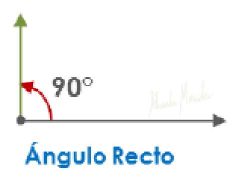
Ángulo Nulo. Es el ángulo que mide cero grados, y es formado por dos semirectas que coinciden.

Ángulo Llano. Es el ángulo que mide 180° y es formado por dos semirectas que tienen el mismo origen y cuyos extremos se alejan oponiéndose.

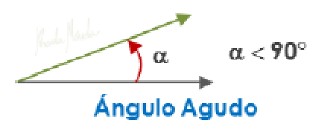


Ángulo Completo. Es el ángulo que mide 360° y se obtiene cuando una de las semirectas da un giro completo respecto la otra semirecta fija.

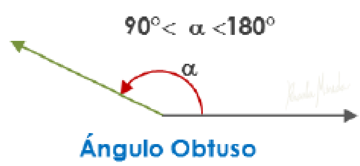
Ángulo Recto. Es el ángulo que mide 90° y se forma cuando una semirecta realiza un cuarto de giro respecto a la otra.



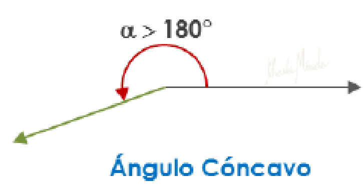
Angulo agudo. Es un ángulo que mide menos de 90°.



Ángulo obtuso. Es un ángulo que mide más de 90 y menos de 180°.



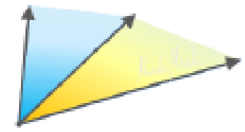
Ángulo Cóncavo. Es un ángulo mayor de 180°.



Ahora conoceremos cómo se clasifican los ángulos por la manera en que se relacionan con otros ángulos. Esta relación puede ser según su posición y puede ser según sus valores.

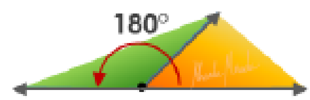
Según la posición entre dos ángulos estos pueden ser:

Consecutivos. Son aquellos ángulos que tienen un lado y el vértice en común.



Consecutivos

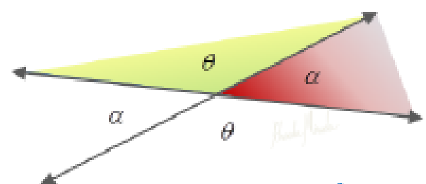
Adyacentes. Son ángulos con un lado y vértice común y los lados no comunes están alineados, es decir, que forman un ángulo llano.



Adyacentes

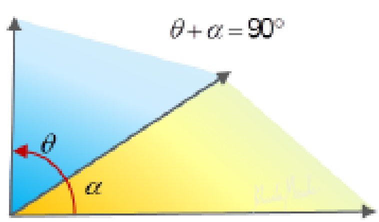
Opuestos por el vértice. Son los ángulos no adyacentes que se forman cuando dos rectas se cortan.

Los ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida, de forma simple se dice que son iguales.

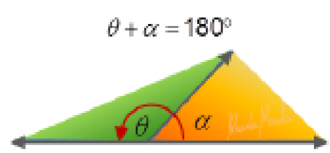


Opuestos por el Vértice

Según su valor los pares de ángulos pueden ser **Complementarios** que suman 90° y **Suplementarios** que sumados dan 180°. Ahora vamos a conocer cómo se clasifican los polígonos regulares acompáñanos a la siguiente lección.

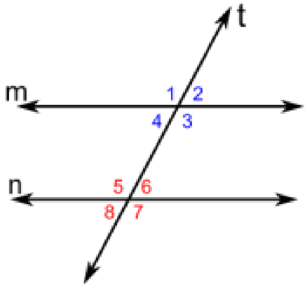


Complementarios



Suplementarios

Ángulos entre dos líneas rectas paralelas cortadas por una línea recta transversal.

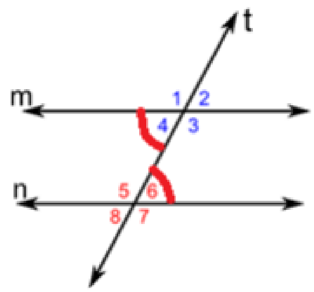


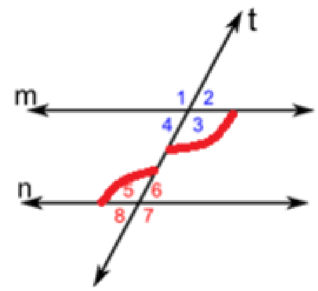
Si dos rectas ***m* y *n*** son cortadas en puntos distintos por una tercera recta ***t*,** se observa que se forman ocho ángulos.

A la recta ***t*** se le denomina *trasversal*, es una recta que corta a otras dos rectas paralelas coplanares en puntos diferentes.

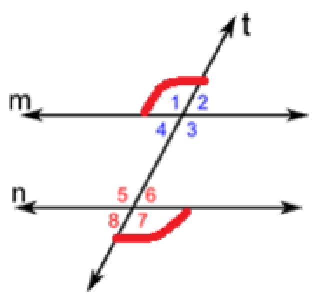
Los ángulos que se forman se clasifican por parejas como se describe:

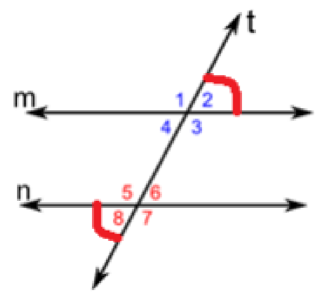
Ángulos alternos internos: son aquellos ángulos con diferente vértice que están situados entre ***m* y *n*** y en lados distintos de la transversal ***t***. y son congruentes o sea que son iguales.



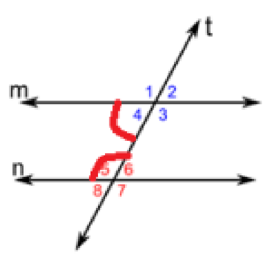


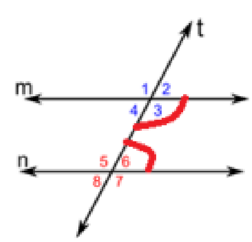
Ángulos alternos externos: son aquellos ángulos con diferentes vértices que no están situados entre las rectas ***m* y *n*** y quedan en lados distintos de la transversal ***t***. .y son congruentes o sea que son iguales.



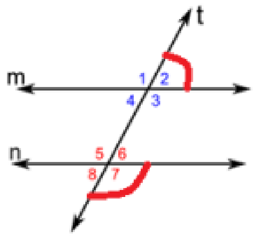


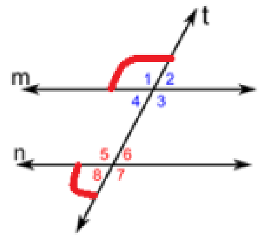
Ángulos colaterales internos: son los ángulos con diferente vértice que quedan entre las rectas ***m* y *n***y están situados del mismo lado de la transversal ***t***. y son suplementarios.



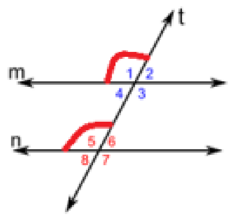


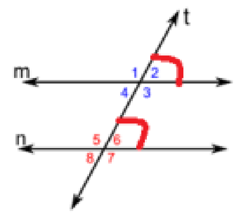
Ángulos colaterales externos: son los ángulos con vértices diferentes que no están situados entre las rectas ***m y n*** y quedan del mismo lado de la trasversal ***t.*** y son suplementarios

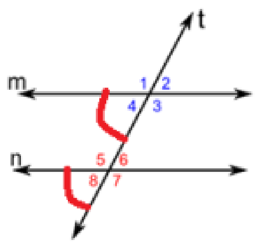


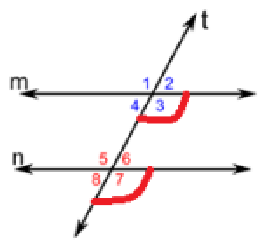


Ángulos correspondientes: son los ángulos de vértices diferentes que están situados del mismo lado de la trasversal ***t***, siendo uno interno y otro externo a la recta ***m y n,*** y son congruentes o sea que son iguales.







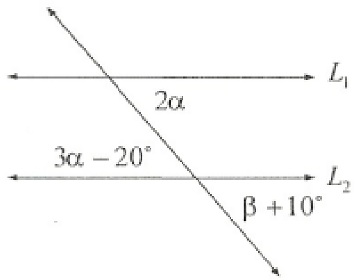


Taller en Clase

1.-

En la figura $L_1 \parallel L_2$, $\alpha + \beta = ?$

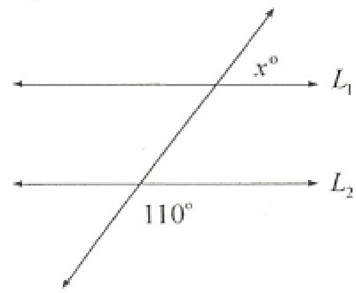
A. 50°
B. 60°
C. 70°
D. 80°
E. 90°



2.-

En la figura $L_1 \parallel L_2$, $x = ?$

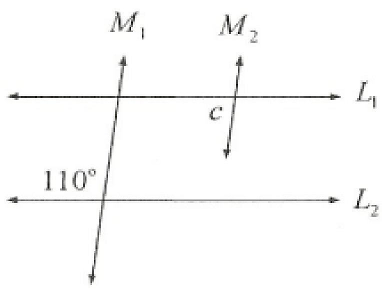
A. 70°
B. 60°
C. 45°
D. 40°
E. 30°



3.-

En la figura $L_1 \parallel L_2$, y $M_1 \parallel M_2$.
¿Cuánto mide c?

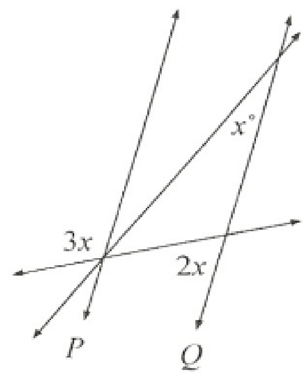
A. 55°
B. 70°
C. 80°
D. 90°
E. 110°



4.-

$P \parallel Q$; $x = ?$

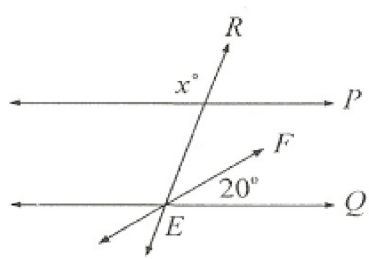
A. 72°
B. 36°
C. 18°
D. 60°
E. NA



5.-

$P \parallel Q$; $\overleftrightarrow{EF}$ bisectriz $\angle QER$; $x = ?$

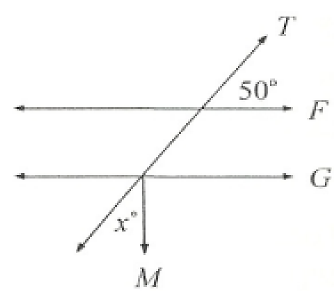
A. 130°
B. 120°
C. 140°
D. 150°
E. NA



6.-

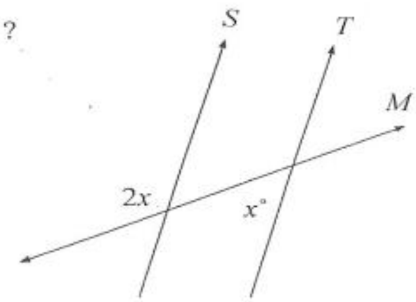
$F \parallel G$; G perpendicular con M : $x = ?$

A. 50°
B. 60°
C. 40°
D. 70°
E. NA



7.-

S ∥ T; $x = ?$



A. 30°

B. 45°

C. 80°

D. 60°

E. NA

8.-

$P \parallel Q;\ a - b = 20°;\ x = ?$

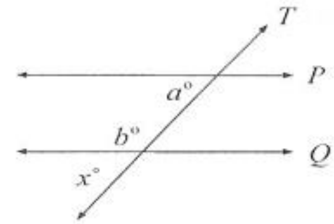
A. 100°

B. 120°

C. 130°

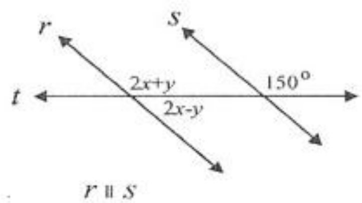
D. 140°

E. NA



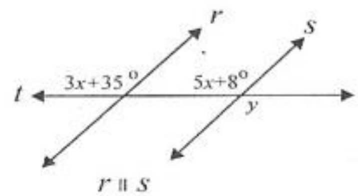
9.-

$x = ?;\quad y = ?$



10.-

$x = ?;\quad y = ?$

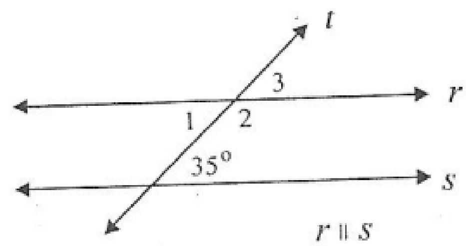


Instrucciones: *Obtenga la magnitud de todos los ángulos indicados.*

$m\angle 1 =$

$m\angle 2 =$

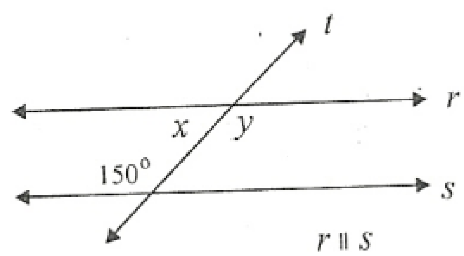
$m\angle 3 =$



2.- *Encuentra el valor de X y Y.*

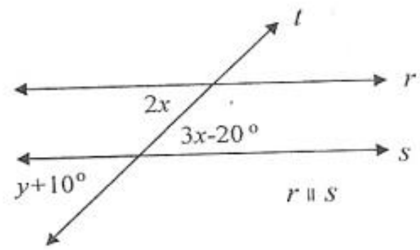
$m\angle x =$

$m\angle y =$

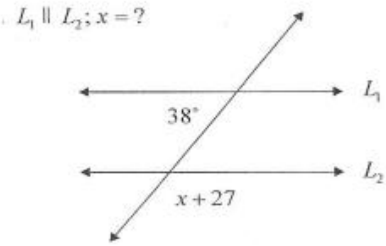


$m\angle x =$

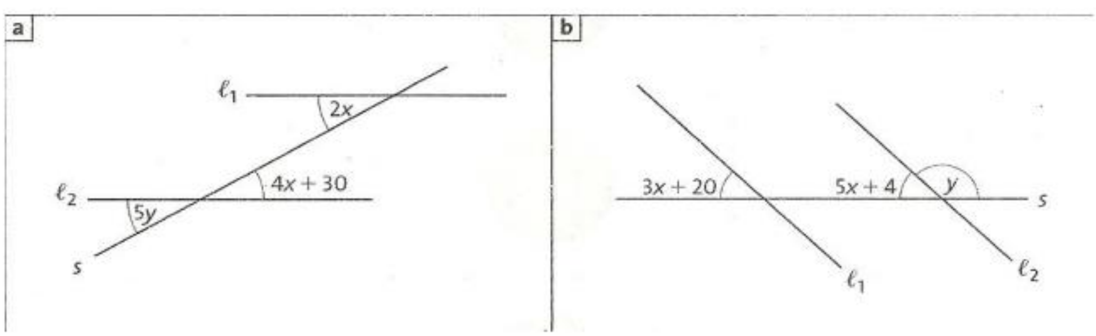
$m\angle y =$



3.- Hallar el valor de x

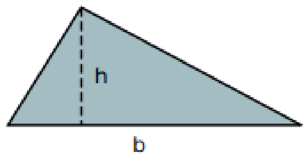


4.- Determina los valores de X y Y en cada una de las figuras las rectas l1 y l2 son paralelas.



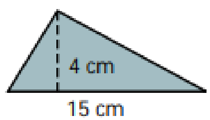
ÁREA DEL TRIÁNGULO

El área del triángulo es igual al semiproducto de la base por su altura.



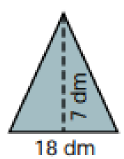
$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Ejemplo:

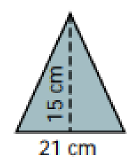


$$A = \frac{15 \times 4}{2} = 30 \text{ cm}^2$$

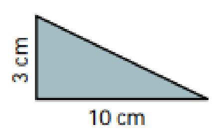
1 Calcula el área de los siguientes triángulos.



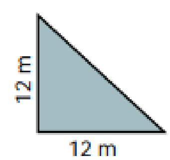
$A = \dfrac{18 \times 7}{2} =$



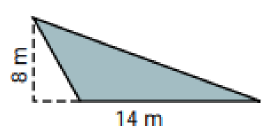
A =

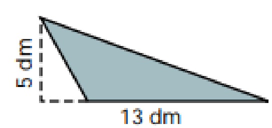


A =



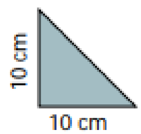
A =



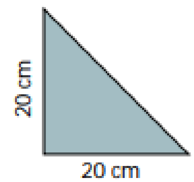


2

Calcula el área de los siguientes triángulos rectángulos isósceles.



A =

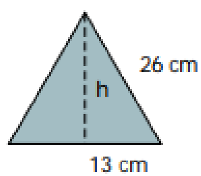


A =

¿Qué relación existe entre las áreas de estos dos triángulos?

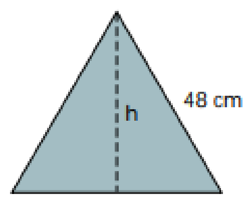
3

Calcula el área de los siguientes triángulos equiláteros.



$h = \sqrt{26^2 - 13^2}$

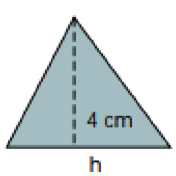
$h = \frac{l \times h}{2} =$



4

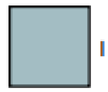
Calcula:

a) La base de un triángulo de 14 cm^2 de área y 4 cm de altura.



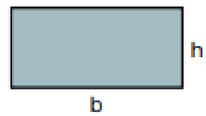
ÁREA DE LOS CUADRILÁTEROS

- **CUADRADO**



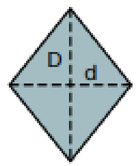
$A = l \times l = l^2$

- **RECTÁNGULO**



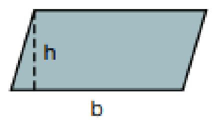
$A = b \times h$

- **ROMBO**



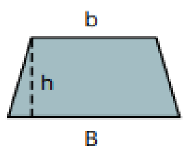
$A = \frac{D \times d}{2}$

- **ROMBOIDE**



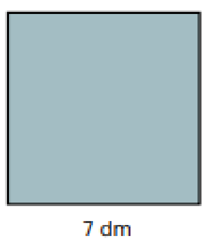
$A = b \times h$

- **TRAPECIO**

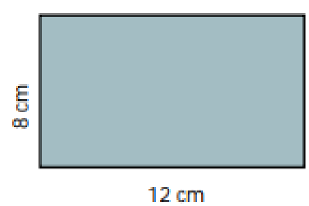


$A = \frac{B \times b}{2} \cdot h$

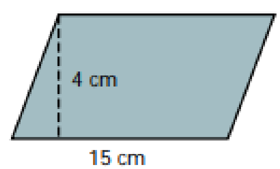
1 Calcula el área de los siguientes polígonos.



$A = 7 \times 7 = 49\ dm^2$



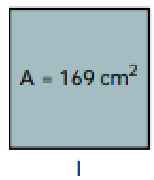
A =



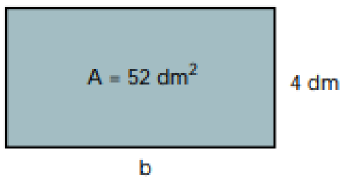
A =

2 **Calcula:**

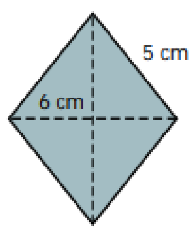
a) El lado de un cuadrado cuya área es 169 cm^2.



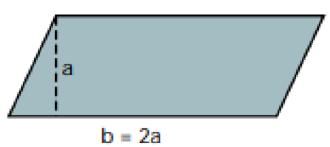
b) La base de un rectángulo que tiene 52 dm^2 de área y su altura mide 4 dm.



c) El área de un rombo que tiene 5 cm de lado y 6 cm de diagonal menor.



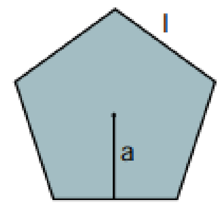
d) El área de un romboide cuya base y altura suman 12 cm y la base mide el doble.



ÁREAS DE OTRAS FIGURAS PLANAS

- **POLÍGONOS REGULARES**

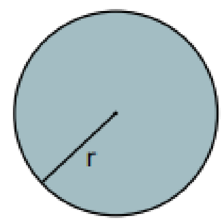
El área de un polígono regular cualquiera es igual al semiproducto del perímetro por la apotema.



$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

- **CÍRCULO**

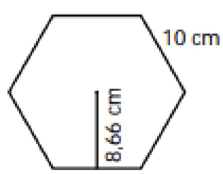
El área del círculo es igual al producto del número π por el radio al cuadrado.

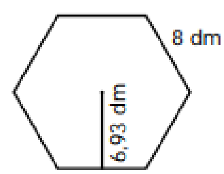


$$A = \pi \cdot r^2$$

1 **Calcula:**

a) El área de los siguientes hexágonos regulares.

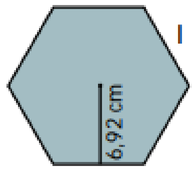




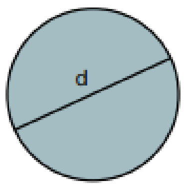
$P = 6 \times 10 = 60$ cm

$$A = \frac{60 \times 8{,}66}{2} =$$

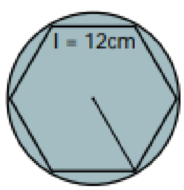
2 **Calcula:**



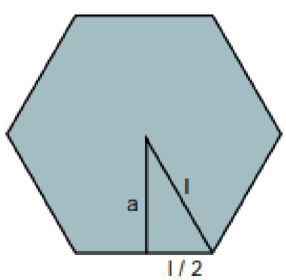
b) El diámetro de un círculo que tiene 78,5 cm^2 de área.



c) El área de un círculo circunscrito a un hexágono regular de lado 12 cm.
(Recuerda que l = r.)

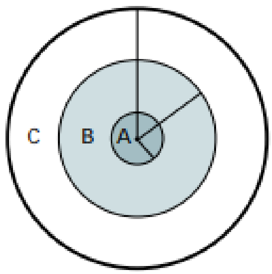


d) El área de un hexágono regular de 8 cm de lado.



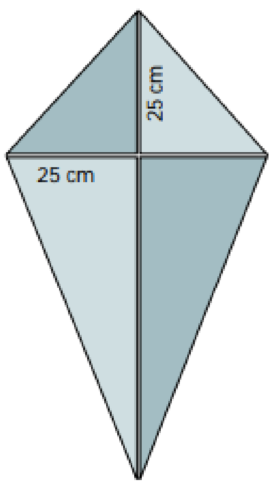
PROBLEMAS DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

1 **Calcula el área de cada zona de una diana, sabiendo que los radios de las tres circunferencias concéntricas son respectivamente 5 cm, 10 cm y 15 cm. (Comienza por el círculo menor.)**



Sugerencia:
Área de B = $\pi \times 10^2$ - Área de A.

2 **Calcula en cm^2 la cantidad de papel de seda que se necesita para hacer una cometa formada por dos palos de 75 cm y 50 cm de longitud, de manera que el palo corto cruce al largo a 25 cm de uno de sus extremos.**



Material recopilado por:

- Ing. Francisco Pérez Acuña M.Sc ; Coordinador *Programa de Reforzamiento Académico*
- Angel Reyes-Estudiante de Lic. en Ingeniería Electromecánica, Asistente Académico
- Luis Luján-Estudiante de Lic. en Ingeniería Mecánica Industrial, Asistente Académico

Material adquirido de:

- Baldor, A. (1941). Álgebra. Publicaciones Cultural.
- Instituto Nacional José Miguel Carrera. (2020). *Guía N° 6: Razones y Proporciones*. Obtenido de: https://epja.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/43/2019/06/Gu%C3%ADa-N%C2%B0-2-Matem%C3%A1tica-Razones-y-proporciones.pdf

- Ministerio de Educación de Chile. (2019). *Guía N° 2: Matemática – Razones y proporciones*. Educación de Personas Jóvenes y Adultas. Obtenido de: https://epja.mineduc.cl/uploads/sites/

- Mérida, K. (2017). *7ma Unidad: Geometría, conceptos primitivos.* Tu profe Virtual. Obtenido de: https://www.guao.org/sites/default/files/GEOMETR%C3%8DA.%20Conceptos%20Primitivos%2C%20L%C3%ADnea%2C%20Recta%2C%20Plano%2C%20Medidas%20y%20%C3%81ngulos_0.pdf

- Velázquez. M, Ing. (2013). *Ángulos Formados por líneas paralelas y transversales*. Obtenido de: https://cbtis173.wordpress.com/wp-content/uploads/2013/03/ejercicio-17-al-20-angulos-entre-dos-lineas-paralelas.pdf